

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Ing. Olga Archalousová

SINGULÁRNÍ POČÁTEČNÍ ÚLOHA PRO OBYČEJNÉ
DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRODIFERENCIÁLNÍ
ROVNICE

SINGULAR INITIAL VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL
AND INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

Zkrácená verze Ph.D. Thesis

Obor: Matematika v elektroinženýrství
Školitel: Doc. RNDr. Zdeněk Šmarda, CSc.

Klíčová slova

Singulární počáteční úloha, obyčejné diferenciální a integrodiferenciální rovnice, elektrické obvody, Lane-Emdenova diferenciální rovnice, asymptotické rozklady řešení, asymptotické odhady řešení, Adomianova dekompoziční metoda, Ważewského topologická metoda, Schauderova věta o pevném bodě, Banachova věta o pevném bodě.

Keywords

Singular initial value problem, ordinary differential and integrodifferential equation, electrical circuits, Lane-Emden differential equation, asymptotic expansions of solutions, asymptotic estimates of solutions, Adomian decomposition method, Ważewski's topological method, Schauder fixed-point theorem, Banach fixed-point theorem.

Disertační práce je k dispozici na Vědeckém oddělení děkanátu FEKT VUT v Brně, Technická 10, 616 00 Brno.

Obsah

1	Úvod	3
2	Dosavadní vývoj a současný stav problematiky	4
3	Cíle disertace	5
4	Přípravná kapitola	6
4.1	Základní pojmy z teorie asymptotických rozkladů	6
4.2	Ważewského topologická metoda	7
5	Singulární počáteční úloha pro jisté třídy skalárních diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic	8
5.1	Taylorova metoda řešení	8
5.2	Adomianova metoda řešení	10
5.3	Asymptotické rozklady řešení	12
5.4	Asymptotické odhady řešení	15
6	Systémy integrodiferenciálních rovnic	16
6.1	Singulární počáteční úloha pro Volterrovy a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice	16
6.2	Singulární počáteční úloha pro implicitní Volterrovy a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice	18
7	Závěr	22
8	Seznam literatury	23
9	Curriculum vitae	28
10	Abstract	29

1 Úvod

Řada zákonů stanovených na základě teorie pružnosti, elektrodynamiky a tepelné vodivosti je zapsána ve tvaru:

$$y(x) = ku(x) \tag{1.0.1}$$

kde u a y jsou odpovídající fyzikální hodnoty, k je konstanta úměrnosti. Jestliže u je tah a y prodloužení tělesa, pak rovnice (1.0.1) vyjadřuje Hookův zákon, kde k je modul pružnosti. Jestliže u je teplotní gradient a y -tepelný tok, pak rovnice (1.0.1) vyjadřuje Faradayův zákon, kde k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti látky.

Uvedené rovnice předpokládají okamžité určení ustáleného stavu. Ve skutečnosti zákony ve tvaru rovnice (1.0.1) neukazují skutečné jevy, protože v reálném prostředí nedosáhneme ustáleného stavu okamžitě, ale jen po nějaké době, která teoreticky může být od nuly do nekonečna. Například polarizace, vyvolaná v elektrickém poli, po zániku elektrického pole nemizí ihned, ale bude pomalu klesat. Proto posuvný proud bude i ve stejnosměrném poli. Tedy okamžitý stav systému závisí obecně na stavu systému v předcházejícím časovém okamžiku. Takové systémy jsou pak většinou popsány diferenciálními a integrodiferenciálními rovnicemi s diferenčními či separovatelnými jádry s malým parametrem při derivaci. Jestliže chování parametru má funkční charakter v dostatečně malém časovém okamžiku, který je například popsán funkcí $g(t) \in C(J)$, $g(t) > 0$, $g(0^+) = 0$, $J = (0, t_0]$, $t_0 > 0$, pak vyšetřování systémů vede na řešení singulárních počátečních úloh, což je jedním z cílů disertační práce.

2 Dosavadní vývoj a současný stav problematiky

V padesátých letech minulého století Čech [8] poprvé systematicky vyšetřoval systémy obyčejných diferenciálních rovnic v okolí singulárního bodu. Stanovil podmínky existence a jednoznačnosti řešení singulární počáteční úlohy, vyšetřil strukturu integrálních O-křivek a našel posloupnost funkcí konvergující k O-křivce v případě její jednoznačnosti. Pozornost se soustředila i na asymptotický charakter řešení v okolí singulárního bodu. Prosenjuk a Jacenko [33] aplikací Schauderovy věty o pevném bodu stanovili asymptotiku řešení některých tříd nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v okolí singulárního bodu. Diblík [9] vyšetřoval asymptotický charakter řešení singulární počáteční úlohy pro diferenciální rovnice částečně řešitelných vzhledem k derivaci. Konyuchova [31] studovala mimo jiné i singulární počáteční úlohu maticových Riccatiho diferenciálních rovnic. Norkin [26], [27] se zabýval strukturou integrálních O-křivek v okolí singulárního bodu a stanovil dimenzi integrální O-množiny některých tříd nelineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Této problematice jsou dále věnovány práce [3], [10-19], [54-57] a řada dalších.

Bajzakov [5] řešil problematiku asymptotických rozkladů řešení lineárních i nelineárních systémů integrálních rovnic Volterrova typu v okolí singulárního bodu.

Dyshko, Konyuchova a Sudov [19] vyšetřovali pomocí Lyapunových řad singulární okrajové problémy pro diferenciální rovnice 3. řádu, které se vyskytují v teorii dynamiky kapalin. Šmarda [36-39] ukázal jak v kombinaci Ważewského metody a Schauderovy věty o pevném bodu lze dokázat existenci a jednoznačnost řešení singulární počáteční úlohy pro integrodiferenciální rovnice se separovatelným jádrem. Bařtinec a Diblík [6], [7] stanovili podmínky existence řešení singulární Cauchy-Nicolettiho úlohy pro systém diferenciálních rovnic včetně asymptotiky řešení.

Pomocí modifikované Ważewského metody s tzv. (n, p, z) -podmnožinou vyšetřovali Diblík a Nowak [18] singulární počáteční úlohu pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic. Zernov a Kuzina [55] vyšetřovali singulární počáteční úlohu pro skalární implicitní diferenciální rovnice 1. řádu. Stanovili podmínky existence neprázdné množiny spojitě diferencovatelných řešení včetně jejich asymptotiky.

Ve výše citovaných pracích byly mnohé výsledky dosaženy aplikací Ważewského topologické metody. V konkrétních aplikacích této metody na systémy integrodiferenciálních rovnic jsou však nutné předpoklady postihující bohužel jen úzkou třídu integrodiferenciálních rovnic. Otázky existence a jednoznačnosti řešení některých singulárních počátečních úloh pro Volterrovy nebo Fredholmovy integrodiferenciální rovnice byly vyřešeny v pracích [40-44] pomocí Banachovy věty o pevném bodu se speciální exponenciální váhovou normou.

Návrhům jednoduchých algoritmů na řešení některých singulárních počátečních úloh a otázkám existence a jednoznačnosti řešení Volterrových a Fredholmových integrodiferenciálních rovnic včetně popisu asymptotických vlastností řešení je věnována předložená práce.

3 Cíle disertace

Cílem disertace je studium existence, jednoznačnosti a asymptotických vlastností řešení některých tříd obyčejných a zejména integrodiferenciálních rovnic v okolí singulárního bodu. Jedná se zejména o singulární počáteční úlohy, které popisují chování elektrických obvodů a vlastnosti terminionických proudů.

Užitím úvah analogických myšlenky důkazu Lyapunovy věty o rozkladu [32] bude řešení konstruováno ve tvaru nekonečné řady a v případě Adomianovy dekompoziční metody budou řešení singulárních počátečních úloh vyjádřena v uzavřeném tvaru. U obecnějších systémů bude pak stanoven i asymptotický tvar řešení. U integrodiferenciálních rovnic nelze aplikovat Ważewského topologickou metodu ve formě známé pro obyčejné diferenciální rovnice, neboť neznámá funkce je pod integračním znaménkem. Neznáme tedy apriori směrové pole integrodiferenciálních rovnic, ačkoli toto směrové pole existuje. Jisté modifikace byly již publikovány v pracích [21], [28] ale postihují velice úzkou třídu integrodiferenciálních rovnic.

Jedním z dalších cílů disertace bude tedy i navržení kvalitativní metody vyšetřování integrodiferenciálních rovnic v kombinaci Ważewského topologické metody známé z teorie obyčejných diferenciálních rovnic s některými větami o pevném bodu. Tato teorie pak bude rozšířena i na některé třídy singulárních počátečních úloh pro integrodiferenciální rovnice včetně stanovení asymptotiky řešení. Pro obecné systémy integrodiferenciálních rovnic Volterrova a Fredholmova typu pak budou užitím Banachovy věty o pevném bodu stanoveny podmínky jednoznačnosti řešení počáteční singulární úlohy včetně spojitě závislosti na parametru. Výsledky pak budou demonstrovány na konkrétních příkladech.

4 Přípravná kapitola

4.1 Základní pojmy z teorie asymptotických rozkladů

Nyní uvedeme základní pojmy a definice z teorie asymptotických rozkladů řešení, které budeme používat v následujících kapitolách:

- (i) $f(x) = O(g(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$ znamená, že existuje pravé okolí bodu x_0 v němž platí $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq K$, $0 < K = konst$.
- (ii) $f(x) = o(g(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$ znamená, že $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- (iii) $f(x) \sim g(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$ znamená, že $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Definice 4.1.1 Posloupnost funkcí $(\varphi_n(x))$ nazveme asymptotickou posloupností pro $x \rightarrow x_0^+$, jestliže pro všechna n platí $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$.

Definice 4.1.2 Formální řadu $\sum a_n \varphi_n(x)$ nazveme asymptotickým rozkladem funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$ do N -tého členu platí-li:

- a) $(\varphi_n(x))$ je asymptotickou posloupností pro $x \rightarrow x_0^+$.
- b) $[f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)] = o(\varphi_N(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $0 \neq a_n = konst$, což budeme značit $f(x) \approx \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$. Je-li N libovolné, pak $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$.

Poznámka 4.1.1 Pro pevné x_0 může mít daná funkce několik asymptotických rozkladů s různými asymptotickými posloupnostmi. Například

$$\frac{1}{1+x} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}, \quad \frac{1}{1+x} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)x^{-2n}$$

pro $x \rightarrow \infty$. Asymptotický rozklad jednoznačně nedefinuje funkci $f(x)$, například funkce

$$(1+x)^{-1}, \quad (1+e^{-x})(1+x)^{-1}$$

mají stejný asymptotický rozklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}$$

pro $x \rightarrow \infty$. Je však nutno poznamenat, že pro danou asymptotickou posloupnost a pevné x_0 lze koeficienty a_m rekurentně vyjádřit ve tvaru

$$a_m = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left\{ \left[f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \varphi_n(x) \right] [\varphi_m(x)]^{-1} \right\}, \quad m = 1, \dots, N$$

4.2 Ważewského topologická metoda

Nechť $f(t, y)$ je spojitá funkce, která je definována na otevřené (t, y) -množině $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Ω^0 je otevřená podmnožina Ω , $\partial\Omega^0$ je hranicí Ω^0 vzhledem k množině Ω , a $\bar{\Omega}^0$ je uzávěrem Ω^0 vzhledem k množině Ω . Uvažujeme systém obyčejných diferenciálních rovnic:

$$y' = f(t, y). \quad (4.2.1)$$

Definice 4.2.1 ([22]) *Bod $(t_0, y_0) \in \Omega \cap \partial\Omega^0$ nazveme výstupním bodem (vstupním bodem) množiny Ω^0 vzhledem k systému (4.2.1), jestliže pro každé řešení systému (4.2.1), s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ existuje $\epsilon > 0$ takové, že $(t, y(t)) \in \Omega^0$ pro $t_0 - \epsilon \leq t < t_0$ ($t_0 < t \leq t_0 + \epsilon$). Výstupní bod (vstupní bod) (t_0, y_0) množiny Ω^0 nazveme bodem ostrého výstupu (bodem ostrého vstupu) množiny Ω^0 , jestliže $(t, y(t)) \notin \bar{\Omega}^0$ na intervalu $t_0 < t \leq t_0 + \epsilon$ ($t_0 - \epsilon \leq t < t_0$).*

Nechť $u(t, y)$ je reálná funkce definovaná v Ω a nechť $y(t)$ je řešení systému (4.2.1) vyhovující počáteční podmínce $y(t_0) = y_0$. Jestliže funkce $u(t, y(t))$ je diferencovatelná v bodě $t = t_0$, pak její derivace se nazývá *derivací podél trajektorie $y(t)$* v bodě $(t_0, y(t_0))$ a značí se $\dot{u}(t_0, y(t_0))$. Jestliže $u(t, y)$ má spojitě parciální derivace v Ω , pak její derivace podél trajektorií systému (4.2.1) existují a platí

$$\dot{u}(t, y) = \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} + \text{grad } u \cdot f(t, y),$$

kde „ $\cdot$ ” značí skalární součin a $\text{grad } u = (\frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n})$.

Definice 4.2.2 ([22]) *Otevřenou podmnožinu Ω^0 množiny Ω nazveme (u, v) -podmnožinou množiny Ω vzhledem k systému (4.2.1), jestliže platí:*

- (1) *Existují funkce $u_i(t, y) \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$ a $v_j(t, y) \in C[\Omega, \mathbb{R}]$, $j = 1, \dots, n$, $m + n > 0$ takové, že*

$$\Omega^0 = \{(t, y) \in \Omega : u_i(t, y) < 0, v_j(t, y) < 0 \forall i, j\}.$$

- (2) *$\dot{u}_\alpha(t, y) < 0$ pro derivace funkcí $u_\alpha(t, y)$, $\alpha = 1, \dots, m$ podél trajektorií systému (4.2.1) na množině*

$$U_\alpha = \{(t, y) \in \Omega : u_\alpha(t, y) = 0, u_i(t, y) \leq 0, v_j(t, y) \leq 0, \forall j \text{ a } i \neq \alpha\}.$$

- (3) *$\dot{v}_\beta(t, y) > 0$ pro derivace funkcí $v_\beta(t, y)$, $\beta = 1, \dots, n$ podél trajektorií systému (4.2.1) na množině*

$$V_\beta = \{(t, y) \in \Omega : v_\beta(t, y) = 0, u_i(t, y) \leq 0, v_j(t, y) \leq 0, \forall i \text{ a } j \neq \beta\}.$$

Množinu všech výstupních bodů (bodů ostrého výstupu) budeme značit Ω_e^0 (Ω_{se}^0).

Lemma 4.2.1 ([22]) *Nechť Ω^0 je (u, v) -podmnožinou množiny Ω vzhledem k systému (4.2.1). Pak*

$$\Omega_{se}^0 = \Omega_e^0 = \bigcup_{\alpha=1}^m U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta=1}^n V_\beta.$$

Definice 4.2.3 ([22]) *Nechť $\mathbb{X}$ je topologický prostor a $B \subset \mathbb{X}$.*

Nechť $A \subset B$. Funkci $r \in C(B, A)$ takovou, že $r(a) = a$ pro všechna $a \in A$, nazveme retrakcí množiny B na množinu A v topologickém prostoru $\mathbb{X}$.

Množinu $A \subset B$ nazveme retraktem B v $\mathbb{X}$, jestliže existuje retrakce množiny B na množinu A v topologickém prostoru $\mathbb{X}$.

Věta 4.2.1 (Ważewského věta [22]). *Nechť je množina Ω^0 (u, v) -podmnožinou množiny Ω vzhledem k systému (4.2.1). Nechť je Z neprázdňá kompaktní podmnožina $\Omega^0 \cup \Omega_e^0$ taková, že množina $Z \cap \Omega_e^0$ není retraktem množiny Z , ale je retraktem množiny Ω_e^0 . Pak existuje alespoň jeden bod $(t_0, y_0) \in Z \cap \Omega^0$ takový, že graf řešení $y(t)$ Cauchyho úlohy $y(t_0) = y_0$ pro (4.2.1) leží v množině Ω na svém pravém maximálním intervalu existence.*

Poznámka 4.2.1 *Uvažujme nyní počáteční úlohu*

$$y' = f(t, y), \quad y(0^+) = 0, \quad (4.2.2)$$

kde $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $I = (0, t_0]$, $t_0 > 0$, tj. obecně v bodě $t = 0$ nejsou splněny podmínky existence řešení počáteční úlohy (4.2.2). V tomto případě budeme hovořit o singulární počáteční úloze pro systém obyčejných diferenciálních rovnic a bod $t = 0$ budeme nazývat singulárním bodem systému $y' = f(t, y)$.

5 Singulární počáteční úloha pro jisté třídy skalárních diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic

5.1 Taylorova metoda řešení

Uvažujme singulární počáteční úlohu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (5.1.1)$$

kde $x \in J = (0, 1]$, $f(x, y) \in C(J \times \mathbb{R})$, $g(x) \in C(J)$. V případě, že $f(x, y) = f(y)$, $g(x) \equiv 0$, dostáváme diferenciální rovnici Lane-Emdenova typu, která má velký význam v teorii termionických proudů a stelárních struktur [24], [35]. Existuje řada prací, které jsou věnovány konstrukci řešení počáteční úlohy (5.1.1) pomocí nekonečných řad nebo perturbační techniky. Například Wazwaz [51-53] konstruoval řešení (5.1.1) užitím Adomianovy dekompoziční metody. Russel a Shampine [35] vyšetřovali rovnici (5.1.1) v případě, že $f(x, y) = ky + h(x)$ Iyengar a Jain [27] stanovili numerické algoritmy pro konstrukci řešení počáteční úlohy (5.1.1).

V této kapitole budeme modifikovat pomocí Taylorovy řady algoritmus navržený Wazwazem [52] a zobecněný Hasanem a Zhunem [23] pro řešení diferenciálních rovnic Lane-Emdenova typu. Navržený algoritmus má následující kroky:

- (i) Z rovnice (5.1.1) vypočteme první derivaci, tj.

$$y' = \frac{1}{2} [xg(x)] - \frac{1}{2} [xf(x, y)] - \frac{1}{2} xy''.$$

Obecně k -tá derivaci je pak tvaru

$$y^{(k)} = \frac{1}{k+1} [xg(x)]^{(k-1)} - \frac{1}{k+1} [xf(x, y)]^{(k-1)} - \frac{1}{k+1} xy^{(k+1)},$$

kde $k = 1, 2, \dots$

- (ii) Z počátečních podmínek $y(0) = A$, $y'(0) = B$ vypočteme derivace

$$y''(0), y'''(0), \dots, y^{(k)}(0)$$

- (iii) Sestrojíme Taylorovu řadu se středem v bodě $x = 0$ tj.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^{(k)} + \dots$$

Navržený algoritmus budeme demonstrovat na následujících příkladech.

Příklad 5.1.1 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{2}{x}y' - (4x^2 + 6)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (5.1.2)$$

Jednotlivé derivace jsou tvaru:

$$y' = \frac{1}{2}y(4x^3 + 6x) - \frac{1}{2}xy''$$

$$y'' = \frac{1}{3}[y'(4x^3 + 6x) + y(12x^2 + 6)] - \frac{1}{3}xy'''$$

$$y''' = \frac{1}{4}[y''(4x^3 + 6x) + 2y'(12x^2 + 6) + 24xy] - \frac{1}{4}xy^{(4)}$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{5}[y'''(4x^3 + 6x) + 3y''(12x^2 + 6) + 72y'x + 24y] - \frac{1}{5}xy^{(5)}$$

$$y^{(5)} = \frac{1}{6}[y^{(4)}(4x^3 + 6x) + 4y'''(12x^2 + 6) + 144y''x + 96y'] - \frac{1}{6}xy^{(6)}$$

$$y^{(6)} = \frac{1}{7}[y^{(5)}(4x^3 + 6x) + 5y^{(4)}(12x^2 + 6) + 240y'''x + 240y''] - \frac{1}{7}xy^{(7)}$$

$\vdots$

Z počátečních podmínek $y(0) = 1, y'(0) = 0$ dostáváme

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{(4)} = 12, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 120, \quad \dots$$

Taylorova řada je pak tvaru

$$y(x) = 1 + 2\frac{x^2}{2!} + 12\frac{x^4}{4!} + 120\frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots = e^{x^2}.$$

Řešením (5.1.2) je tedy funkce $y(x) = e^{x^2}$. Je zřejmé, že výše uvedený postup se dá aplikovat i na obecnější singulární počáteční úlohu

$$y'' + \frac{n}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (5.1.3)$$

kde $n \in \mathbb{R}$, pak algoritmus pro k -tou derivaci je tvaru

$$y^{(k)} = \frac{1}{n+k-1} [xg(x)]^{(k-1)} - \frac{1}{n+k-1} [xf(x, y)]^{(k-1)} - \frac{1}{n+k-1} xy^{(k+1)},$$

kde $k = 1, 2, \dots$

5.2 Adomianova metoda řešení

V této kapitole uvažujeme singulární počáteční úlohu pro Lane-Emdenovu rovnici

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(y) = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad 0 < x \leq 1, \quad (5.2.1)$$

$A, B \in \mathbb{R}$, $f(y)$ je spojitá funkce. Řešení bude konstruováno pomocí Adomianovy dekompoziční metody. Existuje řada prací [2], [4], [34], [35], [45-50] věnovaných různým modifikacím Adomianovy dekompoziční metody a perturbačním metodám pro obyčejné i parciální diferenciální rovnice. Mimo to jsou známy i diferenční metody řešení dané úlohy, které jsou detailně popsány v pracích Chawla and Kattiho [25], Iyengara and Jaina [27] a El-Sayed [20].

Náš přístup bude především vycházet z výsledků práce Wazwaze [52], které budeme modifikovat pro počáteční singulární úlohu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (5.2.2)$$

Dle Adomianovy dekompoziční metody vyjádříme rovnici (5.2.2) ve tvaru

$$Ly = -f(x, y) + g(x). \quad (5.2.3)$$

Operátor L definujeme následovně:

$$L := x^{-2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right). \quad (5.2.4)$$

Inverzní operátor L^{-1} je pak tvaru

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^2(\cdot) dx dx. \quad (5.2.5)$$

Aplikací L^{-1} na rovnici (5.2.3) dostáváme

$$y(x) = A + Bx + L^{-1}g(x) - L^{-1}f(x, y). \quad (5.2.6)$$

Řešení $y(x)$ a funkci $f(x, y)$ vyjádříme ve tvaru nekonečných řad

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (5.2.7)$$

kde složky $y_n(x)$ řešení $y(x)$ budou stanoveny pomocí rekurentních rovnic, A_n jsou Adomianovy polynomy, které jsou konstruovány pro různé třídy nelinearit pomocí algoritmů navržených Adomianem [1] a v posledních letech zejména Wazwazem [52], [53]. Dosazením (5.2.7) do (5.2.6) dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = A + Bx + L^{-1}g(x) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (5.2.8)$$

Abychom určili složky řešení $y_n(x)$ použijeme Adomianovy rekurzivní relace, které jsou v našem případě tvaru

$$\begin{aligned} y_0(x) &= A + Bx + L^{-1}g(x), \\ y_1(x) &= -L^1(A_0), \\ y_2(x) &= -L^1(A_1), \\ y_3(x) &= -L^1(A_2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

kde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 (d/du_0) f(u_0) \\ A_2 &= u_2 (d/du_0) f(u_0) + (u_1^2/2!) (d^2/du_0^2) f(u_0) \\ A_3 &= u_3 (d/du_0) f(u_0) + u_1 u_2 (d^2/du_0^2) f(u_0) + (u_1^3/3!) (d^3/du_0^3) f(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Z rovnic (5.2.9), (5.2.10) dostáváme pak složky $y_n(x)$ rekurzivně, n -tá aproximace je pak tvaru

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Z uvedeného postupu vyplývá, že vhodným výběrem operátoru L bude možné řešit i obecnější počáteční singulární úlohy.

Uvedený postup budeme ilustrovat na následujících příkladech:

Příklad 5.2.1 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{2}{x}y' - 10y = 12 - 10x^4, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (5.2.11)$$

Tedy

$$Ly = 12 - 10x^4 + 10y. \quad (5.2.12)$$

Aplikací L^{-1} na rovnici (5.2.12) dostaneme

$$Ly = 2x^2 - \frac{5}{21}x^6 + 10L^{-1}(y). \quad (5.2.13)$$

Rekurzivní rovnice jsou pak tvaru

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 2x^2 - \frac{5}{21}x^6 \\ y_{k+1}(x) &= 10L^{-1}(y_k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

a složky řešení $y(x)$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} y_0 &= 2x^2 - \frac{5}{21}x^6 \\ y_1 &= x^4 - \frac{25x^8}{756} \\ y_2 &= \frac{5x^6}{21} - \frac{25x^{10}}{8316} \\ y_3 &= \frac{25x^8}{756} - \frac{125x^{12}}{648648} \\ y_4 &= \frac{25x^{10}}{8316} - \frac{625x^{14}}{3243240} \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Je zřejmé, že výrazy $-\frac{5}{21}x^6$, $-\frac{25x^8}{756}$ a $-\frac{25x^{10}}{8316}$, které se vyskytují ve složkách y_2 , y_3 , y_4 , jsou opačného znaménka. Odtud plyne, že řešení počáteční singulární úlohy (5.2.11) je tvaru

$$y(x) = 2x^2 + x^4.$$

5.3 Asymptotické rozklady řešení

Existenci a asymptotickému chování řešení singulárních počátečních úloh pro obyčejné a integrodiferenciální rovnice byla věnována řada prací (např. [10-17], [29-31], [36-38]). Jednalo se především o stanovení postačujících podmínek pro existenci řešení v předem dané oblasti homeomorfní kuželu s vrcholem v počátečním bodě.

Jako vhodný aparát pro stanovení asymptotiky řešení se ukázala teorie asymptotických rozkladů řešení. V tomto směru jsou významné zejména výsledky Diblíka [9], který konstruoval asymptotické rozklady řešení pro singulární počáteční problémy nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic vzhledem k obecnému řešení přidružené homogení rovnice. Jeho výsledky lze modifikovat i pro jisté třídy integrodiferenciálních rovnic se separovanými jádry.

Uvažujme následující singulární počáteční úlohu:

$$g(x)y' = y + \int_{0^+}^x \left(\sum_{i+j=1}^N u_{ij}(x)v_{ij}(s)y^i(x)y^j(s) \right) ds, \quad y(0^+) = 0, \quad (5.3.1)$$

kde $u_{ij}(x), v_{ij}(x) \in C(J)$, $J = (0, x_0]$, $x_0 > 0$ je dostatečně malé.

Řešení rovnice (5.3.1) budeme hledat ve tvaru jednoparametrické asymptotické řady

$$y(x, C) = \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x) \varphi^h(x, C), \quad (5.3.2)$$

$f_1(x) \equiv 1$, $f_h(x)$, $h \geq 2$ jsou neznámé funkce, $C \neq 0$ je konstanta, $\varphi(x, C)$ je obecné řešení diferenciální rovnice

$$g(x)y' = y,$$

tedy

$$\varphi(x, C) = C \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dt}{g(t)} \right]$$

Dosazením (5.3.2) do (5.3.1) a porovnáním výrazů u stejných mocnin $\varphi^h(x, C)$, $h \geq 2$ dostáváme systém rekurentních rovnic pro neznámé koeficienty $f_h(x)$, $h \geq 2$. Obecný tvar rovnic má velice komplikovaný tvar (viz.[38]) a pro naše následující úvahy není potřebný.

Pro stanovení asymptotických rozkladů řešení rovnice (5.3.1) nám bude stačit vycházet z výsledků platných pro obyčejné diferenciální rovnice.

Uvažujme následující diferenciální rovnici

$$g(x)y' = qy + p(x). \quad (5.3.3)$$

Diblík [2] stanovil asymptotické odhady řešení rovnice (5.3.3), což můžeme zformulovat následovně:

Věta 5.3.1 *Uvažujme následující podmínky:*

I) *Nechť q je konstanta, $q < 0$, $g(x) \in C^1(J)$, $g(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$, $g'(x) \sim \psi_1(x)g^{\lambda_1}(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $\lambda_1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi_1(x)g^{\tau}(x) = 0$, τ je libovolné kladné číslo.*

II) *$p(x) \in C(J)$, $p(x) = b_0(x)g^{\lambda}(x) + O(b_1(x)g^{\lambda+\epsilon}(x))$, $\epsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} b_i(x)g'(x) = 0$, $i = 0, 1$, $b_0(x) \in C(J)$, $b_0(x) \neq 0$, $b'_0(x) \sim \psi_2(x)g^{\lambda_2}(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $\lambda_2 + 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi_2(x)g^{\tau}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g^{\tau}(x)(b_0(x))^{-1} = 0$.*

Pak rovnice (5.3.3) má jediné řešení na intervalu J , které lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \frac{-1}{q} b_0(x) g^{\lambda}(x) + O(g^{\nu}(x)), \quad y'(x) = O(g^{\nu-1}(x)), \quad (5.3.4)$$

kde $\nu \in (\lambda, \lambda + \min\{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \epsilon\})$.

Nyní ukážeme, že výsledky Věty 6.3.1 lze aplikovat i na integrodiferenciální rovnice tvaru (5.3.1).

Postup ukážeme na následující integrodiferenciální rovnici

$$x^3 y' = y + \int_{0+}^x x y^2(s) y(s) ds. \quad (5.3.5)$$

V tomto případě $i = 2$, $j = 1$, $u_{21}(x) = x$, $v_{21}(s) = 1$, $\varphi(x, C) = C \exp\left(\frac{1}{2x_0^2} - \frac{1}{2x^2}\right)$. Demonstrujeme konstrukci asymptotického rozkladu řešení (5.3.5) do třetího řádu včetně. Pak

$$y = \varphi(x, C) + f_2(x)\varphi^2(x, C) + f_3(x)\varphi^3(x, C). \quad (5.3.6)$$

$$y' = \frac{\varphi(x, C)}{g(x)} + \varphi^2(x, C) \left(f_2'(x) + 2 \frac{f_2(x)}{g(x)} \right) + \varphi^3(x, C) \left(f_3'(x) + 3 \frac{f_3(x)}{g(x)} \right). \quad (5.3.7)$$

$$y^2(x) y(s) = \varphi^2(x, C) \varphi(s, C). \quad (5.3.8)$$

Dosaďme (5.3.6), (5.3.7), (5.3.8) do rovnice (5.3.5), dostáváme pak

$$\begin{aligned} \varphi + (x^3 f_2' + 2f_2)\varphi^2 + (x^3 f_3' + 3f_3)\varphi^3 \\ = \varphi + f_2\varphi^2 + f_3\varphi^3 + \int_{0+}^x x \varphi^2(x, C) \varphi(s, C) ds. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin φ dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi^1 &: 1 = 1 \\ \varphi^2 &: x^3 f_2' + 2f_2 = f_2 \\ \varphi^3 &: x^3 f_2' + 3f_3 = f_3 + \varphi^{-3}(x, C) \int_{0+}^x x \varphi^2(x, C) \varphi(s, C) ds. \end{aligned}$$

Pro neznámé koeficienty $f_2(x)$, $f_3(x)$ získáme následující rovnice:

$$x^3 f_2' = -f_2. \quad (5.3.9)$$

$$x^3 f_3' = -2f_3 + x \varphi^{-1}(x, C) \int_{0+}^x \varphi(s, C) ds. \quad (5.3.10)$$

Z (5.3.9) plyne, že $f_2(x) = [\varphi(x, C)]^{-1}$. Položme

$$u = \varphi^{-1}(x, C) \int_{0+}^x \varphi(s, C) ds. \quad (5.3.11)$$

Derivováním (5.3.11) dostáváme diferenciální rovnici

$$x^3 u' = -u + x^3. \quad (5.3.12)$$

která je tvaru (5.3.3). Nyní ověříme předpoklady Věty 6.3.1. Je zřejmé, že

$$g(x) = x^3, \quad q = -1, \quad p(x) = x^3,$$

tedy

$$g'(x) = 3x^2 \sim \psi_1(x)g^{\lambda_1}(x) = 3(x^3)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3}, \psi_1(x) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi_1(x)g^\tau(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3(x^3)^\tau = 0,$$

kde τ je libovolná kladná konstanta. Ověříme předpoklad II)

$$p(x) = b_0(x)g^\lambda(x) + 0(b_1(x)g^{\lambda+\epsilon}).$$

V našem případě platí $x^3 = 1(x^3)^1 \Rightarrow b_0(x) = 1, \lambda = 1, b_1(x) = 0$. Zvolme $\epsilon > \frac{2}{3}$. Jelikož $b'_0(x) = 0$, pak $\psi_2(x) = 0$. Zvolme konstantu $\lambda_2 + 1 > \frac{2}{3}$.

Odtud $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi_2(x)g^\tau(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g^\tau(x)(b_0(x))^{-1} = 0$, $\nu \in (1, 1 + \min\{2/3, \lambda_2 + 1, \epsilon\})$.

Tedy $\nu \in (1, \frac{5}{3})$ a řešení diferenciální rovnice (5.3.12) má asymptotický tvar

$$u = x^3 + 0(x^{3\nu}), \quad \nu \in (1, \frac{5}{3}).$$

Nyní rovnice (5.3.10) je tvaru

$$x^3 f'_3 = -2f_3 + x^4 + O(x^{3\nu+1}), \quad \nu \in (1, \frac{5}{3}). \quad (5.3.13)$$

Aplikací Věty 6.3.1 na rovnici (5.3.13) dostáváme $\lambda_1 = 2/3$, $p(x) = x^4 + O(x^{3\nu+1})$. Odtud

$b_0(x) = 1$, $\lambda = \frac{4}{3}$, $b_1(x) = 1$. Položme $\epsilon = \nu - 1$, $\psi_2(x) = 0$. Zvolme $\lambda_2 + 1 > \frac{2}{3}$, pak $\nu_1 \in (\frac{4}{3}, 2)$ a řešení rovnice (5.3.13) má asymptotický tvar

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^4 + O(x^{3\nu_1}).$$

Dostáváme tedy, že asymptotický rozklad řešení $y(x)$ rovnice (5.3.5) je tvaru

$$\begin{aligned} y(x, C) &\approx f_1(x)\varphi(x, C) + f_2(x)\varphi^2(x, C) + f_3(x)\varphi^3(x, C) \\ &= 2\varphi(x, C) + \left(\frac{1}{2}x^4 + O(x^{3\nu_1})\right)\varphi^3(x, C). \end{aligned}$$

5.4 Asymptotické odhady řešení

Obecnější singulární počáteční úlohy pro diferenciální a integrodiferenciální rovnice rozřešených (a nebo nerozřešených) vzhledem k derivaci neznámé funkce byly studovány v pracích [3], [19], [55], [56]. Je však potřeba zdůraznit, že velice malá pozornost byla věnována asymptotickým vlastnostem řešení.

V této kapitole se především soustředíme na asymptotické odhady řešení pro jisté třídy integrodiferenciálních rovnic a to vzhledem k obecnému řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice. Metody vyšetřování budou založeny na kombinaci Ważewského topologické metody a Schauderovy věty o pevném bodu.

Uvažujme následující počáteční singulární úlohu

$$g(t)y'(t) = ay(t) \left[1 + f \left(t, y(t), \int_{0^+}^t K(t, s, y(s))ds \right) \right], \quad (5.4.1)$$

$$y(0^+) = 0,$$

kde $f \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K \in C(J \times J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $J = (0, t_0]$, $t_0 > 0$.

Předpokládejme, že funkce g , f , K splňují následující podmínky:

- (i) $a > 0$ je konstanta, $g(t) \in C^1(J)$, $g(t) > 0$, $g(0^+) = 0$, $g'(t) \sim \psi(t)g^\lambda(t)$ pro $t \rightarrow 0^+$, $\lambda > 0$, $\psi(t)g^\tau(t) = o(1)$ pro $t \rightarrow 0^+$ pro každé $\tau > 0$, $\psi \in C(J, \mathbb{R}^+)$.
- (ii) $|f(t, u, v)| \leq |u| + |v|$, $|\int_{0^+}^t K(t, s, y(t), y(s))ds| \leq r(t)|y|$, $0 < r(t) \in C(J)$, $r(t) = \phi(t, C)o(1)$ pro $t \rightarrow 0^+$, kde $\phi(t, C) = C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{a}{g(s)} ds \right)$ je obecné řešení rovnice $g(t)y'(t) = ay(t)$.

Věta 5.4.1 Předpokládejme, že podmínky (i), (ii) platí pro každé $C \neq 0$, pak existuje řešení $y(t, C)$ počáteční problému (5.4.1) takové, že

$$|y^{(i)}(t, C) - \phi^{(i)}(t, C)| \leq \delta (\phi^2(t, C))^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad (5.4.2)$$

pro $t \in (0, t^\Delta]$, kde $0 < t^\Delta \leq t_0$, $\delta > 1$ je konstanta a t^Δ závisí na δ , C .

6 Systémy integrodiferenciálních rovnic

6.1 Singulární počáteční úloha pro Volterrový a Fredholmův integrodiferenciální rovnice

Problém vyšetřování Fredholmových rovnic spočívá v tom, že nevystačíme s Lipschitzovými konstantami jako v případě Volterrových rovnic. Je proto nutné zavést jisté váhové normy exponenciálního charakteru a modifikovat Lipschitzovy podmínky, což je například ukázáno v pracích [43], [44]. Důkazy všech výsledků v následujících větách a to i v případě implicitních systémů jsou založeny na aplikaci Banachovy věty o pevném bodě. V této kapitole rozšíříme výsledky prací [43], [44] na jistou třídu smíšených Fredholm-Volterrových integrodiferenciálních rovnic závislých na parametru.

Uvažujme singulární počáteční úlohu:

$$y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), \int_{0^+}^t K_1(t, s, y(t), y(s))ds, \int_{0^+}^1 K_2(t, s, y(t), y(s))ds, \mu \right),$$

(6.1.1)

$$y(0^+, \mu) = 0,$$

Předpokládejme, že platí následující podmínky:

- (I) $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \in C^0(\Omega)$,
 $\Omega = \{(t, u_1, u_2, u_3, \mu) \in J \times (\mathbb{R}^n)^3 \times \mathbb{R} : |u_1| \leq \phi(t), |u_2| \leq \psi(t), |u_3| \leq \psi(t)\}$,
 $J = (0, 1]$, $0 < \phi(t) \in C^0(J)$, $\phi(0^+) = 0$, $0 < \psi(t) \in C^0(J)$, $|\cdot|$ značí obvyklou normu v $\mathbb{R}^n$,
 $|\mathcal{F}(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu) - \mathcal{F}(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu)| \leq \sum_{i=1}^3 M_i |\bar{u}_i - \bar{u}_i|$
 pro všechna $(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu), (t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu) \in \Omega$, $M_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.
- (II) $K_j : \Omega^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K_j \in C^0(\Omega_1)$, $\Omega_1 = \{(t, s, w, v) \in J \times J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |w| \leq \phi(t), |v| \leq \phi(t)\}$, $|K_1(t, s, \bar{w}, \bar{v}) - K_1(t, s, \bar{w}, \bar{v})| \leq [N_1 |\bar{w} - \bar{w}| + N_2 |\bar{v} - \bar{v}|]$,
 $|K_2(t, s, \bar{w}, \bar{v}) - K_2(t, s, \bar{w}, \bar{v})| \leq [N_3 e^{\lambda(s-t)} |\bar{w} - \bar{w}| + N_4 e^{\lambda(t-s)} |\bar{v} - \bar{v}|]$
 pro všechna $(t, s, \bar{w}, \bar{v}), (t, s, \bar{w}, \bar{v}) \in \Omega_1$, $N_j \geq 0$, $j = 1, 2$. $\lambda > 0$ je dostatečně malá konstanta, taková, že

$$\left(\frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} \right) < 1.$$

Nyní můžeme zformulovat základní výsledek týkající se existence a jednoznačnosti řešení dané počáteční úlohy:

Věta 6.1.1 *Nechť funkce $\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu)$, $K_j(t, s, w, v)$, $j = 1, 2$ splňují podmínky (I), (II) a navíc*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^3 g_i(t) |u_i|, \quad 0 < g_i(t) \in C^0(J), \quad \int_{0^+}^t g_1(s) \phi(s) ds \leq \alpha \phi(t),$$

$$\int_{0^+}^t (g_2(s) + g_3(s)) \psi(s) ds \leq \beta \phi(t), \quad \alpha + \beta \leq 1,$$

pak počáteční úloha (6.1.1) má jediné řešení $y(t, \mu)$ pro každé $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in J$.

Věta 6.1.2 *Nechť platí předpoklady Věty 7.1.1 a nechť existuje konstanta $L > 0$ a integrovatelná funkce $\gamma : J_0 \rightarrow J_0$, taková, že*

$$|\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_2) - \mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1)| \leq \gamma(t) |\mu_2 - \mu_1|,$$

kde $(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1), (t, u_1, u_2, u_3, \mu_2) \in \Omega$ a

$$\max_{t \in J_0} \left\{ e^{-\lambda t} \int_{0^+}^t \gamma(s) ds \right\} \leq L,$$

pak řešení $y(t, \mu)$ počáteční úlohy (6.1.1) je spojitě vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in J \times \mathbb{R}$.

6.2 Singulární počáteční úloha pro implicitní Volterrovy a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice

V této kapitole se nejdříve soustředíme na vyšetřování implicitních Volterrových integrodiferenciálních rovnic, které nepředpokládají modifikace Lipschitzových podmínek.

Uvažujme následující singulární počáteční úlohu:

$$y'(t) = F\left(t, y(t), \int_{0^+}^t K(t, s, y(s), y'(s)) ds, \mu\right), \quad y^{(i)}(0^+, \mu) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (6.2.1)$$

Předpokládejme:

- (i) $F : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C(\Omega^*)$, $\Omega^* = \{(t, u_1, u_2, \mu) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |u_1| \leq \phi_1(t), |u_2| \leq \psi_1(t)\}$, $I = (0, t_1]$, $t_1 > 0$, $0 < \phi_1(t) \in C(I)$, $\phi_1(0^+) = 0$, $0 < \psi_1(t) \in C(I)$, $|\cdot|$ značí obvyklou normu v $\mathbb{R}^n$.
 $|F(t, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \mu) - F(t, \overline{\overline{u}}_1, \overline{\overline{u}}_2, \mu)| \leq \sum_{i=1}^2 l_i |\overline{u}_i - \overline{\overline{u}}_i|$ pro všechna $(t, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \mu)$,
 $(t, \overline{\overline{u}}_1, \overline{\overline{u}}_2, \mu) \in \Omega^*$, $l_i > 0$, $i = 1, 2$.
- (ii) $K : \Omega_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \in C^0(\Omega_0^1)$, $\Omega_0^1 = \{(t, s, \nu_1, \nu_2) \in I \times I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |\nu_1| \leq \phi_1(t), |\nu_2| \leq \psi_1(t)\}$
 $|K(t, s, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) - K(t, s, \overline{\overline{\nu}}_1, \overline{\overline{\nu}}_2)| \leq \sum_{j=1}^2 m_j |\overline{\nu}_j - \overline{\overline{\nu}}_j|$ pro všechna $(t, s, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2)$,
 $(t, s, \overline{\overline{\nu}}_1, \overline{\overline{\nu}}_2) \in \Omega_0^1$, $m_j > 0$, $j = 1, 2$.

Věta 6.2.1 *Nechť funkce $F(t, u_1, u_2, \mu)$, $K(t, s, \nu_1, \nu_2)$ splňují podmínky (i), (ii) a navíc*

$$|F| \leq \sum_{i=1}^2 c_i(t) |u_i|, \quad 0 < c_i(t) \in C(I), \quad i = 1, 2,$$

$$c_1(t) \int_{0^+}^t \phi_1(s) ds \leq \alpha_1 \phi_1(t), \quad c_2(t) \psi_1(t) \leq \beta_1 \phi_1(t),$$

kde α_1, β_1 jsou kladná čísla taková, že $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Pak počáteční úloha (6.2.1) má jediné řešení $y(t, \mu)$ pro každé $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in I$.

Věta 6.2.2 *Nechť platí předpoklady Věty 7.2.1 a nechť existuje konstanta $k > 0$ a integrovatelná funkce $\epsilon : I_0 \rightarrow I_0$, $I_0 = [0, t_1]$ taková, že*

$$|F(t, u_1, u_2, \mu_2) - F(t, u_1, u_2, \mu_1)| \leq \epsilon(t) |\mu_2 - \mu_1|,$$

kde $(t, u_1, u_2, \mu_2), (t, u_1, u_2, \mu_1) \in \Omega^*$ a navíc

$$\max_{t \in J_0} \{e^{-\lambda t} \epsilon(t)\} \leq k.$$

Pak řešení $y(t, \mu)$ systému (6.2.1) je spojitě vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in I \times \mathbb{R}$.

Uvažujme nyní singulární počáteční úlohu pro implicitní systém Fredholmových integrodiferenciálních rovnic

$$y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), y'(t), \int_{0+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s)) ds, \mu \right), \quad (6.2.2)$$

$$y^{(i)}(0^+, \mu) = 0, \quad i = 0, 1,$$

kde

(α_1) $\mathcal{F} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \in C(\omega)$, $\omega = \{(t, u_1, u_2, u_3, \mu) \in I_1 \times (\mathbb{R}^n)^3 \times \mathbb{R} : |u_1| \leq \varphi_1(t), |u_2| \leq \varphi_2(t), |u_3(t)| \leq \psi^*(t)\}$, $I_1 = (0, t_2]$, $t_2 > 0$, $0 < \varphi_i(t) \in C(I_1)$, $\varphi_i(0^+) = 0$, $i = 1, 2$, $0 < \psi^*(t) \in C(I_1)$, $\int_{0+}^t \varphi_2(s) ds \leq \varphi_1(t)$, $|\cdot|$ je obvyklá norma v $\mathbb{R}^n$,
 $|\mathcal{F}(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu) - \mathcal{F}(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu)| \leq \sum_{i=1}^3 p_i |\bar{u}_i - \bar{u}_i|$
 pro všechna $(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu)$, $(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu) \in \omega$, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

(α_2) $K : \omega^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \in C(\omega^1)$,
 $\omega^1 = \{(t, s, v_1, v_2, w_1, w_2) \in I_1 \times I_1 \times (\mathbb{R}^n)^4 : |v_1| \leq \varphi_1(t), |v_2| \leq \varphi_1(t), |w_1| \leq \varphi_2(t), |w_2| \leq \varphi_2(t)\}$,
 $|K(t, s, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2) - K(t, s, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2)|$
 $\leq \sum_{j=1}^2 q_j |\bar{v}_j - \bar{v}_j| + q_3 t e^{-\lambda s} |\bar{w}_1 - \bar{w}_1| + q_4 e^{\lambda(t-2s)} |\bar{w}_2 - \bar{w}_2|$
 pro všechna $(t, s, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2)$, $(t, s, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2) \in \omega^1$, $p_i, q_j \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$, $p_2 < 1$, $\lambda > 0$ je dostatečně velká konstanta taková, že
 $\left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} < 1. \right)$

Věta 6.2.3 *Nechť funkce $\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu)$, $K(t, s, v_1, v_2, w_1, w_2)$ splňuje podmínky (α_1), (α_2) a navíc nechť platí*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^3 z_i(t) |u_i|, \quad 0 < z_i(t) \in C(I_1), \quad i = 1, 2, 3, \quad \int_{0+}^t z_1(t) \varphi_2(s) ds \leq \gamma_1 \varphi_2(t),$$

$$z_2(t) \varphi_2(t) \leq \gamma_2 \varphi_2(t) \quad z_3(t) \psi^*(t) \leq \gamma_3 \varphi_2(t), \quad \gamma_i \in \mathbb{R}^+, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1,$$

pak počáteční úloha (6.2.2) má jediné řešení $y(t, \mu)$ pro každé $\mu \in R$, $t \in I_1$.

Věta 6.2.4 *Nechť platí předpoklady Věty 7.2.3 a nechť existuje konstanta $r > 0$ a integrovatelná funkce $\kappa : I_1^0 \rightarrow I_1^0$, $I_1^0 = [0, t_2]$, přičemž*

$$|\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_2) - \mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1)| \leq \kappa(t) |\mu_2 - \mu_1|,$$

kde $(t, u_1, u_2, u_3, \mu_2)$, $(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1) \in \omega$,

$$\max_{t \in J_0} \{e^{-\lambda t} \kappa(t)\} \leq r.$$

Pak řešení $y(t, \mu)$ (6.2.2) je spojitě vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in I_1 \times \mathbb{R}$.

Uvažujme nyní speciální tvar systému (6.2.2)

$$p_i(t)y'_i - y_i = \mathcal{F}_i \left(t, y(t), y'(t), \int_{0^+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s)) ds, \mu \right), \quad (6.2.3)$$

$$y^{(j)}(0^+, \mu) = 0, \quad j = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Chování řešení (6.2.3) budeme charakterizovat pomocí řešení přidruženého systému diferenciálních rovnic

$$p_i(t)y'_i - y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2.4)$$

Položme

$$\eta_i(t, C_i) = C_i \exp \left(\int_1^t \frac{ds}{p_i(s)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2.5)$$

Je zřejmé, že funkce (6.2.5) jsou obecná řešení systému (6.2.4). Označme

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n), \quad Y_i(t, \mu) = \frac{y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i)}{\eta_i(t, C_i)}, \quad G = (G_1, \dots, G_n),$$

$$\begin{aligned} & G_i \left(t, y(t), y'(t), \int_{0^+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s)) ds, \mu \right) \\ &= (p_i(t)\eta_i(t, C_i))^{-1} \mathcal{F}_i \left(t, y(t), y'(t), \int_{0^+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s)) ds, \mu \right) \\ & \eta(t)(1 + Y(t)) = (\eta_1(t, C_1)(1 + Y_1(t, \mu)), \dots, \eta_n(t, C_n)(1 + Y_n(t, \mu))). \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} Y'_i &= \frac{(y'_i(t, \mu) - \frac{\eta_i(t, C_i)}{p_i(t)})\eta_i(t, C_i) - (y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i))\frac{\eta_i(t, C_i)}{p_i(t)}}{\eta_i(t, C_i)^2} = \\ &= \frac{p_i(t)y'_i(t, \mu) - y_i(t, \mu)}{p_i(t)\eta_i(t, C_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Nyní můžeme systém (6.2.3) vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} Y'_i &= G_i \left(t, \eta(t)(1 + Y(t)), (\eta(t)(1 + Y(t)))', \int_{0^+}^1 K(t, s, \eta(t)(1 + Y(t)), \eta(s)(1 + Y(s)), \right. \\ & \quad \left. (\eta(t)(1 + Y(t)))', (\eta(s)(1 + Y(s)))' ds, \mu \right). \end{aligned}$$

Označme

$$\mathcal{G}_i \left(t, Y(t), Y'(t), \int_{0^+}^1 \mathcal{K}(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s)) ds, \mu \right)$$

$$= G_i \left(t, \eta(t)(1+Y(t)), (\eta(t)(1+Y(t)))', \int_{0+}^1 K(t, s, \eta(t)(1+Y(t)), \eta(s)(1+Y(s)), (\eta(t)(1+Y(t)))', (\eta(s)(1+Y(s)))') ds, \mu \right).$$

Tedy

$$Y_i' = \mathcal{G}_i \left(t, Y(t), Y'(t), \int_{0+}^1 \mathcal{K}(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s)) ds, \mu \right). \quad (6.2.6)$$

Předpokládejme, že platí následující podmínky:

- (I*) $\mathcal{G} \in C(\hat{\Omega})$,
 $\hat{\Omega} = \{(t, Y, Y', u, \mu) \in I_1 \times (R^n)^3 \times R : |Y| \leq \varphi_1(t), |Y'| \leq \varphi_2(t), |u| \leq \psi^*(t)\}$,
 $|\mathcal{G}(t, \bar{Y}, \bar{Y}', \bar{u}, \mu) - \mathcal{G}(t, \bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Y}}', \bar{\bar{u}}, \mu)| \leq p_1 |\bar{Y} - \bar{\bar{Y}}| + p_2 |\bar{Y}' - \bar{\bar{Y}}'| + p_3 |\bar{u} - \bar{\bar{u}}|$
 pro všechna $(t, \bar{Y}, \bar{Y}', \bar{u}, \mu), (t, \bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Y}}', \bar{\bar{u}}, \mu) \in \hat{\Omega}$.
- (II*) $\mathcal{K} \in C(\hat{\Omega}_1)$, $\hat{\Omega}_1 = \{(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s)) \in I_1 \times I_1 \times (R^n)^4 : |Y(t)| \leq \varphi_1(t), |Y(s)| \leq \varphi_1(t), |Y'(t)| \leq \varphi_2(t), |Y'(s)| \leq \varphi_2(t)\}$,
 $|\mathcal{K}(t, s, \bar{Y}(t), \bar{Y}(s), \bar{Y}'(t), \bar{Y}'(s)) - \mathcal{K}(t, s, \bar{\bar{Y}}(t), \bar{\bar{Y}}(s), \bar{\bar{Y}}'(t), \bar{\bar{Y}}'(s))| \leq$
 $\leq q_1 |\bar{Y}(t) - \bar{\bar{Y}}(t)| + q_2 |\bar{Y}(s) - \bar{\bar{Y}}(s)|$
 $+ q_3 t e^{-\lambda s} |\bar{Y}'(t) - \bar{\bar{Y}}'(t)| + q_4 e^{\lambda(t-2s)} |\bar{Y}'(s) - \bar{\bar{Y}}'(s)|$
 pro všechna $(t, s, \bar{Y}(t), \bar{Y}(s), \bar{Y}'(t), \bar{Y}'(s)),$
 $(t, s, \bar{\bar{Y}}(t), \bar{\bar{Y}}(s), \bar{\bar{Y}}'(t), \bar{\bar{Y}}'(s)) \in \hat{\Omega}_1$.

Nechť funkce $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, $\psi^*(t)$ a konstanty p_i, q_j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$ splňují stejné podmínky jako ve Větě 7.2.3.

Věta 6.2.5 *Nechť funkce $\mathcal{G}(t, Y(t)Y'(t), \mu)$, $\mathcal{K}(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s))$ splňují podmínky (I*), (II*) a nechť*

$$|\mathcal{G}| \leq z_1(t)|Y| + z_2(t)|Y'| + z_3(t)|u|, \quad 0 < z_i(t) \in C(I_1), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\int_{0+}^t z_1(t)\varphi_2(s)ds \leq \gamma_1\varphi_2(t), \quad z_2(t)\varphi_2(t) \leq \gamma_2\varphi_2(t) \quad z_3(t)\psi^*(t) \leq \gamma_3\varphi_2(t),$$

$$\gamma_i \in \mathbb{R}^+, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1, \quad 0 < p_i(t) \in C(I_1), \quad \int_{0+}^1 \frac{dt}{p_i(t)} = \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak existuje jediné řešení $y(t, \mu) = (y_1(t, \mu), \dots, y_n(t, \mu))$ systému (6.2.3) splňující nerovnosti

$$|y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i)| \leq \varphi_1(t)|\eta_i(t, C_i)|,$$

$$|y_i'(t, \mu) - \eta_i'(t, C_i)| \leq \varphi_1(t)|\eta_i'(t, C_i)| + \varphi_2(t)|\eta_i(t, C_i)|$$

na intervalu I_1 , $i = 1, \dots, n$.

7 Závěr

Práce obsahuje nové výsledky o existenci, jednoznačnosti a asymptotickém chování řešení singulární počáteční úlohy pro jisté třídy obyčejných diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic v oblatech, které jsou homeomorfní kuželu s vrcholem v počátečním bodě.

Singulární počáteční úlohy jsou výsledkem matematických modelů některých technických i přírodních jevů. Nacházejí uplatnění například v teorii regulace, teorii elektrických obvodů a terminionických proudů, v mechanice kapalin a v poslední době i v biologii. V mnoha případech mají tyto počáteční úlohy komplikovaný tvar, proto je přirozená snaha používat k jejich vyšetřování asymptotických metod. V případě skalárních diferenciálních rovnic a integrodiferenciálních rovnic nacházejí uplatnění modifikace dekompozičních metod a v poslední době zejména perturbálních homotopických metod.

Výsledky práce ukazují, že lze očekávat, že uvedenými metodami bude možné studovat i obecnější systémy funkcionálních diferenciálních rovnic zejména zlomkové diferenciální rovnice. Některé výsledky ohledně modifikace Adomianovy dekompoziční metody pro zlomkové diferenciální rovnice ve smyslu Caputovy derivace byly již publikovány v práci [4]. Z hlediska aplikací zlomkových funkcionálních rovnic v teorii optimální regulace a v silnoprůdné elektrotechnice je tento směr vyšetřování kvalitativních vlastností zlomkových funkcionálních rovnic aktuální a bude námětem pro další studium.

8 Seznam literatury

Reference

- [1] ADOMIAN, G., *A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation*, Math. Comput. Modelling, 13(7), 1990, 17-43.
- [2] ADOMIAN G. *Solving frontier problem of physics: the decomposition method*, Kluwer Academic Press, 1994.
- [3] AGARWAL R.P., O'REGAN D., ZERNOV A.E. *A singular initial value problem for some functional differential equations*, J. Appl. Math. Stochastic Anal., 3, 2005, 261-270.
- [4] ARCHALOUSOVÁ O., ŠMARDÁ Z. *Adomian decomposition method for fractional differential equations*, In Proceedings of XXIXth International Colloquium on Education Process, Brno 2011, 1-6 (přijato do tisku).
- [5] BAJZAKOV A.B. *Asymptotic and analytic structure of solutions of certain nonlinear integral equation with irregular singular point*, Inst. matematiki AN BSSR, 24, 1983, 181-189 (in Russian).
- [6] BAŠTINEC J., DIBLÍK J. *On existence of solutions of a singular Cauchy-Nicoletti problem for a system of integrodifferential equations*, Demonstr. Math., 30, 1997, 747-760.
- [7] BAŠTINEC J., DIBLÍK J. *Three-point singular boundary-value problem for a system of three differential equations*, Mathematical Communications, 3, 1998, 211-219. ISSN 1331-0623.
- [8] ČEČIK V.A. *Investigation of systems of ordinary differential equations with a singularity*, Trudy Mosk. mat. obščestva, 8, 1959, 155-198, (in Russian).
- [9] DIBLÍK J. *Asymptotic behavior of solutions of certain differential equation partially solvable with respect to derivative*, Sibirskij mat. žurnal, 23, 1982, 80-91 (in Russian).
- [10] DIBLÍK J. *Asymptotic behavior of solutions of a differential equation partially solved with respect to the derivative*, Sib. Math. J., 23(5), 1982, 654-662 (in Russian).
- [11] DIBLÍK J. *Sufficient conditions of existence of bundles O-curves of the singular differential equations of the first order*, Diff. uravnenija, 21, 1985, 898-899 (in Russian).
- [12] DIBLÍK J. *On existence of O-curves of certain system of differential equations*, Math. nachr., 122, 1985, 247-258 (in Russian).

- [13] DIBLÍK J. *On existence of solutions of singular Cauchy problem for system of differential equations nonsolvable to a derivation*, Publ. Inst. Math., 37(51), 1985, 73-80.
- [14] DIBLÍK J. *Existence of solutions of a real system of ordinary differential equations, starting at a singular point*, Ukr. Math. J., 38(6), 1986, 588-592 (in Russian).
- [15] DIBLÍK J. *The singular Cauchy-Nicoletti problem for system of two ordinary differential equations*, Math. Bohem., 1, 1992, 55-67.
- [16] DIBLÍK J., RŮŽIČKOVÁ M. *Existence of positive solutions of a singular initial problem for a nonlinear system of differential equations*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 34, 2004, 923-944.
- [17] DIBLÍK J., RŮŽIČKOVÁ M. *Inequalities for solutions of singular initial problems for Carathéodory systems via Ważewski's principle*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 69(12), 2008, 657-656.
- [18] DIBLÍK J., NOWAK C. *A nonuniqueness criterion for a singular system of two ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis, 64, 2006, 637-656. ISSN 0362-546X.
- [19] DYSHKO A., KONYUCHOVA N., SUKOV A. *Singular problem for a third-order nonlinear ordinary differential equation arising in fluid dynamics*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 47(7), 2007, 1108-1128. ISSN 0041-5553.
- [20] EL-SAYED, S.M., *Multi-integral methods for nonlinear boundary-value problems, A fourth order method for a singular two points boundary value problem*, J. Comput. Math., 71, 1999, 259-269.
- [21] FEDOROV V.D. *Analogy of Wazewski's topological method for integrodifferential equations*, Issled. po integr.-diff. uravn., Frunze, 1961, 111-132 (in Russian).
- [22] HARTMAN Ph. *Ordinary differential equations*, New York, London, Sydney, 1964.
- [23] HASAN Y.Q., ZHU L.M. *Solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations*, Journal of Applied Sciences 7, 17, 2007, 2505-2508. ISSN 0973-0176.
- [24] CHANDRASEKAR, S., *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York, 1967.
- [25] CHAWLA, M.M., KATTI, C.P., *A finite-difference method for a class of singular boundary-value problem*, IMA, J. Numer. Anal. 4, 1984, 457-467.
- [26] IMANALIEV M. *Oscillation and stability of solutions of singular-perturbed integrodifferential equations*, Frunze, 1974.

- [27] IYENGAR S.R.K., JAIN P. *Spline difference method for a singular two-point boundary value problems*, Num. Math., 50, 1987, 363-376.
- [28] IZÉ A.F., CARVALHO L.A.V. *Extension of Wazewski's topological method to integrodifferential equations*, Anais da Academia Brasileira de Ciencias, 47, 1975, 177-181.
- [29] KIGURADZE I.T. *Cauchy problem for singular systems of ordinary differential equations*, Diff. uravnenija, 10, 1965, 1271-1291 (in Russian).
- [30] KIGURADZE I.T. *Some singular boundary problems for ordinary differential equations*, Tbilisi, 1975 (in Russian).
- [31] KONJUCHOVA N.B. *Singular Cauchy problems for systems of ordinary differential equations*, Žurnal vyč. mat. i fiziki, 5, 1981, 629-645 (in Russian).
- [32] LEFSCHETZ S. *Geometric theory of differential equations*, Moskva, 1961, 110-121 (in Russian).
- [33] PROSENJUK L.G., JACENKO L.A. *On behavior of solutions of certain real differential equations of the second order unsolvable with respect derivative*, Ukr. mat. žurnal, 4, 1983, 519-524 (in Russian).
- [34] RACH R. *On the Adomian decomposition method and comparison with Picard method*, J.Math. Anal. Appl., 128, 1987, 480-483.
- [35] RUSSELL R.D., SHAMPINE L.F. *Numerical method for singular boundary value problem*, SIAM J. Num. Anal., 12, 1975, 13-36. ISSN 0036-1429.
- [36] ŠMARDA Z. *The existence and asymptotic behavior of solutions of certain class of the integrodifferential equations partially solvable with respect to derivative*, Demonstratio Mathematica, 22(2), 1989, 208-214. ISSN 0420-1213.
- [37] ŠMARDA Z. *The asymptotic behaviour of solutions of the singular integrodifferential equation*, Demonstratio Mathematica, 22(2), 1989, 293-307.
- [38] ŠMARDA Z. *The existence and asymptotic behavior of solutions of certain class of the integrodifferential equations*, Archivum Mathematicum, 26, 1990, 7-18. ISSN 0044-8753.
- [39] ŠMARDA Z. *On the uniqueness of solution of the singular problem for certain class of integrodifferential equations*, Demonstratio Mathematica, 25(4), 1992, 835-841.
- [40] ŠMARDA Z. *On solutions of an implicit singular system of integrodifferential equations depending on a parameter*, Demonstratio Mathematica, 31(1), 1998, 125-130.
- [41] ŠMARDA Z. *On an initial value problem for singular integrodifferential equations*, Demonstratio Mathematica, 35(4), 2002, 803-811. ISSN 0420-1213.

- [42] ŠMARDA Z. *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear integrodifferential equations*, Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 1(2), 2005, 73-77. ISSN 1336-9180.
- [43] ŠMARDA Z. *On singular initial value problem for nonlinear Fredholm integrodifferential equations*, Fasciculi Mathematici, 1(37), 2006, 77-83. ISSN 00444413.
- [44] ŠMARDA Z. *Implicit singular integrodifferential equations of Fredholm type*, Tatra Mt. Math. Publ., 38, 2007, 255-263.
- [45] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Asymptotic expansions of solutions of certain classes of nonlinear singular integrodifferential equations*, In Seventh International Conference on Soft Computing Applied in Computer and Economic Environments, 2009, 185-188. ISBN: 978-80-7314-163-9.
- [46] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Adomian decomposition method for certain singular initial value problems II*, Journal of Applied Mathematics, 2010, roč. 2010 III., č. 2, 91-98. ISSN: 1337-6365.
- [47] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Comparison of Adomian decomposition method and Picard method*, In Proceedings of International Colloquium on the management of Educational Process. Brno: UNOB Brno, 2010, 27-31. ISBN: 978-80-7231-733-2.
- [48] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Adomian decomposition method for singular differential equations of the second order*, In Proceedings MFL-2010. Alušta, Krym: Simferopol, 2010, 162-163. ISBN: 978-966-491-137-2.
- [49] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Adomian decomposition method for certain singular initial value problems I*, In Proceedings of the 9th International Conference Aplimat 2010. Bratislava: 2010, 183- 188. ISBN: 978-80-89313-47-1.
- [50] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Integral and integrodifferential equations, modifications of Adomian decomposition method and homotopy perturbation method*, In Proceedings of the 10th International Conference APLIMAT 11. Bratislava: 2011, 193-199. ISBN: 978-80-89313-51-8.
- [51] WAZWAZ A.M. *A reliable modification of Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput., 100, 1999, 13-25.
- [52] WAZWAZ A.M. *A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type*, Applied Math. Comput., 118, 2001, 287-310. ISSN 0096-3003.
- [53] WAZWAZ A.M. *A new method for solving singular value problems in the second-order ordinary differential equations*, Appl. Math. Comput., 128, 2002, 45-57.

- [54] ZERNOV Y. *Geometric Analysis of one singular Cauchy problem*, Nonlinear Oscillations, 7(1), 2004, 65-77. ISSN 1562-3076.
- [55] ZERNOV Y., KUZINA Yu.V. *Qualitative investigation of the singular Cauchy problem*, Ukr. Math. J. 55(10), 2003, 1419-1424 (in Russian).
- [56] ZERNOV Y., KUZINA Yu.V. *Geometric analysis of one singular Cauchy problem*, Nonlinear Oscil., N.Y. 7(1), 2004, 67-80 (in Russian).
- [57] ZERNOV Y., CHAICHUK O.R. *Asymptotic behavior of solutions of a singular Cauchy problem for a functional-differential equation*, J. Math. Sci., 160(1), 2009, 123-135.

9 Curriculum vitae

Osobní údaje

Jméno/Příjmení

E-mail

Olga Archalousová

olgaarchalousova@seznam.cz

Pracovní zkušenosti

Období

Povolání nebo vykonávaná funkce

Hlavní pracovní náplň a oblasti odpovědnosti

Název/jméno zaměstnavatele

Obor činnosti či odvětví

2007 – dosud

Učitelka/Asistentka

- výuka odborných předmětů v rámci doktorského studia
- příprava odborných témat a materiálů

Vysoké učení technické v Brně, Ústav matematiky.

Školství

Období

Povolání nebo vykonávaná funkce

Hlavní pracovní náplň a oblasti odpovědnosti

Název/jméno zaměstnavatele

Obor činnosti či odvětví

2009 – 2010

Externí vyučující

- výuka ruštiny
- příprava odborných témat a materiálů.

Vysoké učení technické v Brně, Ústav jazyků.

Školství

Vzdělání, odborná příprava a školení

Období

Dosažená kvalifikace

Obor

Název a typ organizace, která poskytla vzdělání

2007 – dosud

(Ph.D.)

Matematika v elektroinženýrství

**Vysoké učení technické v Brně,
Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií.**

Období

Dosažená kvalifikace

Obor

Název a typ organizace, která poskytla vzdělání

2002 – 2005

Ing.

Projektování a technologie radioelektronických zařízení

**Iževská státní technická univerzita,
Fakulta přístrojové techniky, Ruská federace.**

Období

Dosažená kvalifikace

Obor

Název a typ organizace, která poskytla vzdělání

1990 – 2000

Maturitní zkouška

Střední škola, Ruská federace.

10 Abstract

The thesis deals with qualitative properties of solutions of singular initial value problems for ordinary differential and integrodifferential equations which occur in the theory of linear and nonlinear electrical circuits and the theory of thermionic currents. The research is concentrated especially on questions of existence and uniqueness of solutions, asymptotic estimates of solutions and modifications of Adomian decomposition method for singular initial problems.

Solution algorithms are derived for scalar differential equations of Lane-Emden type using Taylor series and modification of the Adomian decomposition method. For certain classes of nonlinear integrodifferential equations asymptotic expansions of solutions are constructed in a neighbourhood of a singular point. By means of the combination of Ważewski's topological method and Schauder fixed-point theorem there are proved asymptotic estimates of solutions in a region which is homeomorphic to a cone having vertex coinciding with the initial point.

Using Banach fixed-point theorem the uniqueness of a solution of the singular initial value problem is proved for systems of integrodifferential equations of Volterra and Fredholm type including implicit systems. Moreover, conditions of continuous dependence of a solution on a parameter are determined. Obtained results are presented in illustrative examples.