

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Ing. Olga Archalousová

SINGULÁRNÍ POČÁTEČNÍ ÚLOHA PRO OBYČEJNÉ
DIFERENCIÁLNÍ A INTEGRODIFERENCIÁLNÍ
ROVNICE

SINGULAR INITIAL VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL
AND INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

DISERTAČNÍ PRÁCE

k získání akademického titulu Doktor (Ph.D.)

Obor: Matematika v elektroinženýrství
Školitel: Doc. RNDr. Zdeněk Šmarda, CSc.

Abstrakt

Disertační práce pojednává o kvalitativních vlastnostech řešení singulárních počátečních úloh pro obyčejné diferenciální a integrodiferenciální rovnice, které se vyskytují v teorii lineárních a nelineárních elektrických obvodů a teorii termionických proudů. Výzkum je především zaměřen na otázky existence a jednoznačnosti řešení, asymptotických odhadů řešení a modifikace Adomianovy dekompoziční metody pro singulární počáteční úlohy.

Pomocí Taylorovy řady a modifikace Adomianovy dekompoziční metody jsou odvozeny algoritmy řešení singulárních počátečních úloh pro diferenciální rovnice Lane-Emdenova typu. Pro jisté třídy nelineárních integrodiferenciálních jsou konstruovány asymptotické rozklady řešení v okolí singulárního bodu. V oblasti, která je homeomorfní kuželu s vrcholem v počátečním bodu, jsou dokázány asymptotické odhady řešení pomocí Ważewského topologické metody a Schauderovy věty o pevném bodu.

Pro systémy integrodiferenciálních rovnic Volterrova a Fredholmova typu včetně implicitních systémů je pomocí Banachovy věty o pevném bodu dokázána jednoznačnost řešení singulární počáteční úlohy a stanoveny podmínky spojitě závislosti řešení na parametru. Uvedené výsledky jsou ilustrovány na jednoduchých příkladech.

Klíčová slova

Singulární počáteční úloha, obyčejné diferenciální a integrodiferenciální rovnice, elektrické obvody, Lane-Emdenova diferenciální rovnice, asymptotické rozklady řešení, asymptotické odhady řešení, Adomianova dekompoziční metoda, Ważewského topologická metoda, Schauderova věta o pevném bodě, Banachova věta o pevném bodě.

Abstract

The thesis deals with qualitative properties of solutions of singular initial value problems for ordinary differential and integrodifferential equations which occur in the theory of linear and nonlinear electrical circuits and the theory of thermionic currents. The research is concentrated especially on questions of existence and uniqueness of solutions, asymptotic estimates of solutions and modifications of Adomian decomposition method for singular initial problems.

Solution algorithms are derived for scalar differential equations of Lane-Emden type using Taylor series and modification of the Adomian decomposition method. For certain classes of nonlinear integrodifferential equations asymptotic expansions of solutions are constructed in a neighbourhood of a singular point. By means of the combination of Ważewski's topological method and Schauder fixed-point theorem there are proved asymptotic estimates of solutions in a region which is homeomorphic to a cone having vertex coinciding with the initial point.

Using Banach fixed-point theorem the uniqueness of a solution of the singular initial value problem is proved for systems of integrodifferential equations of Volterra and Fredholm type including implicit systems. Moreover, conditions of continuous dependence of a solution on a parameter are determined. Obtained results are presented in illustrative examples.

Keywords

Singular initial value problem, ordinary differential and integrodifferential equation, electrical circuits, Lane-Emden differential equation, asymptotic expansions of solutions, asymptotic estimates of solutions, Adomian decomposition method, Ważewski's topological method, Schauder fixed-point theorem, Banach fixed-point theorem.

Seznam použitých symbolů

$\cup$ – symbol pro sjednocení množin

$A \subset B$ – množina A je podmnožinou množiny B

$a \in A$ – element a je prvkem množiny A

$a \notin A$ – element a není prvkem množiny A

$\sim$ – symbol ekvivalence

$\approx$ – symbol aproximace

$\sum$ – symbol pro součet

f' – první derivace funkce f

f^k – k -tá derivace funkce f

$\int_a^b$ – určitý integrál s dolní mezí a a horní mezí b

o, O – Landauovy symboly

$\mathbb{R}$ – množina reálných čísel

$\mathbb{R}^n$ – n -rozměrný euklidovský prostor

E, H – Banachův prostor

$\mathbb{X}$ – topologický prostor

X – normovaný prostor

Ω^0 – otevřená množina

$\overline{\Omega}$ – uzavěr množiny Ω

$\partial\Omega$ – hranice množiny Ω

Ω_e^0 – množina výstupních bodů

Ω_{se}^0 – množina ostrých výstupních bodů

$C[a, b]$ – množina spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$

$X \times Y$ – kartézský součin dvou množin X, Y

$|f(x)|$ – absolutní hodnota funkce $f(x)$

$\|P\|$ – norma operátoru P

L^{-1} – inverzní operátor

$\text{grad } f$ – gradient funkce f

$\dot{u}(t, y)$ – derivace podél trajektorie

$\frac{\partial f}{\partial t}$ – parciální derivace 1. řádu funkce f podle proměnné t

$\text{sgn } f$ – znaménko funkce f

$C^1(\Omega, \mathbb{R})$ – množina funkcí se spojitými derivacemi 1. řádu s definičním oborem Ω a oborem hodnot $\mathbb{R}$

$C(J \times \mathbb{R})$ – množina spojitých funkcí dvou proměnných, první proměnná je definovaná na množině J , druhá proměnná na množině $\mathbb{R}$

$g(0^+) = 0$ – limita zprava funkce g se rovná nule

$\max |h(t)|$ – maximální hodnota funkce $|h(t)|$

$(\phi_n(x))$ – posloupnost funkcí

Fyzikální veličiny

R – odpor

U – napětí

i – proud

C – kapacita

L – indukčnost

Φ – magnetický tok

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji disertační práci na téma Singulární počáteční úloha pro diferenciální a integrodiferenciální rovnice vypracovala samostatně pod vedením svého školitele s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v rámci práce a uvedeny v seznamu literatury na konci práce. Jako autor uvedené disertační práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této práce jsem neporušila autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhla nepovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědoma následků porušení ustanovení §11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení §152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně 11.04.2011

.....

Poděkování

Děkuji vedoucímu doktorské disertace Doc. RNDr. Zdeňku Šmardovi, CSc. za velmi užitečnou pomoc, odborné vedení a cenné rady při zpracování disertační práce. Rovněž bych ráda poděkovala všem kolegům z Ústavu matematiky FEKT VUT v Brně za podporu mé práce a podnětné diskuse.

Obsah

1	Úvod	7
2	Dosavadní vývoj a současný stav problematiky	8
3	Cíle disertace	9
4	Přípravná kapitola	10
4.1	Základní pojmy z teorie asymptotických rozkladů	10
4.2	Ważewského topologická metoda	12
4.3	Použitý aparát funkcionální analýzy	15
4.4	Princip Adomianovy dekompoziční metody	17
5	Elektrické obvody reprezentující singulární počáteční úlohu	20
6	Singulární počáteční úloha pro jisté třídy skalárních diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic	25
6.1	Taylorova metoda řešení	25
6.2	Adomianova metoda řešení	28
6.3	Asymptotické rozklady řešení	32
6.4	Asymptotické odhady řešení	35
7	Systémy integrodiferenciálních rovnic	45
7.1	Singulární počáteční úloha pro Volterrovy a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice	45
7.2	Singulární počáteční úloha pro implicitní Volterrovy a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice	50
8	Závěr	59
9	Seznam literatury	60

1 Úvod

Řada zákonů stanovených na základě teorie pružnosti, elektrodynamiky a tepelné vodivosti je zapsána ve tvaru:

$$y(x) = ku(x) \tag{1.0.1}$$

kde u a y jsou odpovídající fyzikální hodnoty, k je konstanta úměrnosti.

Jestliže u je tah a y prodloužení tělesa, pak rovnice (1.0.1) vyjadřuje Hookův zákon, kde k je modul pružnosti.

Jestliže u je teplotní gradient a y -tepelný tok, pak rovnice (1.0.1) vyjadřuje Faradayův zákon, kde k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti látky.

Uvedené rovnice předpokládají okamžité určení ustáleného stavu. Ve skutečnosti zákony ve tvaru rovnice (1.0.1) neukazují skutečné jevy, protože v reálném prostředí nedosáhneme ustáleného stavu okamžitě, ale jen po nějaké době, která teoreticky může být od nuly do nekonečna. Například polarizace, vyvolaná v elektrickém poli, po zániku elektrického pole nemizí ihned, ale bude pomalu klesat. Proto posuvný proud bude i ve stejnosměrném poli. Tedy okamžitý stav systému závisí obecně na stavu systému v předcházejícím časovém okamžiku. Takové systémy jsou pak většinou popsány diferenciálními a integrodiferenciálními rovnicemi s diferenčními či separovatelnými jádry s malým parametrem při derivaci. Jestliže chování parametru má funkční charakter v dostatečně malém časovém okamžiku, který je například popsán funkcí $g(t) \in C(J)$, $g(t) > 0$, $g(0^+) = 0$, $J = (0, t_0]$, $t_0 > 0$, pak vyšetřování systémů vede na řešení singulárních počátečních úloh, což je jedním z cílů disertační práce.

2 Dosavadní vývoj a současný stav problematiky

V padesátých letech minulého století Čečík [15] poprvé systematicky vyšetřoval systémy obyčejných diferenciálních rovnic v okolí singulárního bodu. Stanovil podmínky existence a jednoznačnosti řešení singulární počáteční úlohy, vyšetřil strukturu integrálních O-křivek a našel posloupnost funkcí konvergující k O-křivce v případě její jednoznačnosti. Pozornost se soustředila i na asymptotický charakter řešení v okolí singulárního bodu. Prosenjuk a Jacenko [51] aplikací Schauderovy věty o pevném bodu stanovili asymptotiku řešení některých tříd nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu v okolí singulárního bodu. Diblík [16] vyšetřoval asymptotický charakter řešení singulární počáteční úlohy pro diferenciální rovnice částečně řešitelných vzhledem k derivaci. Konyuchova [46] studovala mimo jiné i singulární počáteční úlohu maticových Riccatiho diferenciálních rovnic. Norkin [41], [42] se zabýval strukturou integrálních O-křivek v okolí singulárního bodu a stanovil dimenzi integrální O-množiny některých tříd nelineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Této problematice jsou dále věnovány práce [6], [17-26], [85-88] a řada dalších.

Bajzakov [9] řešil problematiku asymptotických rozkladů řešení lineárních i nelineárních systémů integrálních rovnic Volterrova typu v okolí singulárního bodu. Dyshko, Konyuchova a Sudov [26] vyšetřovali pomocí Lyapunových řad singulární okrajové problémy pro diferenciální rovnice 3. řádu, které se vyskytují v teorii dynamiky kapalin. Šmarda [56-59] ukázal jak v kombinaci Ważewského metody a Schauderovy věty o pevném bodu lze dokázat existenci a jednoznačnost řešení singulární počáteční úlohy pro integrodiferenciální rovnice se separovatelným jádrem. Baštinec a Diblík [10], [11] stanovili podmínky existence řešení singulární Cauchy-Nicolettiho úlohy pro systém diferenciálních rovnic včetně asymptotiky řešení.

Pomocí modifikované Ważewského metody s tzv. (n, p, z) -podmnožinou vyšetřovali Diblík a Nowak [25] singulární počáteční úlohu pro systémy obyčejných diferenciálních rovnic. Zernov a Kuzina [86] vyšetřovali singulární počáteční úlohu pro skalární implicitní diferenciální rovnice 1. řádu. Stanovili podmínky existence neprázdné množiny spojitě diferencovatelných řešení včetně jejich asymptotiky.

Ve výše citovaných pracích byly mnohé výsledky dosaženy aplikací Ważewského topologické metody. V konkrétních aplikacích této metody na systémy integrodiferenciálních rovnic jsou však nutné předpoklady postihující bohužel jen úzkou třídu integrodiferenciálních rovnic. Otázky existence a jednoznačnosti řešení některých singulárních počátečních úloh pro Volterrovy nebo Fredholmovy integrodiferenciální rovnice byly vyřešeny v pracích [61-65] pomocí Banachovy věty o pevném bodu se speciální exponenciální váhovou normou.

Návrhům jednoduchých algoritmů na řešení některých singulárních počátečních úloh a otázkám existence a jednoznačnosti řešení Volterrových a Fredholmových integrodiferenciálních rovnic včetně popisu asymptotických vlastností řešení je věnována předložená práce.

3 Cíle disertace

Cílem disertace je studium existence, jednoznačnosti a asymptotických vlastností řešení některých tříd obyčejných a zejména integrodiferenciálních rovnic v okolí singulárního bodu. Jedná se zejména o singulární počáteční úlohy, které popisují chování elektrických obvodů a vlastnosti terminionických proudů.

Užitím úvah analogických myšlenky důkazu Lyapunovy věty o rozkladu [47] bude řešení konstruováno ve tvaru nekonečné řady a v případě Adomianovy dekompoziční metody budou řešení singulárních počátečních úloh vyjádřena v uzavřeném tvaru. U obecnějších systémů bude pak stanoven i asymptotický tvar řešení. U integrodiferenciálních rovnic nelze aplikovat Ważewského topologickou metodu ve formě známé pro obyčejné diferenciální rovnice, neboť neznámá funkce je pod integračním znaménkem. Neznáme tedy apriori směrové pole integrodiferenciálních rovnic, ačkoli toto směrové pole existuje. Jisté modifikace byly již publikovány v pracích [29], [43] ale postihují velice úzkou třídu integrodiferenciálních rovnic.

Jedním z dalších cílů disertace bude tedy i navržení kvalitativní metody vyšetřování integrodiferenciálních rovnic v kombinaci Ważewského topologické metody známé z teorie obyčejných diferenciálních rovnic s některými větami o pevném bodu. Tato teorie pak bude rozšířena i na některé třídy singulárních počátečních úloh pro integrodiferenciální rovnice včetně stanovení asymptotiky řešení. Pro obecné systémy integrodiferenciálních rovnic Volterrova a Fredholmova typu pak budou užitím Banachovy věty o pevném bodu stanoveny podmínky jednoznačnosti řešení počáteční singulární úlohy včetně spojitě závislosti na parametru. Výsledky pak budou demonstrovány na konkrétních příkladech.

4 Přípravná kapitola

4.1 Základní pojmy z teorie asymptotických rozkladů

Nyní uvedeme základní pojmy a definice z teorie asymptotických rozkladů řešení, které budeme používat v následujících kapitolách:

- (i) $f(x) = O(g(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$ znamená, že existuje pravé okolí bodu x_0 v němž platí $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq K$, $0 < K = konst$.
- (ii) $f(x) = o(g(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$ znamená, že $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- (iii) $f(x) \sim g(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$ znamená, že $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Definice 4.1.1 Posloupnost funkcí $(\varphi_n(x))$ nazveme asymptotickou posloupností pro $x \rightarrow x_0^+$, jestliže pro všechna n platí $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$.

Definice 4.1.2 Formální řadu $\sum a_n \varphi_n(x)$ nazveme asymptotickým rozkladem funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$ do N -tého členu platí-li:

- a) $(\varphi_n(x))$ je asymptotickou posloupností pro $x \rightarrow x_0^+$.
- b) $[f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)] = o(\varphi_N(x))$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $0 \neq a_n = konst$, což budeme značit $f(x) \approx \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$. Je-li N libovolné, pak $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$.

Poznámka 4.1.1 Pro pevné x_0 může mít daná funkce několik asymptotických rozkladů s různými asymptotickými posloupnostmi. Například

$$\frac{1}{1+x} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}, \quad \frac{1}{1+x} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)x^{-2n}$$

pro $x \rightarrow \infty$. Asymptotický rozklad jednoznačně nedefinuje funkci $f(x)$, například funkce

$$(1+x)^{-1}, \quad (1+e^{-x})(1+x)^{-1}$$

mají stejný asymptotický rozklad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-n}$$

pro $x \rightarrow \infty$. Je však nutno poznamenat, že pro danou asymptotickou posloupnost a pevné x_0 lze koeficienty a_m rekurentně vyjádřit ve tvaru

$$a_m = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left\{ \left[f(x) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \varphi_n(x) \right] [\varphi_m(x)]^{-1} \right\}, \quad m = 1, \dots, N$$

Asymptotické rozklady charakterizující danou funkci $f(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $N = \infty$, mohou být však jak konvergentní, tak i divergentní řadou, podrobněji viz [28].

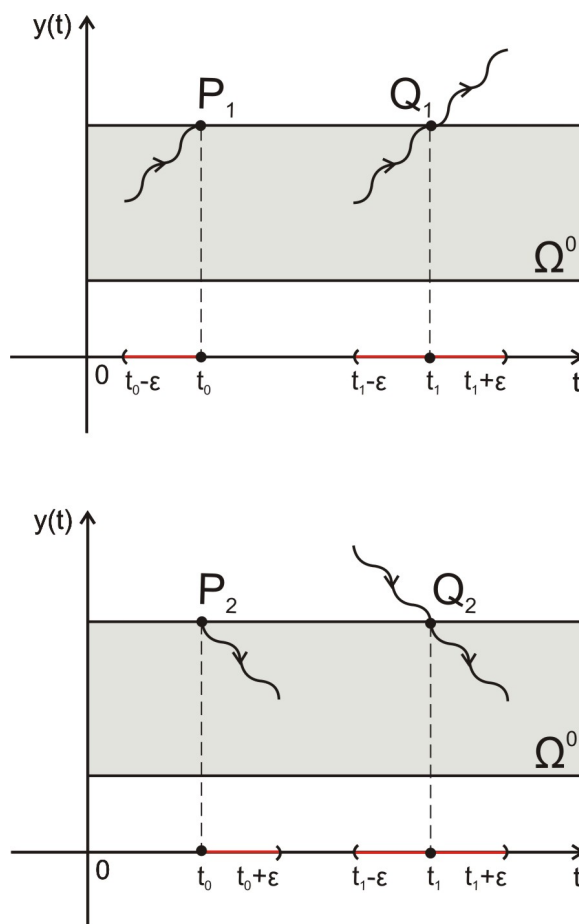
4.2 Ważewského topologická metoda

Nechť $f(t, y)$ je spojitá funkce, která je definována na otevřené (t, y) -množině $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Ω^0 je otevřená podmnožina Ω , $\partial\Omega^0$ je hranicí Ω^0 vzhledem k množině Ω , a $\overline{\Omega}^0$ je uzávěrem Ω^0 vzhledem k množině Ω . Uvažujme systém obyčejných diferenciálních rovnic:

$$y' = f(t, y). \quad (4.2.1)$$

Definice 4.2.1 ([35]) *Bod $(t_0, y_0) \in \Omega \cap \partial\Omega^0$ nazveme výstupním bodem (vstupním bodem) množiny Ω^0 vzhledem k systému (4.2.1), jestliže pro každé řešení systému (4.2.1), s počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$ existuje $\epsilon > 0$ takové, že $(t, y(t)) \in \Omega^0$ pro $t_0 - \epsilon \leq t < t_0$ ($t_0 < t \leq t_0 + \epsilon$). Výstupní bod (vstupní bod) (t_0, y_0) množiny Ω^0 nazveme bodem ostrého výstupu (bodem ostrého vstupu) množiny Ω^0 , jestliže $(t, y(t)) \notin \overline{\Omega}^0$ na intervalu $t_0 < t \leq t_0 + \epsilon$ ($t_0 - \epsilon \leq t < t_0$).*

Na obr.1 jsou znázorněny body výstupu a ostrého výstupu vzhledem k množině Ω^0 respektive body vstupu a ostrého vstupu vzhledem k množině Ω^0 .



obr.1

Nechť $u(t, y)$ je reálná funkce definovaná v Ω a nechť $y(t)$ je řešení systému (4.2.1) vyhovující počáteční podmínce $y(t_0) = y_0$. Jestliže funkce $u(t, y(t))$ je diferencovatelná v bodě $t = t_0$, pak její derivace se nazývá *derivací podél trajektorie* $y(t)$ v bodě $(t_0, y(t_0))$ a značí se $\dot{u}(t_0, y(t_0))$. Jestliže $u(t, y)$ má spojitě parciální derivace v Ω , pak její derivace podél trajektorií systému (4.2.1) existují a platí

$$\dot{u}(t, y) = \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} + \text{grad } u \cdot f(t, y),$$

kde " $\cdot$ " značí skalární součin a $\text{grad } u = (\frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n})$.

Definice 4.2.2 ([35]) *Otevřenou podmnožinu Ω^0 množiny Ω nazveme (u, v) -podmnožinou množiny Ω vzhledem k systému (4.2.1), jestliže platí:*

- (1) *Existují funkce $u_i(t, y) \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$ a $v_j(t, y) \in C[\Omega, \mathbb{R}]$, $j = 1, \dots, n$, $m + n > 0$ takové, že*

$$\Omega^0 = \{(t, y) \in \Omega : u_i(t, y) < 0, v_j(t, y) < 0 \forall i, j\}.$$

- (2) *$\dot{u}_\alpha(t, y) < 0$ pro derivace funkcí $u_\alpha(t, y)$, $\alpha = 1, \dots, m$ podél trajektorií systému (4.2.1) na množině*

$$U_\alpha = \{(t, y) \in \Omega : u_\alpha(t, y) = 0, u_i(t, y) \leq 0, v_j(t, y) \leq 0, \forall j \text{ a } i \neq \alpha\}.$$

- (3) *$\dot{v}_\beta(t, y) > 0$ pro derivace funkcí $v_\beta(t, y)$, $\beta = 1, \dots, n$ podél trajektorií systému (4.2.1) na množině*

$$V_\beta = \{(t, y) \in \Omega : u_\beta(t, y) = 0, u_i(t, y) \leq 0, v_j(t, y) \leq 0, \forall i \text{ a } j \neq \beta\}.$$

Množinu všech výstupních bodů (bodů ostrého výstupů) budeme značit Ω_e^0 (Ω_{se}^0).

Lemma 4.2.1 ([35]) *Nechť Ω^0 je (u, v) -podmnožinou množiny Ω vzhledem k systému (4.2.1). Pak*

$$\Omega_{se}^0 = \Omega_e^0 = \bigcup_{\alpha=1}^m U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta=1}^n V_\beta.$$

Definice 4.2.3 ([35]) *Nechť $\mathbb{X}$ je topologický prostor a $B \subset \mathbb{X}$.*

Nechť $A \subset B$. Funkci $r \in C(B, A)$ takovou, že $r(a) = a$ pro všechna $a \in A$, nazveme retrakcí množiny B na množinu A v topologickém prostoru $\mathbb{X}$.

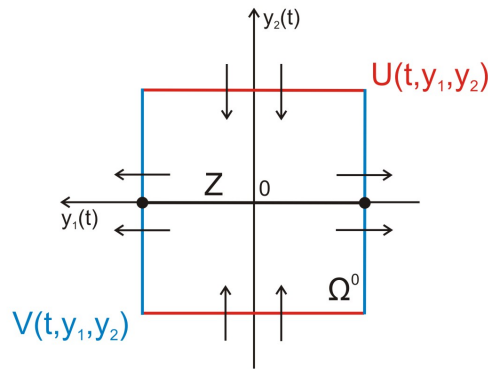
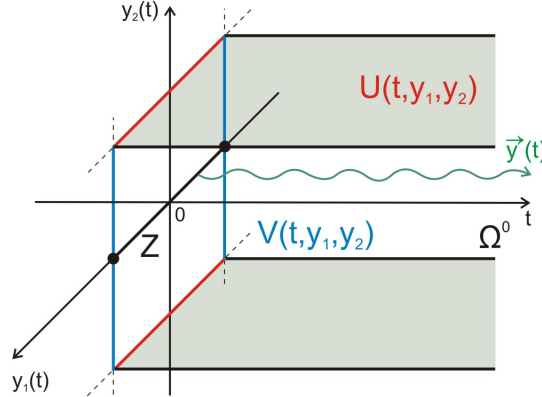
Množinu $A \subset B$ nazveme retraktem B v $\mathbb{X}$, jestliže existuje retrakce množiny B na množinu A v topologickém prostoru $\mathbb{X}$.

Věta 4.2.1 (Ważewského věta [35]). *Nechť je množina Ω^0 (u, v) -podmnožinou množiny Ω vzhledem k systému (4.2.1). Nechť je Z neprázdňá kompaktní podmnožina $\Omega^0 \cup \Omega_e^0$ taková, že množina $Z \cap \Omega_e^0$ není retraktem množiny Z , ale je retraktem množiny Ω_e^0 . Pak existuje alespoň jeden bod $(t_0, y_0) \in Z \cap \Omega^0$ takový, že graf řešení $y(t)$ Cauchyho úlohy $y(t_0) = y_0$ pro (4.2.1) leží v množině Ω na svém pravém maximálním intervalu existence.*

Princip Ważewského metody vysvětlíme na obr 2.

Nechť Ω^0 je (u, v) -podmnožinou v $\mathbb{R}^3$, která je reprezentovaná nekonečným kvádrem pro $t \geq 0$ s horní a dolní stěnou respektive bočními stěnami popsány funkcemi $U(t, y_1, y_2)$ respektive $V(t, y_1, y_2)$. Tedy v našem případě horní a dolní stěna jsou body ostrého vstupu množiny vzhledem k Ω^0 a boční stěny jsou body ostrého výstupu vzhledem k Ω^0 .

Nechť Z je úsečku spojující dva protilehlé body na stěnách popsány funkcí $V(t, y_1, y_2)$, pak $Z \cap V$ není retraktem Z , protože neexistuje spojitě zobrazení množiny Z na $Z \cap V$, která se skládá pouze ze dvou bodů ležících na protilehlých bočních stěnách množiny Ω^0 , ale je retraktem V , protože existuje spojitě zobrazení V na $Z \cap V$ (libovolnému bodu z V lze přiřadit bod $Z \cap V$ na příslušné boční stěně). Tedy podle Ważewského věty existuje alespoň jeden bod z množiny $Z \cap \Omega^0$ takový, že graf řešení $y(t)$ leží v množině Ω^0 na svém pravém maximálním intervalu existence.



obr.2

Poznámka 4.2.1 *Uvažujme nyní počáteční úlohu*

$$y' = f(t, y), \quad y(0^+) = 0, \quad (4.2.2)$$

kde $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $I = (0, t_0]$, $t_0 > 0$, tj. obecně v bodě $t = 0$ nejsou splněny podmínky existence řešení počáteční úlohy (4.2.2). V tomto případě budeme hovořit o singulární počáteční úloze pro systém obyčejných diferenciálních rovnic a bod $t = 0$ budeme nazývat singulárním bodem systému $y' = f(t, y)$.

4.3 Použitý aparát funkcionální analýzy

V souvislosti s aplikací principu pevného bodu uveďme následující pojmy:

Uvažujme operátorou rovnici

$$u = Tu, \quad u \in M \subset X, \quad (4.3.1)$$

X je Banachův prostor, řešenou pomocí iterační metody:

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

kde $u_0 \in M$. Každé řešení rovnice (4.3.1) nazveme pevným bodem operátoru T .

Definice 4.3.1 *Lineární prostor X nad množinou reálných čísel $\mathbb{R}$ nazveme normovaným prostorem, jestliže existuje norma $||\cdot||$ na X což značí, že pro každé $u, v \in X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

$$||u|| \geq 0.$$

$$||u|| = 0, \text{ tehdy a jen tehdy, když } u = 0.$$

$$\alpha ||u|| = |\alpha| ||u||.$$

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Definice 4.3.2 *Posloupnost (u_n) normovaného prostoru X nazveme cauchyovskou, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje číslo $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že*

$$||u_n - u_m|| < \epsilon$$

pro všechna $n, m \geq n_0(\epsilon)$.

V normovaném prostoru je každá konvergentní posloupnost cauchyovská.

Definice 4.3.3 *Normovaný prostor X nazveme Banachovým prostorem, jestliže každá cauchyovská posloupnost prostoru X je konvergentní.*

Věta 4.3.1 (Banachův princip pevného bodu [84]) *Předpokládejme, že platí následující podmínky:*

- (i) *M je neprázdná uzavřená množina v Banachově prostoru X .*
- (ii) *Operátor $T : M \rightarrow M$ je k -kontraktivní, tj.*

$$\|Au - Av\| \leq k\|u - v\|$$

pro všechna $u, v \in M$ a pevné k , $0 \leq k < 1$.

Pak platí, že rovnice (4.3.1) má právě jedno řešení, tj. operátor T má jediný pevný bod u na množině M .

Definice 4.3.4

- a) *Množinu M normovaného prostoru X nazveme kompaktní, jestliže z každé posloupnosti $(x_n) \subset M$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.*
- b) *Funkce množiny $S \subset C[a, b]$ nazveme stejnoměrně ohraničené, jestliže existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro každou funkci $f(x) \in S$ platí $|f(x)| \leq K$ pro každé $x \in C[a, b]$.*
- c) *Funkce množiny $D \subset C[a, b]$ nazveme rovnomocně spojitě, jestliže ke každému $\nu > 0$ existuje konstanta $\delta(\nu) > 0$ takové, že pro libovolné $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| < \delta(\nu)$ a každou funkci $f(x) \in D$ platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \nu$.*
- d) *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Nelineární operátor A s definičním oborem $D(A) \subset X$ a oborem hodnot $R(A) \subset Y$ nazveme totálně spojitým operátorem, jestliže je spojitý na $D(A)$ a zobrazuje každou ohraničenou množinu v kompaktní množinu.*

Věta 4.3.2 (Arzelova [84]) *Množina $N \subset C[a, b]$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, jestliže funkce množiny N jsou stejnoměrně ohraničené a rovnomocně spojitě.*

Věta 4.3.3 (Schauderova [84]) *Nechť operátor A zobrazuje uzavřenou, ohraničenou, konvexní množinu D Banachova prostoru X do sebe. Jestliže A je totálně spojitý operátor na množině D , pak existuje alespoň jeden prvek $p \in D$ takový, že $A(p) = p$.*

4.4 Princip Adomianovy dekompoziční metody

Uvažujme rovnici

$$Fu(t) = g(t), \quad (4.4.1)$$

kde F reprezentuje nelineární diferenciální operátor, který lze obecně vyjádřit lineární a nelineární složkou. Lineární složku rozložíme na součet $L + R$, kde L je invertibilní operátor a R je reziduální část lineárního operátoru. Rovnice (4.4.1) je pak tvaru

$$Lu + Ru + Nu = g,$$

kde Nu představuje nelineární složku. Tudíž

$$Lu = g - Ru - Nu.$$

Jelikož L je invertibilní, dostáváme rovnici

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu,$$

tedy

$$u = c + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (4.4.2)$$

kde c je integrační konstanta. Je-li $L = \frac{d^n}{dt^n}$, definujeme L^{-1} jako n -rozměrný určitý integrální operátor s integračními mezemi 0 až t . Například je-li $L = \frac{d^2}{dt^2}$, pak $L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0)$ a rovnice (4.4.2) je tvaru

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu.$$

Adomianova dekompoziční metoda [2-5] je založena na konstrukci řešení u ve tvaru nekonečné řady

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \quad (4.4.3)$$

Předpokládáme, že nelineární složka Nu je analytickou funkcí $f(u)$ s následujícím rozkladem:

$$Nu = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1 \dots u_n), \quad (4.4.4)$$

kde A_n jsou vhodné Adomianovy polynomy, které jsou generovány na základě algoritmů odvozených v pracích [2-4]. Adomianovy polynomy závisí na tvarech nelinearity složky Nu a lze je stanovit na základě vzorce

$$A_n(u_0, u_1 \dots u_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \left[f \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0.$$

Dosazením (4.4.3) a (4.4.4) do rovnice (4.4.2) dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = c + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Každý člen řady (4.4.3) je určen rekurentní relací

$$\begin{aligned} u_0 &= c + L^{-1}g \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Dekompoziční metoda má velkou výhodu v tom, že obvykle stačí spočítat pouze několik členů dekompoziční řady, abychom dostali požadovanou přesnost řešení. Problematika rychlosti konvergence Adomianovy dekompoziční metody je popsána v pracích [1], [39], [40].

Obecně je řešení dáno n -tou aproximací

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad n \geq 1,$$

přičemž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u.$$

Adomianovy polynomy

Abychom vypočetli Adomianovy polynomy, zavedeme nejdříve dekompoziční porovnávací parametr λ a řešení u pak píšeme ve tvaru

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n.$$

Nelineární složka $Nu = f(u)$ je pak reprezentovaná řadou $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$, t.j. $f(u)$ respektive $f(u(\lambda))$ je analytickou funkcí λ , tedy

$$f(u) = f(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n.$$

Polynomy A_n jsou definovány tak, že A_n závisí pouze na hodnotách $u_0, u_1, \dots, u_n$, tedy $A_0 = A_0(u_0)$, $A_1 = A_1(u_0, u_1)$, $A_2 = A_2(u_0, u_1, u_2)$, Obecně A_n lze vypočítat dle následujícího vzorce:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [f(u(\lambda))]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0. \quad (4.4.5)$$

Tedy

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 (d/du_0) f(u_0) \\ A_2 &= u_2 (d/du_0) f(u_0) + (u_1^2/2!) (d^2/du_0^2) f(u_0) \\ A_3 &= u_3 (d/du_0) f(u_0) + u_1 u_2 (d^2/du_0^2) f(u_0) + (u_1^3/3!) (d^3/du_0^3) f(u_0) \\ &\vdots \\ &\cdot \end{aligned}$$

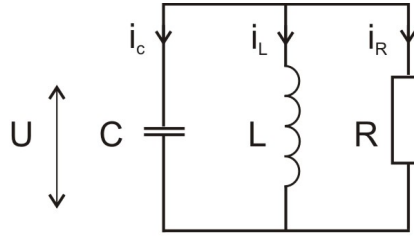
Uvažujeme-li například, že $f(u) = u^3$, pak Adomianovy polynomy jsou následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}A_0 &= u_0^3 \\A_1 &= 3u_0^2u_1 \\A_2 &= 3u_0^2u_2 + 3u_1^2u_0 \\A_3 &= u_1^3 + 3u_0^2u_3 + 6u_0u_1u_2 \\&\vdots \\&\cdot\end{aligned}$$

5 Elektrické obvody reprezentující singulární počáteční úlohu

Diferenciální a integrodiferenciální rovnice se často vyskytují jako matematický model technických procesů. S prvními aplikacemi diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic v mechanice, ekonomii a teorii elektrických obvodů se můžeme setkat v pracích Lotky [48] a Volterra [78], [79]. Volterrovy práce byly základem pro vývoj matematického modelování technických procesů. Byly položeny základy vyšetřování zejména integrálních a integrodiferenciálních rovnic s ohraničeným a neohraničeným zpožděním včetně diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic s malým parametrem, které v případě funkční závislosti popisují singulární počáteční úlohy. Některé vlastnosti elektrických obvodů popsaných integrodiferenciálními rovnicemi byly vyšetřovány například v pracích [66], [67].

V této kapitole pomocí Kirchhoffových zákonů a Faradayova zákona odvodíme proudové a napěťové charakteristiky lineárních a nelineárních elektrických obvodů, z nichž některé vycházejí ze singulárních počátečních úloh. Uvažujme elektrický obvod (obr.3) bez efektu hysteréze.



obr.3

Magnetický tok Φ na cívce je tvaru $\Phi = Li_L$ a dle rovnic elektrodynamiky dostáváme

$$\begin{aligned} C \frac{dU}{dt} &= i_C, \\ \frac{1}{L} \int_{t_0}^t U(s) ds &= i_L, \\ Ri_R &= U. \end{aligned}$$

Dle prvního Kirchhoffova zákona platí

$$\frac{1}{L} \int_{t_0}^t U(s) ds + \frac{U}{R} + C \frac{dU}{dt} = 0. \quad (5.1)$$

Derivováním rovnice (5.1) dostáváme diferenciální rovnici

$$C \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{L} U = 0.$$

Uvažujme nyní obvod s efektem hysteréze. Nejdříve budeme řešit obvod vzhledem k proudové charakteristice i_L . Magnetický tok je tvaru

$$\Phi(t) = Li_L + \int_{t_0}^t M(t - \tau) i_L(\tau) d\tau, \quad (5.2)$$

kde $M(t - \tau)$ je funkce vyjadřující vliv proudu i_L v čase τ na magnetický tok Φ v čase t . Dle prvního Kirchhoffova zákona platí

$$i_L = -i_R - i_C = -\frac{U}{R} - C\frac{dU}{dt}.$$

Odtud

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U(t)}{RC} = -\frac{i_L(t)}{C}. \quad (5.3)$$

Diferenciální rovnice (5.3) má řešení

$$U(t) = U(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{RC}} - \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \frac{i_L(\tau)}{C} d\tau. \quad (5.4)$$

Platí

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t U(s)ds. \quad (5.5)$$

Dosazením napětí $U(t)$ z rovnice (5.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= U(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\frac{s-t_0}{RC}} ds - \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^s e^{-\frac{s-\tau}{RC}} \frac{i_L(\tau)}{C} d\tau \\ &= f(U(t_0), t) + \int_{t_0}^t \tilde{K}(t - \tau) i_L(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde

$$\tilde{K}(t - \tau) = -\frac{1}{C} \int_{\tau}^t e^{-\frac{s-\tau}{RC}} ds, \quad f(U(t_0), t) = U(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\frac{s-t_0}{RC}} ds.$$

Dosadíme-li (5.6) do rovnice (5.2) dostáváme

$$f(U(t_0), t) + \int_{t_0}^t \tilde{K}(t - \tau) i_L(\tau) d\tau = Li_L + \int_{t_0}^t M(t - \tau) i_L(\tau) d\tau.$$

Odtud

$$i_L(t) = \frac{1}{L} f(U(t_0), t) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t [\tilde{K}(t - \tau) - M(t - \tau)] i_L(\tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Položme $K(t - \tau) = \tilde{K}(t - \tau) - M(t - \tau)$ pak rovnice (5.7) je tvaru

$$i_L(t) = \frac{1}{L} f(U(t_0), t) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t K(t - \tau) i_L(\tau) d\tau,$$

což je Volterrova integrální rovnice s diferenčním jádrem.

Řešme nyní obvod vzhledem k napětí $U(t)$. Z rovnic elektrodynamiky plyne

$$i_L(t) = \frac{\Phi(t)}{L} + \int_{t_0}^t P(t, s) \Phi(s) ds, \quad (5.8)$$

kde $P(t, s)$ je funkce vyjadřující vliv magnetického toku $\Phi(t)$ v čase s na proud i_L v čase t . Dosadíme

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t U(\tau) d\tau$$

do rovnice (5.8). Odtud plyne

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t U(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t P(t, s) ds \int_{t_0}^s U(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t H(t, \tau) U(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde

$$H(t, \tau) = \frac{1}{L} + \int_{\tau}^t P(t, s) ds.$$

Aplikací prvního Kirchhoffova zákona dostáváme

$$i_L(t) = -\frac{U}{R} - C \frac{dU}{dt}.$$

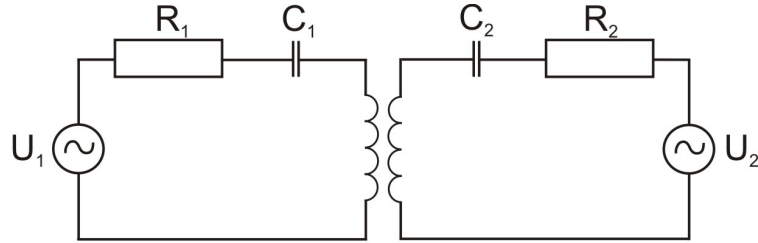
Dosazením do (5.9) dostáváme integrodiferenciální rovnici

$$C \frac{dU}{dt} = -\frac{U}{R} - \int_{t_0}^t H(t, \tau) U(\tau) d\tau$$

s počáteční podmínkou $U(t_0) = U_0$. Jestliže kapacita C má funkční závislost $C(t) > 0$, $t > t_0$, $\lim_{t \rightarrow t_0^+} C(t) = 0$ dostáváme již klasickou počáteční singulární úlohu

$$C(t) \frac{dU}{dt} = -\frac{U}{R} - \int_{t_0}^t H(t, \tau) U(\tau) d\tau, \quad U(t_0) = U_0.$$

Uvažujme elektrický obvod (obr.4).



obr.4

Dle zákonů elektrodynamiky platí

$$U_{R_1} = R_1 \cdot i_1, \quad U_{R_2} = R_2 \cdot i_2, \quad (5.10)$$

$$U_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(s) ds, \quad U_{C_2} = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(s) ds, \quad (5.11)$$

$$U_{L_1} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}, \quad U_{L_2} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}. \quad (5.12)$$

Podle druhého Kirchhoffova zákona je algebraický součet všech napětí v uzavřeném obvodu roven nule, tj.

$$\sum_{i=1}^2 U_i = 0. \quad (5.13)$$

Jestliže jsou oba obvody ve vzájemné indukci a mají konstantní napětí pak dosazením (5.10), (5.11), (5.12) do (5.13) dostáváme pro proudové charakteristiky $i_1(t)$, $i_2(t)$ systém integrodiferenciálních rovnic

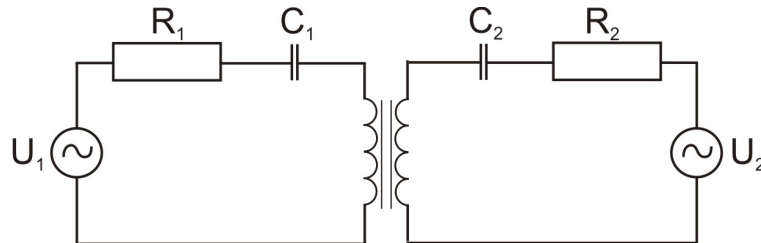
$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(s) ds + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ U_2 &= R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(s) ds + L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nyní budeme uvažovat případ, kdy je energie předávána působením vzájemné indukce, pak platí

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= L_{11} i_1 + L_{12} i_2 + \int_{-\infty}^t (K_{11}(t-s) i_1(s) + K_{12}(t-s) i_2(s)) ds, \\ \Phi_2(t) &= L_{21} i_1 + L_{22} i_2 + \int_{-\infty}^t (K_{21}(t-s) i_1(s) + K_{22}(t-s) i_2(s)) ds, \end{aligned} \quad (5.15)$$

kde $K_{ij}(t-s)$ $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ jsou funkce vyjadřující vliv proudu i_k , $k = 1, 2$ v čase s na magnetický tok v čase t . Dolní mez $-\infty$ znamená, že vlastnosti obvodu závisí na předchozích stavech charakteristik.

V obecném případě bude systém (7.1.2) nelineární (obr.5).



obr.5

Nechť

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \\ K(t-s) &= \begin{pmatrix} K_{11}(t-s) & K_{12}(t-s) \\ K_{21}(t-s) & K_{22}(t-s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pak magnetický tok je tvaru

$$\Phi(t) = L \cdot f(i) + \int_{-\infty}^t K(t-s) f(i(s)) ds$$

kde

$$f(i) = \begin{pmatrix} f_1(i_1, i_2) \\ f_2(i_1, i_2) \end{pmatrix}$$

a $f(i)$ je nelineární vektorová funkce závislá na charakteristice jader cívky a obvykle je zadána nebo získána experimentálně.

Podle Faradayova zákona je indukované elektromagnetické napětí U_i rovno záporně vzaté změně magnetického indukčního toku, tj.

$$U_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}, \quad i = 1, 2.$$

Dle Faradayova zákona systém rovnic (7.1.1) je tvaru

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + R_1 i_1(t) + \frac{q_1(t)}{C_1} = 0, \quad \frac{d\Phi_2}{dt} + R_2 i_2(t) + \frac{q_2(t)}{C_2} = 0, \quad (5.16)$$

kde $\frac{dq_k}{dt} = i_k(t)$, $k = 1, 2$. Derivací systému (5.16) dostáváme systém

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1(t)}{C_1} = 0, \quad \frac{d^2\Phi_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2(t)}{C_2} = 0 \quad (5.17)$$

Nechť $R_0(t-s)$ je rezolventa maticového jádra $L^{-1}K(t-s)$. Řešme systém rovnic (7.1.2) vzhledem k proudové charakteristice $i(t) = (i_1(t), i_2(t))$, dostáváme pak proudové charakteristiky ve tvaru

$$i(t) = \int_{-\infty}^t R_0(t-s) L^{-1} \Phi(s) ds + L^{-1} \Phi(t). \quad (5.18)$$

Kapacity obvodu C_1 a C_2 jsou parametry a mohou se měnit od nuly do nekonečna. Jestliže C_1 a C_2 jsou malé, tj. ($C_1 \approx C_2 \approx \varepsilon$), pak z rovnic (7.1.1), (5.18) dostáváme systém integrodiferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} E \frac{d\Phi}{dt} &= LU(t), \\ \frac{dU}{dt} &+ EL^{-1}RU(t) + [E R R_0(0) + I](L^{-1})^2 \Phi(t) \\ &+ \int_{-\infty}^t [ER \frac{\partial R_0(t-s)}{\partial t} + R_0(t-s)](L^{-1})^2 \Phi(s) ds = 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

kde I je jednotková matice a

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Systém (5.19) závisí na malém parametru ε , jehož řešení lze konstruovat ve tvaru asymptotického rozkladu vzhledem k $\varepsilon \rightarrow 0$. V případě, že uvažujeme časovou závislost systému na intervalu $(0, t_0]$, $t_0 > 0$ a kapacita má funkcionální charakter $G(t)$ takový, že

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 \\ 0 & g_2(t) \end{pmatrix},$$

$g_i(t) > 0$, $g_i(0^+) = 0$, $t \in (0, t_0]$, pak se jedná o singulární počáteční úlohu vzhledem k magnetickému toku $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t))^T$.

6 Singulární počáteční úloha pro jisté třídy skalárních diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic

6.1 Taylorova metoda řešení

Uvažujme singulární počáteční úlohu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (6.1.1)$$

kde $x \in J = (0, 1]$, $f(x, y) \in C(J \times \mathbb{R})$, $g(x) \in C(J)$. V případě, že $f(x, y) = f(y)$, $g(x) \equiv 0$, dostáváme diferenciální rovnici Lane-Emdenova typu, která má velký význam v teorii termionických proudů a stelárních struktur [37], [54]. Existuje řada prací, které jsou věnovány konstrukci řešení počáteční úlohy (6.1.1) pomocí nekonečných řad nebo perturbační techniky. Například Wazwaz [80-82] konstruoval řešení (6.1.1) užitím Adomianovy dekompoziční metody. Russel a Shampine [54] vyšetřovali rovnici (6.1.1) v případě, že $f(x, y) = ky + h(x)$ Iyengar a Jain [42] stanovili numerické algoritmy pro konstrukci řešení počáteční úlohy (6.1.1).

V této kapitole budeme modifikovat pomocí Taylorovy řady algoritmus navržený Wazwazem [81] a zobecněný Hasanem a Zhunem [36] pro řešení diferenciálních rovnic Lane-Emdenova typu. Navržený algoritmus má následující kroky:

- (i) Z rovnice (6.1.1) vypočteme první derivaci, tj.

$$y' = \frac{1}{2} [xg(x)] - \frac{1}{2} [xf(x, y)] - \frac{1}{2} xy''.$$

Obecně k -tá derivaci je pak tvaru

$$y^{(k)} = \frac{1}{k+1} [xg(x)]^{(k-1)} - \frac{1}{k+1} [xf(x, y)]^{(k-1)} - \frac{1}{k+1} xy^{(k+1)},$$

kde $k = 1, 2, \dots$.

- (ii) Z počátečních podmínek $y(0) = A$, $y'(0) = B$ vypočteme derivace

$$y''(0), y'''(0), \dots, y^{(k)}(0)$$

- (iii) Sestrojíme Taylorovu řadu se středem v bodě $x = 0$ tj.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^{(k)} + \dots$$

Navržený algoritmus budeme demonstrovat na následujících příkladech.

Příklad 6.1.1 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 6 + 12x + x^2 + x^3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (6.1.2)$$

Jednotlivé derivace jsou pak tvaru:

$$y' = \frac{1}{2}(6x + 12x^2 + x^3 + x^4) - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}xy''$$

$$y'' = \frac{1}{3}(6 + 24x + 3x^2 + 4x^3) - \frac{1}{3}(xy' + y) - \frac{1}{3}xy'''$$

$$y''' = \frac{1}{4}(24 + 6x + 12x^2) - \frac{1}{4}(xy'' + 2y') - \frac{1}{4}xy^{(4)}$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{5}(6 + 24x) - \frac{1}{5}(xy''' + 3y'') - \frac{1}{5}xy^{(5)}$$

$$y^{(5)} = \frac{1}{6}(24) - \frac{1}{6}(xy^{(4)} + 4y''') - \frac{1}{6}xy^{(6)}$$

⋮

Z počátečních podmínek $y(0) = y'(0) = 0$ dostáváme

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 6, \quad y^{(4)}(0) = 0, \quad y^{(5)}(0) = 0, \quad \dots \quad \text{Obecně } y^{(k)}(0) = 0, \quad k \geq 4.$$

Taylorova řada je pak tvaru

$$y(x) = \frac{2}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = x^2 + x^3.$$

Řešením (6.1.2) je tedy funkce $y(x) = x^2 + x^3$.

Příklad 6.1.2 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{2}{x}y' - (4x^2 + 6)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (6.1.3)$$

Jednotlivé derivace jsou tvaru:

$$y' = \frac{1}{2}y(4x^3 + 6x) - \frac{1}{2}xy''$$

$$y'' = \frac{1}{3}[y'(4x^3 + 6x) + y(12x^2 + 6)] - \frac{1}{3}xy'''$$

$$y''' = \frac{1}{4}[y''(4x^3 + 6x) + 2y'(12x^2 + 6) + 24xy] - \frac{1}{4}xy^{(4)}$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{5}[y'''(4x^3 + 6x) + 3y''(12x^2 + 6) + 72y'x + 24y] - \frac{1}{5}xy^{(5)}$$

$$y^{(5)} = \frac{1}{6}[y^{(4)}(4x^3 + 6x) + 4y'''(12x^2 + 6) + 144y''x + 96y'] - \frac{1}{6}xy^{(6)}$$

$$y^{(6)} = \frac{1}{7}[y^{(5)}(4x^3 + 6x) + 5y^{(4)}(12x^2 + 6) + 240y'''x + 240y''] - \frac{1}{7}xy^{(7)}$$

⋮

Z počátečních podmínek $y(0) = 1, y'(0) = 0$ dostáváme

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{(4)} = 12, \quad y^{(5)} = 0, \quad y^{(6)} = 120, \quad \dots$$

Taylorova řada je pak tvaru

$$y(x) = 1 + 2\frac{x^2}{2!} + 12\frac{x^4}{4!} + 120\frac{x^6}{6!} + \dots = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots = e^{x^2}.$$

Řešením (6.1.3) je tedy funkce $y(x) = e^{x^2}$. Je zřejmé, že výše uvedený postup se dá aplikovat i na obecnější singulární počáteční úlohu

$$y'' + \frac{n}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (6.1.4)$$

kde $n \in R$, pak algoritmus pro k -tou derivaci je tvaru

$$y^{(k)} = \frac{1}{n+k-1} [xg(x)]^{(k-1)} - \frac{1}{n+k-1} [xf(x, y)]^{(k-1)} - \frac{1}{n+k-1} xy^{(k+1)},$$

kde $k = 1, 2, \dots$.

Příklad 6.1.3 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{4}{x}y' - y = (10 + 8x)e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (6.1.5)$$

Jednotlivé derivace jsou tvaru:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{4} [10xe^x + 8x^2e^x] + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{4}xy'' \\ y'' &= \frac{1}{5} [10e^x + 26xe^x + 8x^2e^x] + \frac{1}{5}[y + xy'] - \frac{1}{5}xy''' \\ y''' &= \frac{1}{6} [36e^x + 42xe^x + 8x^2e^x] + \frac{1}{6}[2y' + xy''] - \frac{1}{6}xy^{(4)} \\ y^{(4)} &= \frac{1}{7} [78e^x + 58xe^x + 8x^2e^x] + \frac{1}{7}[3y'' + xy'''] - \frac{1}{7}xy^{(5)} \\ y^{(5)} &= \frac{1}{8} [136e^x + 74xe^x + 8x^2e^x] + \frac{1}{8}[4y''' + xy^{(4)}] - \frac{1}{8}xy^{(6)} \\ y^{(6)} &= \frac{1}{9} [210e^x + 90xe^x + 8x^2e^x] + \frac{1}{9}[5y^{(4)} + xy^{(5)}] - \frac{1}{9}xy^{(7)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek $y(0) = 0, y'(0) = 0$ dostáváme

$$y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 6, \quad y^{(4)} = 12, \quad y^{(5)} = 20, \quad y^{(6)} = 30, \quad \dots$$

Taylorova řada je pak tvaru

$$y(x) = 2\frac{x^2}{2!} + 6\frac{x^3}{3!} + 12\frac{x^4}{4!} + 20\frac{x^5}{5!} + 30\frac{x^6}{6!} + \dots = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \dots = x^2e^x.$$

6.2 Adomianova metoda řešení

V této kapitole uvažujeme singulární počáteční úlohu pro Lane-Emdenovu rovnici

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(y) = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad 0 < x \leq 1, \quad (6.2.1)$$

$A, B \in \mathbb{R}$, $f(y)$ je spojitá funkce. Řešení bude konstruováno pomocí Adomianovy dekompoziční metody. Existuje řada prací [5], [8], [53], [54], [71-76] věnovaných různým modifikacím Adomianovy dekompoziční metody a perturbačním metodám pro obyčejné i parciální diferenciální rovnice. Mimo to jsou známy i diferenční metody řešení dané úlohy, které jsou detailně popsány v pracích Chawla and Katiho [38], Iyengara and Jaina [42] a El-Sayed [27].

Náš přístup bude především vycházet z výsledků práce Wazwaze [81], které budeme modifikovat pro počáteční singulární úlohu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) = g(x), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = B, \quad (6.2.2)$$

Dle Adomianovy dekompoziční metody (viz. přípravná kapitola) vyjádříme rovnici (6.2.2) ve tvaru

$$Ly = -f(x, y) + g(x). \quad (6.2.3)$$

Operátor L definujeme následovně:

$$L := x^{-2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right). \quad (6.2.4)$$

Inverzní operátor L^{-1} je pak tvaru

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^2(\cdot) dx dx. \quad (6.2.5)$$

Aplikací L^{-1} na rovnici (6.2.3) dostáváme

$$y(x) = A + Bx + L^{-1}g(x) - L^{-1}f(x, y). \quad (6.2.6)$$

Řešení $y(x)$ a funkci $f(x, y)$ vyjádříme ve tvaru nekonečných řad

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (6.2.7)$$

kde složky $y_n(x)$ řešení $y(x)$ budou stanoveny pomocí rekurentních rovnic, A_n jsou Adomianovy polynomy, které jsou konstruovány pro různé třídy nelinearit pomocí algoritmů navržených Adomianem [2] a v posledních letech zejména Wazwazem [81], [82]. Dosazením (6.2.7) do (6.2.6) dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = A + Bx + L^{-1}g(x) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (6.2.8)$$

Abychom určili složky řešení $y_n(x)$ použijeme Adomianovy rekurzivní relace, které jsou v našem případě tvaru

$$\begin{aligned} y_0(x) &= A + Bx + L^{-1}g(x), \\ y_1(x) &= -L^1(A_0), \\ y_2(x) &= -L^1(A_1), \\ y_3(x) &= -L^1(A_2), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

kde

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0) \\ A_1 &= u_1 (d/du_0) f(u_0) \\ A_2 &= u_2 (d/du_0) f(u_0) + (u_1^2/2!) (d^2/du_0^2) f(u_0) \\ A_3 &= u_3 (d/du_0) f(u_0) + u_1 u_2 (d^2/du_0^2) f(u_0) + (u_1^3/3!) (d^3/du_0^3) f(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Z rovnic (6.2.9), (6.2.10) dostáváme pak složky $y_n(x)$ rekurzivně, n -tá aproximace je pak tvaru

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Z uvedeného postupu vyplývá, že vhodným výběrem operátoru L bude možné řešit i obecnější počáteční singulární úlohy.

Uvedený postup budeme ilustrovat na následujících příkladech:

Příklad 6.2.1 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{2}{x}y' - 10y = 12 - 10x^4, \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{6.2.11}$$

Tedy

$$Ly = 12 - 10x^4 + 10y. \tag{6.2.12}$$

Aplikací L^{-1} na rovnici (6.2.12) dostaneme

$$Ly = 2x^2 - \frac{5}{21}x^6 + 10L^{-1}(y). \tag{6.2.13}$$

Rekurzivní rovnice jsou pak tvaru

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 2x^2 - \frac{5}{21}x^6 \\ y_{k+1}(x) &= 10L^{-1}(y_k), \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

a složky řešení $y(x)$ jsou tvaru

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 2x^2 - \frac{5}{21}x^6 \\
 y_1 &= x^4 - \frac{25x^8}{756} \\
 y_2 &= \frac{5x^6}{21} - \frac{25x^{10}}{8316} \\
 y_3 &= \frac{25x^8}{756} - \frac{125x^{12}}{648648} \\
 y_4 &= \frac{25x^{10}}{8316} - \frac{625x^{14}}{3243240}
 \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

Je zřejmé, že výrazy $-\frac{5}{21}x^6$, $-\frac{25x^8}{756}$ a $-\frac{25x^{10}}{8316}$, které se vyskytují ve složkách y_2 , y_3 , y_4 , jsou opačného znaménka. Odtud plyne, že řešení počáteční singulární úlohy (6.2.11) je tvaru

$$y(x) = 2x^2 + x^4.$$

Příklad 6.2.2 *Uvažujme singulární počáteční úlohu*

$$y'' + \frac{2}{x}y' + 4(2e^y + e^{y/2}) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

V tomto případě platí

$$Ly = -4(2e^y + e^{y/2}) \tag{6.2.16}$$

Aplikací L^{-1} na rovnici (6.2.16) dostáváme

$$y = -4L^{-1}(2e^y + e^{y/2})$$

Dle dekompoziční metody jsou složky řešení $y(x)$ tvaru

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 0 \\
 y_{k+1}(x) &= -4L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0,
 \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

přičemž Adomianovy polynomy pro nelineární výraz $2e^y + e^{y/2}$ jsou tvaru:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 2e^{y_0} + e^{y_0/2} \\
 A_1 &= y_1 \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0/2} \right) \\
 A_2 &= y_2 \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0/2} \right) + \frac{y_1^2}{2!} \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0/2} \right) \\
 A_3 &= y_3 \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0/2} \right) + y_1y_2 \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0/2} \right) + \frac{y_1^3}{3!} \left(2e^{y_0} + \frac{1}{2}e^{y_0/2} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Dosazením (6.2.18) do (6.2.17) dostáváme

$$\begin{aligned}y_0 &= 0 \\y_1 &= -4L^{-1}(A_0) = -2x^2 \\y_2 &= -4L^{-1}(A_1) = x^4 \\y_3 &= -4L^{-1}(A_2) = -\frac{2}{3}x^6 \\y_4 &= -4L^{-1}(A_3) = \frac{1}{2}x^8 \\y_5 &= -4L^{-1}(A_4) = -\frac{2}{5}x^{10} \\y_6 &= -4L^{-1}(A_5) = \frac{1}{3}x^{12} \\&\vdots\end{aligned}$$

Řešení $y(x)$ lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = -2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{5}x^{10} - \frac{1}{6}x^{12} + \dots \right).$$

Odtud plyne, že řešení dané počáteční úlohy je tvaru

$$y(x) = -2\ln(1 + x^2).$$

6.3 Asymptotické rozklady řešení

Existenci a asymptotickému chování řešení singulárních počátečních úloh pro obyčejné a integrodiferenciální rovnice byla věnována řada prací (např. [17-24], [44-46], [56-58]). Jednalo se především o stanovení postačujících podmínek pro existenci řešení v předem dané oblasti homeomorfní kuželu s vrcholem v počátečním bodě.

Jako vhodný aparát pro stanovení asymptotiky řešení se ukázala teorie asymptotických rozkladů řešení. V tomto směru jsou významné zejména výsledky Diblíka [16], který konstruoval asymptotické rozklady řešení pro singulární počáteční problémy nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic vzhledem k obecnému řešení přidružené homogení rovnice. Jeho výsledky lze modifikovat i pro jisté třídy integrodiferenciálních rovnic se separovanými jádry.

Uvažujme následující singulární počáteční úlohu:

$$g(x)y' = y + \int_{0^+}^x \left(\sum_{i+j=1}^N u_{ij}(x)v_{ij}(s)y^i(x)y^j(s) \right) ds, \quad y(0^+) = 0, \quad (6.3.1)$$

kde $u_{ij}(x), v_{ij}(x) \in C(J)$, $J = (0, x_0]$, $x_0 > 0$ je dostatečně malé.

Řešení rovnice (6.3.1) budeme hledat ve tvaru jednoparametrické asymptotické řady

$$y(x, C) = \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)\varphi^h(x, C), \quad (6.3.2)$$

$f_1(x) \equiv 1$, $f_h(x)$, $h \geq 2$ jsou neznámé funkce, $C \neq 0$ je konstanta, $\varphi(x, C)$ je obecné řešení diferenciální rovnice

$$g(x)y' = y,$$

tedy

$$\varphi(x, C) = C \exp \left[\int_{x_0}^x \frac{dt}{g(t)} \right]$$

Dosazením (6.3.2) do (6.3.1) a porovnáním výrazů u stejných mocnin $\varphi^h(x, C)$, $h \geq 2$ dostáváme systém rekurentních rovnic pro neznámé koeficienty $f_h(x)$, $h \geq 2$. Obecný tvar rovnic má velice komplikovaný tvar (viz.[58]) a pro naše následující úvahy není potřebný.

Pro stanovení asymptotických rozkladů řešení rovnice (6.3.1) nám bude stačit vycházet z výsledků platných pro obyčejné diferenciální rovnice.

Uvažujme následující diferenciální rovnici

$$g(x)y' = qy + p(x). \quad (6.3.3)$$

Diblík [5] stanovil asymptotické odhady řešení rovnice (6.3.3), což můžeme zformulovat následovně:

Věta 6.3.1 *Uvažujme následující podmínky:*

- I) *Nechť q je konstanta, $q < 0$, $g(x) \in C^1(J)$, $g(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$, $g'(x) \sim \psi_1(x)g^{\lambda_1}(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $\lambda_1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi_1(x)g^\tau(x) = 0$, τ je libovolné kladné číslo.*
- II) *$p(x) \in C(J)$, $p(x) = b_0(x)g^\lambda(x) + O(b_1(x)g^{\lambda+\epsilon}(x))$, $\epsilon > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} b_i(x)g'(x) = 0$, $i = 0, 1$, $b_0(x) \in C(J)$, $b_0(x) \neq 0$, $b'_0(x) \sim \psi_2(x)g^{\lambda_2}(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$, $\lambda_2 + 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi_2(x)g^\tau(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g^\tau(x)(b_0(x))^{-1} = 0$.*

Pak rovnice (6.3.3) má jediné řešení na intervalu J , které lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = \frac{-1}{q}b_0(x)g^\lambda(x) + O(g^\nu(x)), \quad y'(x) = O(g^{\nu-1}(x)), \quad (6.3.4)$$

kde $\nu \in (\lambda, \lambda + \min\{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \epsilon\})$.

Nyní ukážeme, že výsledky Věty 6.3.1 lze aplikovat i na integrodiferenciální rovnice tvaru (6.3.1).

Postup ukážeme na následující integrodiferenciální rovnici

$$x^3 y' = y + \int_{0^+}^x xy^2(s)y(s)ds. \quad (6.3.5)$$

V tomto případě $i = 2$, $j = 1$, $u_{21}(x) = x$, $v_{21}(s) = 1$, $\varphi(x, C) = C \exp\left(\frac{1}{2x_0^2} - \frac{1}{2x^2}\right)$. Demonstrujme konstrukci asymptotického rozkladu řešení (6.3.5) do třetího řádu včetně. Pak

$$y = \varphi(x, C) + f_2(x)\varphi^2(x, C) + f_3(x)\varphi^3(x, C). \quad (6.3.6)$$

$$y' = \frac{\varphi(x, C)}{g(x)} + \varphi^2(x, C) \left(f'_2(x) + 2 \frac{f_2(x)}{g(x)} \right) + \varphi^3(x, C) \left(f'_3(x) + 3 \frac{f_3(x)}{g(x)} \right). \quad (6.3.7)$$

$$y^2(x)y(s) = \varphi^2(x, C)\varphi(s, C). \quad (6.3.8)$$

Dosaďme (6.3.6), (6.3.7), (6.3.8) do rovnice (6.3.5), dostáváme pak

$$\begin{aligned} \varphi + (x^3 f'_2 + 2f_2)\varphi^2 + (x^3 f'_3 + 3f_3)\varphi^3 \\ = \varphi + f_2\varphi^2 + f_3\varphi^3 + \int_{0^+}^x x\varphi^2(x, C)\varphi(s, C)ds. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin φ dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi^1 &: 1 = 1 \\ \varphi^2 &: x^3 f'_2 + 2f_2 = f_2 \\ \varphi^3 &: x^3 f'_3 + 3f_3 = f_3 + \varphi^{-3}(x, C) \int_{0^+}^x x\varphi^2(x, C)\varphi(s, C)ds. \end{aligned}$$

Pro neznámé koeficienty $f_2(x)$, $f_3(x)$ získáme následující rovnice:

$$x^3 f_2' = -f_2. \quad (6.3.9)$$

$$x^3 f_3' = -2f_3 + x\varphi^{-1}(x, C) \int_{0+}^x \varphi(s, C) ds. \quad (6.3.10)$$

Z (6.3.9) plyne, že $f_2(x) = [\varphi(x, C)]^{-1}$. Položme

$$u = \varphi^{-1}(x, C) \int_{0+}^x \varphi(s, C) ds. \quad (6.3.11)$$

Derivováním (6.3.11) dostáváme diferenciální rovnici

$$x^3 u' = -u + x^3. \quad (6.3.12)$$

která je tvaru (6.3.3). Nyní ověříme předpoklady Věty 6.3.1. Je zřejmé, že

$$g(x) = x^3, \quad q = -1, \quad p(x) = x^3,$$

tedy

$$g'(x) = 3x^2 \sim \psi_1(x)g^{\lambda_1}(x) = 3(x^3)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3}, \quad \psi_1(x) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \psi_1(x)g^\tau(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 3(x^3)^\tau = 0,$$

kde τ je libovolná kladná konstanta. Ověříme předpoklad II)

$$p(x) = b_0(x)g^\lambda(x) + o(b_1(x)g^{\lambda+\epsilon}).$$

V našem případě platí $x^3 = 1(x^3)^1 \Rightarrow b_0(x) = 1, \lambda = 1, b_1(x) = 0$. Zvolme $\epsilon > \frac{2}{3}$. Jelikož $b_0'(x) = 0$, pak $\psi_2(x) = 0$. Zvolme konstantu $\lambda_2 + 1 > \frac{2}{3}$.

Odtud $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi_2(x)g^\tau(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g^\tau(x)(b_0(x))^{-1} = 0$, $\nu \in (1, 1 + \min\{2/3, \lambda_2 + 1, \epsilon\})$.

Tedy $\nu \in (1, \frac{5}{3})$ a řešení diferenciální rovnice (6.3.12) má asymptotický tvar

$$u = x^3 + o(x^{3\nu}), \quad \nu \in (1, \frac{5}{3}).$$

Nyní rovnice (6.3.10) je tvaru

$$x^3 f_3' = -2f_3 + x^4 + O(x^{3\nu+1}), \quad \nu \in (1, \frac{5}{3}). \quad (6.3.13)$$

Aplikací Věty 6.3.1 na rovnici (6.3.13) dostáváme $\lambda_1 = 2/3$, $p(x) = x^4 + O(x^{3\nu+1})$. Odtud

$b_0(x) = 1$, $\lambda = \frac{4}{3}$, $b_1(x) = 1$. Položme $\epsilon = \nu - 1$, $\psi_2(x) = 0$. Zvolme $\lambda_2 + 1 > \frac{2}{3}$, pak $\nu_1 \in (\frac{4}{3}, 2)$ a řešení rovnice (6.3.13) má asymptotický tvar

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x^4 + O(x^{3\nu_1}).$$

Dostáváme tedy, že asymptotický rozklad řešení $y(x)$ rovnice (6.3.5) je tvaru

$$\begin{aligned} y(x, C) &\approx f_1(x)\varphi(x, C) + f_2(x)\varphi^2(x, C) + f_3(x)\varphi^3(x, C) \\ &= 2\varphi(x, C) + \left(\frac{1}{2}x^4 + O(x^{3\nu_1})\right)\varphi^3(x, C). \end{aligned}$$

6.4 Asymptotické odhady řešení

Obecnější singulární počáteční úlohy pro diferenciální a integrodiferenciální rovnice rozřešených (a nebo nerozřešených) vzhledem k derivaci neznámé funkce byly studovány v pracích [6], [26], [86], [87]. Je však potřeba zdůraznit, že velice malá pozornost byla věnována asymptotickým vlastnostem řešení.

V této kapitole se především soustředíme na asymptotické odhady řešení pro jisté třídy integrodiferenciálních rovnic a to vzhledem k obecnému řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice. Metody vyšetřování budou založeny na kombinaci Ważewského topologické metody a Schauderovy věty o pevném bodu.

Uvažujme následující počáteční singulární úlohu

$$\begin{aligned} g(t)y'(t) &= ay(t) \left[1 + f \left(t, y(t), \int_{0^+}^t K(t, s, y(s)) ds \right) \right], \\ y(0^+) &= 0, \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

kde $f \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K \in C(J \times J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $J = (0, t_0]$, $t_0 > 0$.

Předpokládejme, že funkce g , f , K splňují následující podmínky:

- (i) $a > 0$ je konstanta, $g(t) \in C^1(J)$, $g(t) > 0$, $g(0^+) = 0$, $g'(t) \sim \psi(t)g^\lambda(t)$ pro $t \rightarrow 0^+$, $\lambda > 0$, $\psi(t)g^\tau(t) = o(1)$ pro $t \rightarrow 0^+$ pro každé $\tau > 0$, $\psi \in C(J, \mathbb{R}^+)$.
- (ii) $|f(t, u, v)| \leq |u| + |v|$, $|\int_{0^+}^t K(t, s, y(t), y(s)) ds| \leq r(t)|y|$, $0 < r(t) \in C(J)$, $r(t) = \phi(t, C)o(1)$ pro $t \rightarrow 0^+$, kde $\phi(t, C) = C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{a}{g(s)} ds \right)$ je obecné řešení rovnice $g(t)y'(t) = ay(t)$.

Věta 6.4.1 Předpokládejme, že podmínky (i), (ii) platí pro každé $C \neq 0$, pak existuje řešení $y(t, C)$ počáteční problému (6.4.1) takové, že

$$|y^{(i)}(t, C) - \phi^{(i)}(t, C)| \leq \delta (\phi^2(t, C))^{(i)}, \quad i = 0, 1, \tag{6.4.2}$$

pro $t \in (0, t^\Delta]$, kde $0 < t^\Delta \leq t_0$, $\delta > 1$ je konstanta a t^Δ závisí na δ , C .

Důkaz. 1) Označme E Banachův prostor spojitých funkcí $h(t)$ na intervalu $[0, t_0]$ s normou

$$\|h(t)\| = \max_{t \in [0, t_0]} |h(t)|.$$

Nechť $S \subset E$ je množina funkcí $h(t) \in E$ splňující nerovnost

$$|h(t) - \phi(t, C)| \leq \delta \phi^2(t, C). \tag{6.4.3}$$

Množina S je neprázdná, konvexní a uzavřená.

2) Nyní zkonstruujeme zobrazení P .

Nechť $h_0(t) \in S$ je libovolná funkce. Dosaďme $h_0(s)$ za $y(s)$ do (6.4.1), dostáváme pak diferenciální rovnici

$$g(t)y'(t) = ay(t) \left[1 + f \left(t, y(t), \int_{0^+}^t K(t, s, h_0(s)) ds \right) \right]. \quad (6.4.4)$$

Položme

$$y(t) = \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \quad (6.4.5)$$

$$y'(t) = \phi'(t, C) + \frac{1}{g(t)} C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_1(t) \quad (6.4.6)$$

kde $0 < \alpha < 1$ je konstanta a funkce $Y_0(t)$, $Y_1(t)$ splňují diferenciální rovnici

$$g(t)Y_0'(t) = (\alpha - 1)aY_0(t) + Y_1(t). \quad (6.4.7)$$

Z (6.4.3) plyne

$$h_0(t) = \phi(t, C) + H_0(t), \quad |H_0(t)| \leq \delta \phi^2(t, C). \quad (6.4.8)$$

Dosaďme (6.4.5), (6.4.6) a (6.4.8) do (6.4.4), dostáváme pak

$$\begin{aligned} Y_1(t) = & aY_0(t) + \left(aC \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + aY_0(t) \right) \\ & \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \right. \\ & \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_0(s)) ds \right). \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Dosazením (6.4.9) do (6.4.7) dostaneme

$$\begin{aligned} g(t)Y_0'(t) = & \alpha aY_0(t) + \left(aC \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + aY_0(t) \right) \\ & \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \right. \\ & \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_0(s)) ds \right). \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Vzhledem k (6.4.5), (6.4.6) je zřejmé, že řešení (6.4.10) určuje řešení (6.4.4).

Nyní použijeme Ważewského topologickou metodu. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Vyšetříme chování integrálních křivek rovnice (6.4.10) vzhledem k hranici množiny

$$\Omega_0 \subset \Omega, \quad \Omega_0 = \{(t, Y_0) : 0 < t < t_0, u_0(t, Y_0) < 0\} \quad (6.4.11)$$

kde

$$u_0(t, Y_0) = Y_0^2 - \left(\delta C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1+\alpha)a}{g(s)} ds \right) \right)^2. \quad (6.4.12)$$

Vypočteme derivaci $\dot{u}_0(t, Y_0)$ podél trajektorií systému (6.4.10) vzhledem k hranici množiny

$$\partial\Omega_0 = \{(t, Y_0) : 0 < t < t_0, u_0(t, Y_0) = 0\}, \quad (6.4.13)$$

dostáváme pak

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(t, Y_0) = & \frac{2a}{g(t)} \left[\alpha Y_0^2(t) + \left(Y_0(t) C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + Y_0^2(t) \right) \right. \\ & \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \right. \\ & \left. \int_{0+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_0(s)) ds \right) \\ & \left. - \delta^2(1+\alpha)C^2 \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{2(1+\alpha)a}{g(s)} ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

Platí

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t)g^\tau(t) &= 0 \text{ pro každé } \tau > 0 \\ g'(t) &\sim \psi(t)g^\lambda(t) \text{ pro } t \rightarrow 0+, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k vlastnostem funkce $g(t)$ existuje kladná konstanta M tak, že platí

$$g'(t) < M, \quad t \in (0, t_0].$$

Odtud plyne

$$\int_{t_0}^t \frac{ds}{g(s)} < \frac{1}{M} \int_{t_0}^t \frac{g'(s)dt}{g(s)} = \frac{1}{M} \ln \frac{g(t)}{g(t_0)} \rightarrow -\infty \text{ pro } t \rightarrow 0+.$$

Tedy $\lim_{t \rightarrow 0+} \phi(t, C) = 0$ a dle L'Hospitalova pravidla $\phi^\tau(t, C)g^\sigma(t) = o(1)$, $t \rightarrow 0+$, σ je libovolné reálné číslo. Je tedy zřejmé, že mocniny řešení $\phi(t, C)$ mají rozhodující vliv na rychlost konvergence jednotlivých výrazů v (6.4.11) k nule.

Na základě předpokladů Věty 6.4.1 a definice $Y_0(t)$, $\phi(t, C)$, dostáváme, že první výraz $\alpha Y_0^2(t)$ v rovnici (6.4.14) má tvar

$$\alpha Y_0^2(t) = \alpha \delta^2 C^2 \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{2(1+\alpha)a}{g(s)} ds \right),$$

a druhý výraz v rovnici (6.4.14)

$$\begin{aligned} & \left(Y_0(t) C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + Y_0^2(t) \right) \\ & \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \int_{0+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_0(s)) ds \right) \end{aligned}$$

se dá ohraničit výrazem exponentem větším než

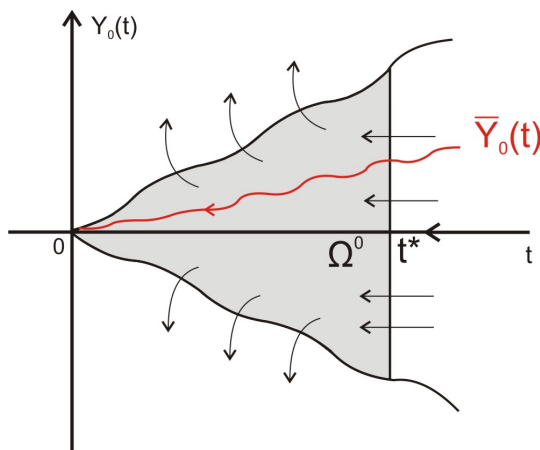
$$\int_{t_0}^t \frac{2(1+\alpha)a}{g(s)} ds$$

Odtud plyne

$$\operatorname{sgn} \dot{u}_0(t, Y_0) = \operatorname{sgn} \left(-\delta^2 C^2 (1+\alpha) \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{2(1+\alpha)a}{g(s)} ds \right) \right) = -1, \quad (6.4.15)$$

pro dostatečně malé t^* , které závisí na C , δ , $0 < t^* \leq t_0$.

Z relace (6.4.15) plyne, že každý bod množiny $\partial\Omega_0$ je bodem ostrého vstupu vzhledem k systému (6.4.10). Změníme-li orientaci osy t na opačnou, pak každý bod množiny $\partial\Omega_0$ je bodem ostrého výstupu vzhledem k nové souřadnicové soustavě. Podle Ważewského topologické metody existuje alespoň jedna integrální křivka (6.4.10), která leží v Ω_0 pro $t \in (0, t^*]$. Je zřejmé, že toto tvrzení zůstává v platnosti pro libovolnou funkci $h_0(t) \in S$. Tato situace je demonstrována na obr.6.



obr.6

Nyní dokážeme jednoznačnost řešení systému (6.4.10). Nechť $\bar{Y}_0(t)$ je také řešení systému (6.4.10). Položme $Z_0 = Y_0 - \bar{Y}_0$ a dosadíme do rovnice (6.4.10), dostáváme

diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}
 g(t)Z'_0 = & \alpha a Z_0 + \left(aC \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + a(t)Z_0(t) \right) \\
 & \times \left[f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) (Z_0(t) + \overline{Y}_0(t)), \right. \right. \\
 & \quad \left. \int_{0+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_0(s)) ds \right) \\
 & - f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) \overline{Y}_0(t), \right. \\
 & \quad \left. \left. \int_{0+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_0(s)) ds \right) \right]. \tag{6.4.16}
 \end{aligned}$$

Nechť

$$\Omega_1(\delta) = \{(t, Z_0) : 0 < t < t^*, u_1(t, Z_0) < 0\},$$

kde

$$u_1(t, Z_0) = Z_0^2 - \left(\delta C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1+\alpha-\mu)a(s)}{g(s)} ds \right) \right)^2, \quad 0 < \mu < \alpha.$$

Stejným způsobem uvedeným výše dostáváme

$$\operatorname{sgn} \dot{u}_1(t, Z_0) = -1 \tag{6.4.17}$$

pro $t \in (0, t^*]$. Je zřejmé, že $\Omega_0 \subset \Omega_1(\delta)$ pro $t \in (0, t^*]$. Nechť $\overline{Z}_0(t)$ je netriviální řešení systému (6.4.16) takové, že $(t_1, \overline{Z}_0(t_1)) \in \Omega_1$ pro $0 < t_1 < t^*$. Nechť $\bar{\delta} \in (0, \delta)$ je taková konstanta, že $(t_1, \overline{Z}_0(t_1)) \in \partial\Omega_1(\bar{\delta})$. Jestliže křivka $\overline{Z}_0(t)$ leží v $\Omega_1(\bar{\delta})$ pro $0 < t < t_1$, pak $(t_1, \overline{Z}_0(t_1))$ by byl bodem ostrého výstupu vzhledem k původní souřadnicové soustavě, což je spor s podmínkou (6.4.17). Tedy existuje pouze triviální řešení $Z_0(t) \equiv 0$ systému (6.4.16). Odtud plyne, že $Y_0 = \overline{Y}_0(t)$ je jediné řešení systému (6.4.10).

Z identity (6.4.5) dostáváme

$$|y_0(t, C) - \phi(t, C)| \leq \delta \phi^2(t, C)$$

kde $y_0(t, C)$ je řešení (6.4.4) pro $t \in (0, t^*]$. Podobně, z (6.4.6), (6.4.9) plyne

$$\begin{aligned}
 |y'(t, C) - \phi'(t, C)| &= \left| \frac{1}{g(t)} C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_1(t) \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{g(t)} C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) \right| \\
 &\quad \times \left(\left| a\delta C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1+\alpha)a}{g(s)} ds \right) \right| + \left| a\delta C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1+\alpha)a}{g(s)} ds \right) \right| \right) \\
 &\leq \frac{2\delta a}{g(t)} C^2 \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{2a}{g(s)} ds \right) = \delta (\phi^2(t, C))'.
 \end{aligned}$$

Je zřejmé, že (po spojitým prodloužení řešení $y_0(t)$ do bodu $t = 0$) operátor $P : h_0 \rightarrow y_0$ zobrazuje množinu S do sebe a tedy $PS \subset S$.

3) Zůstává dokázat totální spojitost operátoru P .

Nejdříve ukážeme, že operátor P zobrazuje každou podmnožinu množiny S v kompaktní množinu. Uvažujeme-li libovolnou podmnožinu $Q \subset S$, pak její obraz bude množina funkcí stejnoměrně ohraničených a rovnomocně spojitých. Rovnomocná spojitost plyne ze skutečnosti, že derivace daných funkcí jsou stejnoměrně ohraničeny. Tedy z libovolné nekonečné podmnožiny takových funkcí lze vybrat konvergentní podposloupnost, z čehož plyne, že Q je kompaktní množina.

Nyní dokážeme spojitost operátoru P .

Nechť $(h_r(t))$ je libovolná posloupnost funkcí v S taková, že

$$||h_r(t) - h_0(t)|| = \epsilon_r, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \epsilon_r = 0, \quad h_0(t) \in S. \quad (6.4.18)$$

Řešení $\bar{Y}_k(t)$ rovnice

$$\begin{aligned}
 g(t)Y_0'(t) &= \alpha a Y_0(t) + \left(aC \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + aY_0(t) \right) \\
 &\quad \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \right. \\
 &\quad \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + H_k(s)) ds \right)
 \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

odpovídá funkci $h_k(t)$ a $\bar{Y}_k(t) \in \Omega_0$ pro $t \in (0, t^*]$. Podobně řešení $\bar{Y}_0(t)$ z (6.4.10) odpovídá funkci $h_0(t)$.

Dokážeme, že $|\bar{Y}_k(t) - \bar{Y}_0(t)| \rightarrow 0$ konverguje stejnoměrně na intervalu $[0, t^\Delta]$, kde $0 < t^\Delta \leq t^*$, t^Δ je dostatečně malá konstanta, která bude specifikována později.

Uvažujeme oblast

$$\Omega_{0k} = \{(t, Y_0) : 0 < t < t^*, u_{0k}(t, Y_0) < 0\},$$

kde

$$u_{0k}(t, Y_0) = (Y(t) - \overline{Y}_0(t))^2 - \left(\epsilon_k C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1 + \alpha - \nu)a}{g(s)} ds \right) \right)^2,$$

$$0 < \nu < \alpha, \quad k \geq 1.$$

Existuje dostatečně malá konstanta $t^\Delta \leq t^*$ taková, že $\Omega_0 \subset \Omega_{0k}$ pro každé $k, t \in (0, t^\Delta]$. Vyšetříme chování integrálních křivek rovnice (6.4.19) vzhledem k hranici $\partial\Omega_{0k}$. Stejným způsobem uvedeným výše dostáváme

$$\operatorname{sgn} \dot{u}_{0k}(t, Y_0) = -1$$

pro $t \in (0, t^\Delta]$ a každé k . Podle Ważewského topologické metody existuje alespoň jedno řešení $\overline{Y}_k(t)$ ležící v Ω_{0k} pro $0 < t \leq t^\Delta$. Odtud plyne

$$|\overline{Y}_k(t) - \overline{Y}_0(t)| \leq \epsilon_k C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1 + \alpha - \nu)a}{g(s)} ds \right) \leq M_1 \epsilon_k,$$

$M_1 > 0$ je konstanta, která závisí na C, t^Δ .

Z identity (6.4.5) plyne

$$|y_k(t) - y_0(t)| = C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1 - \alpha)a}{g(s)} ds \right) |\overline{Y}_k(t) - \overline{Y}_0(t)| \leq m \epsilon_k,$$

kde $m > 0$ je konstanta, která závisí na t^Δ, C, M_1 . Tedy P je spojitý operátor. Dokáža-li jsme, že operátor P splňuje předpoklady Schauderové věty o pevném bodě a tudíž existuje funkce $h(t) \in S$ taková, že $h(t) = P(h(t))$. Důkaz existence řešení (6.4.1) je kompletní.

Nyní dokážeme jednoznačnost řešení (6.4.1). Dosadíme-li (6.4.5), (6.4.6) do (6.4.1) dostáváme

$$Y_1(t) = aY_0(t) + \left(aC \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + a(t)Y_0(t) \right) \\ \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1 - \alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \right. \\ \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^s \frac{(1 - \alpha)a}{g(u)} du \right) Y_0(s) \right) ds \Bigg).$$

Rovnice (6.4.7) můžeme zapsat v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}
 g(t)Y_0'(t) = & \alpha a Y_0(t) + \left(aC \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + aY_0(t) \right) \\
 & \times f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) Y_0(t), \right. \\
 & \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^s \frac{(1-\alpha)a}{g(u)} du \right) Y_0(s) \right) ds \right).
 \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

Existuje řešení $y_0(t, C)$ rovnice (6.4.1) splňující (6.4.2) takové, že

$$y_0(t, C) = \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) U_0(t), \tag{6.4.21}$$

kde $U_0(t)$ je řešení rovnice (6.4.20).

Položme $W_0(t) = Y_0(t) - U_0(t)$ a dosaďme $W_0(t)$ do rovnice (6.4.20), pak platí

$$\begin{aligned}
 g(t)W_0'(t) = & \alpha a W_0(t) + a \left(C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + W_0(t) \right) \\
 & \times \left[f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) (W_0(t) + U_0(t)), \right. \right. \\
 & \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^s \frac{(1-\alpha)a}{g(u)} du \right) (W_0(s) + U_0(s)) ds \right) \\
 & - f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) U_0(t), \right. \\
 & \left. \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^s \frac{(1-\alpha)a}{g(u)} du \right) U_0(s) ds \right) \right].
 \end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Nechť

$$\Omega_{00} = \{(t, W_0) : 0 < t < t^\Delta, u_{00}(t, W_0) < 0\},$$

kde

$$u_{00}(t, W_0) = W_0^2 - \left(\delta \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{(1+\alpha-\mu)a(s)}{g(s)} ds \right\} \right)^2, \quad 0 < \mu < \alpha.$$

Jestliže rovnice (6.4.22) má pouze triviální řešení, které leží v Ω_{00} pak $Y_0(t) = U_0(t)$ by bylo jediné řešení rovnice (6.4.22) a tedy $y_0(t, C)$ by bylo jediné řešení rovnice (6.4.1), splňující (6.4.2) pro $t \in (0, t^\Delta]$.

Předpokládejme, že existuje netriviální řešení $\overline{W}_0(t)$ rovnice (6.4.22), které leží v Ω_{00} . Substitucí $\overline{W}_0(s)$ místo $W_0(t)$ do rovnice (6.4.22) dostáváme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}
 g(t)W_0'(t) = & \alpha a W_0(t) + a \left(C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\alpha a}{g(s)} ds \right) + W_0(t) \right) \\
 & \times \left[f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a}{g(s)} ds \right) (W_0(t) + U_0(t)), \right. \right. \\
 & \quad \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^u \frac{(1-\alpha)a}{g(u)} du \right) (\overline{W_0}(s) + U_0(s)) ds \right) \\
 & - f \left(t, \phi(t, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{(1-\alpha)a(s)}{g(s)} ds \right) U_0(t), \right. \\
 & \quad \left. \left. \int_{0^+}^t K(t, s, \phi(s, C) + C \exp \left(\int_{t_0}^s \frac{(1-\alpha)a}{g(u)} du \right) U_0(s) ds \right) \right].
 \end{aligned} \tag{6.4.23}$$

Pak pro derivaci $\dot{u}_{00}(t, W_0)$ podél trajektorií rovnice (6.4.23) vzhledem k $\partial\Omega_{00}$ platí

$$\operatorname{sgn} \dot{u}_{00}(t, W_0) = -1$$

pro $t \in (0, t^\Delta]$. Stejným způsobem jako v případě existence řešení (6.4.1) dostáváme, že v Ω_{00} existuje pouze triviální řešení (6.4.23). Důkaz je kompletní.

Příklad 6.4.1 *Uvažujme následující počáteční singulární problém:*

$$t^3 y'(t) = 2y(t) \left(1 + \frac{t}{1+t^2} y(t) + y(t) \int_0^t \frac{e^{-s^{-2}}}{s^2(1+y^2(s))} ds \right), \quad y(0^+) = 0. \tag{6.4.24}$$

V našem případě obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$t^3 y'(t) = 2y(t)$$

je tvaru $\phi(t, C) = C \exp(t_0^{-1} - t^{-1})$ a dále $g(t) = t^3$, $a = 2$, $\psi(t) = 3$, $\lambda = 2/3$, $\psi(t)g^\tau(t) = 3t^{3\tau} = o(1)$ pro $t \rightarrow 0^+$.

Dále

$$\begin{aligned}
 |f(t, u, v)| &= \left| \frac{t}{1+t^2} y(t) + y(t) \int_0^t \frac{e^{-s^{-2}}}{s^2(1+y^2(s))} ds \right| \leq \\
 &\leq |y(t)| + \left| \int_0^t \frac{e^{-s^{-2}}}{s^2(1+y^2(s))} ds \right|,
 \end{aligned}$$

přičemž $r(t) = \exp(-t^{-2})$, $\exp(-t^{-2}) = C \exp(t_0^{-1} - t^{-1})o(1)$ pro $t \rightarrow 0^+$.

Odtud

$$\left| y(t) \int_0^t \frac{e^{-s^{-2}}}{s^2(1+y^2(s))} ds \right| \leq (\exp(-t^{-2})) |y(t)|.$$

jelikož všechny předpoklady Věty 6.4.1 jsou splněny, tak existuje pro každou konstantu $C \neq 0$ jediné řešení $y(t, C)$ rovnice (6.4.24) takové, že

$$\left| y^{(i)}(t, C) - \left(C \exp \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t} \right) \right)^{(i)} \right| \leq \delta \left[\left(C \exp \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t} \right) \right)^2 \right]^{(i)}, \quad i = 0, 1,$$

pro $t \in (0, t^\Delta]$.

7 Systémy integrodiferenciálních rovnic

7.1 Singulární počáteční úloha pro Volterrové a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice

Problém vyšetřování Fredholmových rovnic spočívá v tom, že nevystačíme s Lipschitzovými konstantami jako v případě Volterrových rovnic. Je proto nutné zavést jisté váhové normy exponenciálního charakteru a modifikovat Lipschitzovy podmínky, což je například ukázáno v pracích [64], [65]. V této kapitole rozšíříme výsledky prací [64], [65] na jistou třídu smíšených Fredholm-Volterrových integrodiferenciálních rovnic závislých na parametru .

Uvažujme singulární počáteční úlohu:

$$y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), \int_{0^+}^t K_1(t, s, y(t), y(s)) ds, \int_{0^+}^1 K_2(t, s, y(t), y(s)) ds, \mu \right), \quad (7.1.1)$$

$$y(0^+, \mu) = 0,$$

Předpokládejme, že platí následující podmínky:

- (I) $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \in C^0(\Omega)$,
 $\Omega = \{(t, u_1, u_2, u_3, \mu) \in J \times (\mathbb{R}^n)^3 \times \mathbb{R} : |u_1| \leq \phi(t), |u_2| \leq \psi(t), |u_3| \leq \psi(t)\}$,
 $J = (0, 1]$, $0 < \phi(t) \in C^0(J)$, $\phi(0^+) = 0$, $0 < \psi(t) \in C^0(J)$, $|\cdot|$ značí obvyklou normu v $\mathbb{R}^n$,
 $|\mathcal{F}(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu) - \mathcal{F}(t, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \bar{\bar{u}}_3, \mu)| \leq \sum_{i=1}^3 M_i |\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i|$
 pro všechna $(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu), (t, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \bar{\bar{u}}_3, \mu) \in \Omega$, $M_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.
- (II) $K_j : \Omega^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K_j \in C^0(\Omega_1)$, $\Omega_1 = \{(t, s, w, v) \in J \times J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |w| \leq \phi(t), |v| \leq \phi(t)\}$, $|K_1(t, s, \bar{w}, \bar{v}) - K_1(t, s, \bar{\bar{w}}, \bar{\bar{v}})| \leq [N_1 |\bar{w} - \bar{\bar{w}}| + N_2 |\bar{v} - \bar{\bar{v}}|]$,
 $|K_2(t, s, \bar{w}, \bar{v}) - K_2(t, s, \bar{\bar{w}}, \bar{\bar{v}})| \leq [N_3 e^{\lambda(s-t)} |\bar{w} - \bar{\bar{w}}| + N_4 e^{\lambda(t-s)} |\bar{v} - \bar{\bar{v}}|]$
 pro všechna $(t, s, \bar{w}, \bar{v}), (t, s, \bar{\bar{w}}, \bar{\bar{v}}) \in \Omega_1$, $N_j \geq 0$, $j = 1, 2$. $\lambda > 0$ je dostatečně malá konstanta, taková, že

$$\left(\frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} \right) < 1.$$

Nyní můžeme zformulovat základní výsledek týkající se existence a jednoznačnosti řešení dané počáteční úlohy:

Věta 7.1.1 *Nechť funkce $\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu)$, $K_j(t, s, w, v)$, $j = 1, 2$ splňují podmínky (I), (II) a navíc*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^3 g_i(t)|u_i|, \quad 0 < g_i(t) \in C^0(J), \quad \int_{0+}^t g_1(s)\phi(s)ds \leq \alpha\phi(t),$$

$$\int_{0+}^t (g_2(s) + g_3(s))\psi(s)ds \leq \beta\phi(t), \quad \alpha + \beta \leq 1,$$

pak počáteční úloha (7.1.1) má jediné řešení $y(t, \mu)$ pro každé $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in J$.

Důkaz. Nechť H je Banachův prostor spojitých vektorových funkcí

$$h : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad J_0 = [0, 1], \quad |h(t)| \leq \phi(t)$$

na J s normou

$$\|h\|_\lambda = \max_{t \in J_0} \{e^{-\lambda t} |h(t)|\},$$

kde $\lambda > 0$ je libovolný parametr. Počáteční úloha (7.1.1) je ekvivalentní systému integrálních rovnic

$$y(t) = \int_{0+}^t \mathcal{F} \left(s, y(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, y(s), y(w))dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, y(s), y(w))dw, \mu \right) ds \quad (7.1.2)$$

Definujme operátor T pomocí pravé strany rovnice (7.1.2)

$$T(h) = \int_{0+}^t \mathcal{F} \left(s, h(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, h(s), h(w))dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, h(s), h(w))dw, \mu \right) ds,$$

kde $h \in H$. Nechť $\mu \in R$ je pevné. Transformace T spojitě zobrazuje H do sebe, protože

$$\begin{aligned} |T(h)| &\leq \int_{0+}^t \left| \mathcal{F} \left(s, h(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, h(s), h(w))dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, h(s), h(w))dw, \mu \right) \right| ds \\ &\leq \int_{0+}^t \left[g_1(s)|h(s)| + g_2(s) \left| \int_{0+}^s K_1(s, w, h(s), h(w))dw \right| \right. \\ &\quad \left. + g_3(s) \left| \int_{0+}^1 K_2(s, w, h(s), h(w))dw \right| \right] ds \\ &\leq \int_{0+}^t (g_1(s)\phi(s) + g_2(s)\psi(s) + g_3(s)\psi(s)) ds \leq (\alpha + \beta)\phi(t) \leq \phi(t) \end{aligned}$$

pro každé $h \in H$.

Aplikací (I), (II) a definice $\|\cdot\|_\lambda$ dostáváme

$$|T(h_2) - T(h_1)| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{0+}^t \left| \mathcal{F} \left(s, h_2(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, h_2(s), h_2(w)) dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, h_2(s), h_2(w)) dw, \mu \right) \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{F} \left(s, h_1(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, h_1(s), h_1(w)) dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, h_1(s), h_1(w)) dw, \mu \right) \right| \\
 &\leq \int_{0+}^t \left(M_1 |h_2(s) - h_1(s)| + M_2 \int_{0+}^s |K_1(s, w, h_2(s), h_2(w)) - K_1(s, w, h_1(s), h_1(w))| dw \right. \\
 &\quad \left. + M_3 \int_{0+}^1 |K_2(s, w, h_2(s), h_2(w)) - K_2(s, w, h_1(s), h_1(w))| dw \right) ds \\
 &\leq \int_{0+}^t \left(M_1 |h_2(s) - h_1(s)| + M_2 \int_{0+}^s [N_1 |h_2(s) - h_1(s)| + N_2 |h_2(w) - h_1(w)|] dw \right. \\
 &\quad \left. + M_3 \int_{0+}^1 [N_3 e^{\lambda(s-w)} |h_2(s) - h_1(s)| + N_4 e^{\lambda(s-w)} |h_2(w) - h_1(w)|] dw \right) ds \\
 &\leq \|h_2 - h_1\|_\lambda \left(M_1 \int_{0+}^t e^{\lambda s} ds + M_2 N_1 \int_{0+}^t \int_{0+}^s e^{\lambda s} dw ds \right. \\
 &\quad + M_2 N_2 \int_{0+}^t \int_{0+}^s e^{\lambda w} dw ds + M_3 N_3 \int_{0+}^t \int_{0+}^1 e^{\lambda(s-w)} e^{\lambda w} dw ds \\
 &\quad \left. + M_3 N_4 \int_{0+}^t \int_{0+}^1 e^{\lambda(s-w)} e^{\lambda w} dw ds \right) \\
 &= \|h_2 - h_1\|_\lambda \left(M_1 \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right) + M_2 N_1 \left(\frac{te^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda^2} \right) + M_2 N_2 \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda} \right) \right. \\
 &\quad \left. + M_3 N_3 \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right) + M_3 N_4 \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right) \right) \\
 &\leq \|h_2 - h_1\|_\lambda e^{\lambda t} \left(\frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} \right).
 \end{aligned}$$

Tedy

$$\|T(h_2) - T(h_1)\|_\lambda = \max_{t \in J_0} \{e^{-\lambda t} |T(h_2) - T(h_1)|\} \leq q \|h_2 - h_1\|_\lambda,$$

kde

$$q := \frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2}.$$

Na základě Banachovy věty operátor T má jediný pevný bod h^* v prostoru H , tj. $h^*(t) \equiv T(h^*(t))$, $t \in J_0$. Tedy $y := h^*$ je požadované řešení počáteční úlohy (7.1.1).

Věta 7.1.2 *Nechť platí předpoklady Věty 7.1.1 a necht' existuje konstanta $L > 0$ a integrovatelná funkce $\gamma : J_0 \rightarrow J_0$, taková, že*

$$|\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_2) - \mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1)| \leq \gamma(t) |\mu_2 - \mu_1|,$$

kde $(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1), (t, u_1, u_2, u_3, \mu_2) \in \Omega$ a

$$\max_{t \in J_0} \left\{ e^{-\lambda t} \int_{0+}^t \gamma(s) ds \right\} \leq L,$$

pak řešení $y(t, \mu)$ počáteční úlohy (7.1.1) je spojitě vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in J \times \mathbb{R}$.

Důkaz. Definujme pro $h \in H$ operátor $T_\mu(h)$ pomocí pravé strany rovnice (7.1.2), pak dostáváme

$$\|T_\mu(h) - T_\mu(y)\|_\lambda \leq \left(\frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} \right) \|h - y\|_\lambda.$$

Na základě předpokladů Věty 7.1.2 platí

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda t} |T_{\mu_2}(h) - T_{\mu_1}(h)| \\ & \leq e^{-\lambda t} \int_{0+}^t \left| \mathcal{F} \left(s, h(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, h(s), h(w)) dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, h(s), h(w)) dw, \mu_2 \right) \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{F} \left(s, h(s), \int_{0+}^s K_1(s, w, h(s), h(w)) dw, \int_{0+}^1 K_2(s, w, h(s), h(w)) dw, \mu_1 \right) \right| ds \\ & \leq e^{-\lambda t} \int_{0+}^t \gamma(s) |\mu_2 - \mu_1| ds \leq L |\mu_2 - \mu_1|. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Tedy

$$\|T_{\mu_2}(h) - T_{\mu_1}(h)\|_\lambda \leq L |\mu_2 - \mu_1|.$$

Odtud a z Věty 7.1.1 plyne

$$\begin{aligned} & \|h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)\|_\lambda \\ & = \|T_{\mu_2}[h(t, \mu_2)] - T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] + T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] - T_{\mu_1}[h(t, \mu_1)]\|_\lambda \\ & \leq \|T_{\mu_2}[h(t, \mu_2)] - T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)]\|_\lambda + \|T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] - T_{\mu_1}[h(t, \mu_1)]\|_\lambda \\ & \leq \left(\frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} \right) \|h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)\|_\lambda + L |\mu_2 - \mu_1|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\|h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)\|_\lambda \leq \left[1 - \left(\frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} \right) \right]^{-1} L |\mu_2 - \mu_1|.$$

Funkce $h(t, \mu)$ je stejnoměrně spojitá vzhledem k proměnné $\mu \in \mathbb{R}$. Tedy $y(t, \mu)$ je spojitá vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in J \times \mathbb{R}$. Důkaz je kompletní.

Příklad 7.1.1 Uvažujme následující singulární počáteční problém

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{t}{3} y(t) + 2t^2 \int_{0+}^t \sqrt{s} e^{-\frac{1}{ts}} (y(t) + 2y(s)) ds \\ &+ \int_{0+}^1 e^{10(s-t)} \operatorname{arctg} \frac{\mu^2}{s} \left(\frac{y(t)}{2} + y(s) \right) ds + \sqrt{t^3 + 1}, \quad y(0^+, \mu) = 0. \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Nyní položme

$$M_1 = 1/3, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = 1, \quad N_1 = 1/e, \quad N_2 = 2/e, \quad N_3 = \pi/4, \quad N_4 = \pi/2, \quad \lambda = 10,$$

pak

$$q = \frac{M_1 + M_2 N_1 + M_3 N_3 + M_3 N_4}{\lambda} + \frac{M_2 N_2}{\lambda^2} = \frac{1/3 + 2/e + \pi/4 + \pi/2}{10} + \frac{4/e}{100} < 1.$$

Nyní

$$|F| \leq t/3|u_1| + 2t^2|u_2| + |u_3| \Rightarrow g_1(t) = t/3, \quad g_2(t) = 2t^2, \quad g_3(t) = 1.$$

Položme $\phi(t) = t^5/2$, $\psi(t) = t^5$, pak dostáváme

$$\int_0^t g_1(s)\phi(s)ds = \int_0^t \frac{s^6}{6}ds = \frac{t^7}{42} \leq \frac{1}{21}\phi(t) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{21}.$$

$$\int_0^t (g_2(s) + g_3(s))\psi(s)ds = \int_0^1 (2s^2 + 1)s^5ds \leq \frac{5}{12}t^5 \leq \frac{10}{12}\phi(t) \Rightarrow \beta = 10/12.$$

Tedy

$$(\alpha + \beta) = 1/21 + 10/12 < 1.$$

Na základě Věty 7.1.1 existuje jediné řešení počáteční úlohy (7.1.4) takové, že

$$|y(t, \mu)| \leq \frac{t^2}{2}.$$

7.2 Singulární počáteční úloha pro implicitní Volterrovy a Fredholmovy integrodiferenciální rovnice

Uvažujme následující singulární počáteční úlohu:

$$y'(t) = F\left(t, y(t), \int_{0+}^t K(t, s, y(s), y'(s)) ds, \mu\right), \quad y^{(i)}(0^+, \mu) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (7.2.1)$$

Předpokládejme:

- (i) $F : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C(\Omega^*)$, $\Omega^* = \{(t, u_1, u_2, \mu) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |u_1| \leq \phi_1(t), |u_2| \leq \psi_1(t)\}$, $I = (0, t_1]$, $t_1 > 0$, $0 < \phi_1(t) \in C(I)$, $\phi_1(0^+) = 0$, $0 < \psi_1(t) \in C(I)$, $|\cdot|$ značí obvyklou normu v $\mathbb{R}^n$.
 $|F(t, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \mu) - F(t, \overline{\overline{u}}_1, \overline{\overline{u}}_2, \mu)| \leq \sum_{i=1}^2 l_i |\overline{u}_i - \overline{\overline{u}}_i|$ pro všechna $(t, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \mu)$,
 $(t, \overline{\overline{u}}_1, \overline{\overline{u}}_2, \mu) \in \Omega^*$, $l_i > 0$, $i = 1, 2$.
- (ii) $K : \Omega_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \in C^0(\Omega_0^1)$, $\Omega_0^1 = \{(t, s, \nu_1, \nu_2) \in I \times I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |\nu_1| \leq \phi_1(t), |\nu_2| \leq \phi_1(t)\}$
 $|K(t, s, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2) - K(t, s, \overline{\overline{\nu}}_1, \overline{\overline{\nu}}_2)| \leq \sum_{j=1}^2 m_j |\overline{\nu}_j - \overline{\overline{\nu}}_j|$ pro všechna $(t, s, \overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2)$,
 $(t, s, \overline{\overline{\nu}}_1, \overline{\overline{\nu}}_2) \in \Omega_0^1$, $m_j > 0$, $j = 1, 2$.

Věta 7.2.1 *Nechť funkce $F(t, u_1, u_2, \mu)$, $K(t, s, \nu_1, \nu_2)$ splňují podmínky (i), (ii) a navíc*

$$|F| \leq \sum_{i=1}^2 c_i(t) |u_i|, \quad 0 < c_i(t) \in C(I), \quad i = 1, 2,$$

$$c_1(t) \int_{0+}^t \phi_1(s) ds \leq \alpha_1 \phi_1(t), \quad c_2(t) \psi_1(t) \leq \beta_1 \phi_1(t),$$

kde α_1, β_1 jsou kladná čísla taková, že $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Pak počáteční úloha (7.2.1) má jediné řešení $y(t, \mu)$ pro každé $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in I$.

Důkaz. Položme

$$y(t) = \int_{0+}^t r(s) ds,$$

kde $r(t) \in C(I)$ je neznámá funkce. Pak $y'(t) = r(t)$ a systém (7.2.1) je ekvivalentní systému integrálních rovnic

$$r(t) = F\left(t, \int_{0+}^t r(s) ds, \int_{0+}^t K\left(t, s, \int_{0+}^s r(\tau) d\tau, r(s)\right) ds, \mu\right). \quad (7.2.2)$$

Nechť H je Banachův prostor spojitých vektorových funkcí

$$h : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I_0 = [0, t_1], \quad |h(t)| \leq \phi_1(t)$$

pro každé $t \in I_0$ s normou

$$||h(t)|| = \max_{t \in I_0} \{e^{-\lambda t} |h(t)|\},$$

kde $\lambda > 0$ je libovolný parametr. Definujme operátor T pomocí pravé strany systému (7.2.2)

$$T(h) = F \left(t, \int_{0+}^t h(s) ds, \int_{0+}^t K \left(t, s, \int_{0+}^s h(\tau) d\tau, h(s) \right) ds, \mu \right),$$

kde $h \in H$. Nechť $\mu \in \mathbb{R}$ je pevné. Operátor T zobrazuje H spojitě do sebe, neboť

$$\begin{aligned} |T(h)| &= \left| F \left(t, \int_{0+}^t h(s) ds, \int_{0+}^t K \left(t, s, \int_{0+}^s h(\tau) d\tau, h(s) \right) ds, \mu \right) \right| \\ &\leq c_1(t) \int_{0+}^t |h(s) ds + c_2(t)| \int_{0+}^t K \left(t, s, \int_{0+}^s h(\tau) d\tau, h(s) \right) ds \\ &\leq c_1(s) \int_{0+}^t \phi_1(s) + c_2(t) \psi_1(t) \leq (\alpha_1 + \beta_1) \phi_1(t) = \phi_1(t). \end{aligned}$$

pro každé $h \in H$. Potřebujeme dokázat, že

$$\|T(h_2) - T(h_1)\|_\lambda \leq \left(\frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2} \right) \|h_2 - h_1\|_\lambda \quad (7.2.3)$$

pro všechna $h_1, h_2 \in H$. Užitím (i), (ii) a definice $\|\cdot\|_\lambda$ dostáváme

$$\begin{aligned} |T(h_2) - T(h_1)| &= \left| F \left(t, \int_{0+}^t h_2(s) ds, \int_{0+}^t K \left(t, s, \int_{0+}^s h_2(\tau) d\tau, h_2(s) \right) ds, \mu \right) \right. \\ &\quad \left. - F \left(t, \int_{0+}^t h_1(s) ds, \int_{0+}^t K \left(t, s, \int_{0+}^s h_1(\tau) d\tau, h_1(s) \right) ds, \mu \right) \right| \\ &\leq l_1 \int_{0+}^t |h_2(s) - h_1(s)| ds + l_2 \int_{0+}^t \left| K \left(t, s, \int_{0+}^s h_2(\tau) d\tau, h_2(s) \right) \right. \\ &\quad \left. - K \left(t, s, \int_{0+}^s h_1(\tau) d\tau, h_1(s) \right) \right| ds \\ &\leq l_1 \int_{0+}^t |h_2(s) - h_1(s)| ds + l_2 m_1 \int_{0+}^t \int_{0+}^s |h_2(\tau) - h_1(\tau)| d\tau ds \\ &\quad + l_2 m_2 \int_{0+}^t |h_2(s) - h_1(s)| ds \leq \\ &\leq l_1 \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \int_{0+}^t e^{\lambda s} ds + l_2 m_1 \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \\ &\quad \times \int_{0+}^t \int_{0+}^s e^{\lambda u} du ds + l_2 m_2 \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \int_{0+}^t e^{\lambda s} ds \\ &= l_1 \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) + l_2 m_1 \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \\ &\quad \times \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda} \right) + l_2 m_2 \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \left(\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \\ &< e^{\lambda t} \|h_2(t) - h_1(t)\|_\lambda \left(\frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

Tedy

$$||T(h_2) - T(h_1)|| = \max_{t \in I_0} \{T(h_2) - T(h_1)\} \leq \left(\frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2} \right) ||h_2 - h_1||_\lambda.$$

Nyní zvolme $\lambda > 0$ tak, že

$$\left(\frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2} \right) < 1.$$

Aplikací Banachovy věty o pevném bodě na operátor T pak dostáváme tvrzení Věty 7.2.1.

Věta 7.2.2 *Nechť platí předpoklady Věty 7.2.1 a necht existuje konstanta $k > 0$ a integrovatelná funkce $\epsilon : I_0 \rightarrow I_0$, $I_0 = [0, t_1]$ taková, že*

$$|F(t, u_1, u_2, \mu_2) - F(t, u_1, u_2, \mu_1)| \leq \epsilon(t)|\mu_2 - \mu_1|,$$

kde $(t, u_1, u_2, \mu_2), (t, u_1, u_2, \mu_1) \in \Omega^*$ a navíc

$$\max_{t \in J_0} \{e^{-\lambda t} \epsilon(t)\} \leq k.$$

Pak řešení $y(t, \mu)$ systému (7.2.1) je spojitě vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in I \times \mathbb{R}$.

Důkaz. Definujme stejným způsobem uvedeným výše pro $h \in H$ operátor $T_\mu(h)$ pomocí pravé strany systému (7.2.2). Odtud plyne

$$||T_\mu(h) - T_\mu(y)||_\lambda \leq \left(\frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2} \right) ||h - y||_\lambda.$$

Dle předpokladů Věty 7.2.2. dostáváme

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} |T_{\mu_2}(h) - T_{\mu_1}(h)| &\leq \\ &\leq e^{-\lambda t} \left| F \left(t, \int_{0+}^t h(s) ds, K \left(t, s, \int_{0+}^s h(\tau) d\tau, h(s) \right), \mu_2 \right) \right. \\ &\quad \left. - F \left(t, \int_{0+}^t h(s) ds, K \left(t, s, \int_{0+}^s h(\tau) d\tau, h(s) \right), \mu_1 \right) \right| \\ &\leq e^{-\lambda t} \epsilon(t) |\mu_2 - \mu_1| \leq k |\mu_2 - \mu_1| \end{aligned}$$

a tudíž

$$||T_\mu(h) - T_\mu(y)||_\lambda \leq k |\mu_2 - \mu_1|$$

Odtud a z Věty 7.2.1 plyne

$$\begin{aligned} ||h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)||_\lambda &= ||T_{\mu_2}[h(t, \mu_2)] - T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] + T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] - T_{\mu_1}[h(t, \mu_1)]||_\lambda \\ &\leq ||T_{\mu_2}[h(t, \mu_2)] - T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)]||_\lambda + ||T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] - T_{\mu_1}[h(t, \mu_1)]||_\lambda \\ &\leq \left(\frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2} \right) ||h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)||_\lambda + k |\mu_2 - \mu_1|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\|h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)\|_\lambda \leq \left(1 - \frac{l_1 + l_2 m_2}{\lambda} + \frac{l_2 m_1}{\lambda^2}\right)^{-1} k |\mu_2 - \mu_1|.$$

Odtud plyne, že $y(t, \mu)$ je spojitá vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in I \times \mathbb{R}$. Důkaz je kompletní.

Uvažujme nyní singulární počáteční úlohu pro implicitní systém Fredholmových integrodiferenciálních rovnic

$$y'(t) = \mathcal{F} \left(t, y(t), y'(t), \int_{0^+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s)) ds, \mu \right), \quad (7.2.4)$$

$$y^{(i)}(0^+, \mu) = 0, \quad i = 0, 1,$$

kde

(α_1) $\mathcal{F} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} \in C(\omega)$, $\omega = \{(t, u_1, u_2, u_3, \mu) \in I_1 \times (\mathbb{R}^n)^3 \times \mathbb{R} : |u_1| \leq \varphi_1(t), |u_2| \leq \varphi_2(t), |u_3(t)| \leq \psi^*(t)\}$, $I_1 = (0, t_2]$, $t_2 > 0$, $0 < \varphi_i(t) \in C(I_1)$, $\varphi_i(0^+) = 0$, $i = 1, 2$, $0 < \psi^*(t) \in C(I_1)$, $\int_{0^+}^t \varphi_2(s) ds \leq \varphi_1(t)$, $|\cdot|$ je obvyklá norma v $\mathbb{R}^n$,

$$|\mathcal{F}(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu) - \mathcal{F}(t, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \bar{\bar{u}}_3, \mu)| \leq \sum_{i=1}^3 p_i |\bar{u}_i - \bar{\bar{u}}_i|$$

pro všechna $(t, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \mu), (t, \bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \bar{\bar{u}}_3, \mu) \in \omega$, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

(α_2) $K : \omega^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $K \in C(\omega^1)$,

$$\omega^1 = \{(t, s, v_1, v_2, w_1, w_2) \in I_1 \times I_1 \times (\mathbb{R}^n)^4 : |v_1| \leq \varphi_1(t), |v_2| \leq \varphi_1(t), |w_1| \leq \varphi_2(t), |w_2| \leq \varphi_2(t)\},$$

$$|K(t, s, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2) - K(t, s, \bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2, \bar{\bar{w}}_1, \bar{\bar{w}}_2)| \leq \sum_{j=1}^2 q_j |\bar{v}_j - \bar{\bar{v}}_j| + q_3 t e^{-\lambda s} |\bar{w}_1 - \bar{\bar{w}}_1| + q_4 e^{\lambda(t-2s)} |\bar{w}_2 - \bar{\bar{w}}_2|$$

pro všechna $(t, s, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2), (t, s, \bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2, \bar{\bar{w}}_1, \bar{\bar{w}}_2) \in \omega^1$, $p_i, q_j \in \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$, $p_2 < 1$, $\lambda > 0$ je dostatečně velká konstanta taková, že $\left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} < 1.\right)$

Věta 7.2.3 *Nechť funkce $\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu)$, $K(t, s, v_1, v_2, w_1, w_2)$ splňuje podmínky (α_1), (α_2) a navíc nechť platí*

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=1}^3 z_i(t) |u_i|, \quad 0 < z_i(t) \in C(I_1), \quad i = 1, 2, 3, \quad \int_{0^+}^t z_1(t) \varphi_2(s) ds \leq \gamma_1 \varphi_2(t),$$

$$z_2(t) \varphi_2(t) \leq \gamma_2 \varphi_2(t) \quad z_3(t) \psi^*(t) \leq \gamma_3 \varphi_2(t), \quad \gamma_i \in \mathbb{R}^+, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1,$$

pak počáteční úloha (7.2.4) má jediné řešení $y(t, \mu)$ pro každé $\mu \in R$, $t \in I_1$.

Důkaz. Postup je analogický jako v případě systému (7.1.1). Položme

$$y(t) = \int_{0+}^t r(s)ds,$$

kde $r(t) \in C(I_1)$ je neznámá funkce. Pak $y'(t) = r(t)$ a systém (7.2.4) je ekvivalentní systému integrálních rovnic

$$r(t) = \mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t r(s)ds, r'(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t r(s)ds, \int_{0+}^s r(\tau)d\tau, r(t), r(s))ds, \mu \right). \quad (7.2.5)$$

Označme H Banachův prostor spojitých vektorových funkcí $h : I_1^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$I_1^0 = [0, t_2]$, $|h(t)| \leq \varphi_2(t)$ pro každé $t \in I_1^0$ s normou

$$\|h(t)\|_\lambda = \max_{t \in I_1^0} \{e^{-\lambda t} |h(t)|\},$$

kde $\lambda > 0$ je libovolný parametr. Definujme operátor T pomocí pravé strany systému (7.2.5)

$$T(h) = \mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t h(s)ds, h'(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h(s)ds, \int_{0+}^s h(\tau)d\tau, h(t), h(s))ds, \mu \right),$$

kde $h \in H$. Nechť $\mu \in R$ je pevné. Operátor T spojitě zobrazuje H do sebe, neboť

$$\begin{aligned} |T(h)| &\leq \left| \mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t h(s)ds, h(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h(s)ds, \int_{0+}^s h(\tau)d\tau, h(t), h(s))ds, \mu \right) \right| \\ &\leq z_1(t) \left| \int_{0+}^t h(s)ds \right| + z_2(t) |h(t)| + z_3(t) \left| \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h(s)ds, \int_{0+}^s h(\tau)d\tau, h(t), h(s))ds \right| \\ &\leq z_1(t) \int_{0+}^t \varphi_2(s)ds + \gamma_2 \phi_2(t) + z_3(t) \psi^*(t) \leq \varphi_2(t) \end{aligned}$$

pro každé $h \in H$. Potřebujeme dokázat, že

$$\|T(h_2) - T(h_1)\|_\lambda \leq \left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} \right) \|h_2 - h_1\|_\lambda,$$

pro každé $h_1, h_2 \in H$. Dle předpokladů (α_1) , (α_2) a definice normy $\|\cdot\|_\lambda$ dostáváme

$$\begin{aligned} |T(h_2) - T(h_1)| &= \\ &\left| \mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t h_2(s)ds, h_2(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h_2(s)ds, \int_{0+}^s h_2(\tau)d\tau, h_2(t), h_2(s))ds, \mu \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t h_1(s)ds, h_1(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h_1(s)ds, \int_{0+}^s h_1(\tau)d\tau, h_1(t), h_1(s))ds, \mu \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq p_1 \int_{0+}^t |h_2(s) - h_1(s)| ds + p_2 |h_2(t) - h_1(t)| \\
 &+ p_3 \int_{0+}^1 \left| K(t, s, \int_{0+}^t h_2(s) ds, \int_{0+}^s h_2(\tau) d\tau, h_2(t), h_2(s)) \right. \\
 &- \left. K(t, s, \int_{0+}^t h_1(s) ds, \int_{0+}^s h_1(\tau) d\tau, h_1(t), h_1(s)) \right| ds \\
 &\leq p_1 \|h_2 - h_1\|_\lambda \int_{0+}^t e^{\lambda s} ds + p_2 e^{\lambda t} \|h_2 - h_1\|_\lambda + p_3 \int_{0+}^1 \left(q_1 \int_{0+}^t |h_2(s) - h_1(s)| ds \right. \\
 &+ \left. q_2 \int_{0+}^s |h_2(\tau) - h_1(\tau)| d\tau q_3 t e^{-\lambda s} |h_2(t) - h_1(t)| + q_4 e^{\lambda(t-2s)} |h_2(s) - h_1(s)| \right) ds \\
 &\leq \|h_2 - h_1\|_\lambda \left(p_1 \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} + p_2 e^{\lambda t} + (p_3 q_1 + p_3 q_2) \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} + (p_3 q_3 t e^{\lambda t} + p_3 q_4 e^{\lambda t}) \right. \\
 &\times \left. \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda e^\lambda} \right) \right) \leq e^{\lambda t} \|h_2 - h_1\|_\lambda \left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} \right) \quad (7.2.6)
 \end{aligned}$$

Tedy

$$\|T(h_2) - T(h_1)\|_\lambda = \max_{t \in I_1^0} |T(h_2) - T(h_1)| \leq q \|h_2 - h_1\|_\lambda,$$

kde

$$q := \frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} < 1.$$

Nyní opět dle Banachovy věty o pevném bodě dostáváme tvrzení Věty 7.2.3.

Věta 7.2.4 *Nechť platí předpoklady Věty 7.2.3 a necht' existuje konstanta $r > 0$ a integrovatelná funkce $\kappa : I_1^0 \rightarrow I_1^0$, $I_1^0 = [0, t_2]$, přičemž*

$$|\mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_2) - \mathcal{F}(t, u_1, u_2, u_3, \mu_1)| \leq \kappa(t) |\mu_2 - \mu_1|,$$

kde $(t, u_1, u_2, u_3, \mu_2), (t, u_1, u_2, u_3, \mu_1) \in \omega$,

$$\max_{t \in J_0} \{e^{-\lambda t} \kappa(t)\} \leq r.$$

Pak řešení $y(t, \mu)$ (7.2.4) je spojitě vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in I_1 \times \mathbb{R}$.

Důkaz. Stejným způsobem uvedeným výše definujme pro $h \in H$ operátor $T_\mu(h)$ pomocí pravé strany systému (7.2.4). Dostáváme pak

$$\|T_\mu(h) - T_\mu(y)\|_\lambda \leq \left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} \right) \|h - y\|_\lambda.$$

Z předpokladů Věty 7.2.4 plyne

$$\begin{aligned}
 &e^{-\lambda t} |T_{\mu_2}(h) - T_{\mu_1}(h)| \\
 &\left| \mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t h(s) ds, h(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h(s) ds, \int_{0+}^s h(\tau) d\tau, h(t), h(s)) ds, \mu_2 \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| -\mathcal{F} \left(t, \int_{0+}^t h(s)ds, h(t), \int_{0+}^1 K(t, s, \int_{0+}^t h(s)ds, \int_{0+}^s h(\tau)d\tau, h(t), h(s))ds, \mu_1 \right) \right| \\
 & \leq e^{-\lambda t} \kappa(t) |\mu_2 - \mu_1| \leq r |\mu_2 - \mu_1|
 \end{aligned}$$

a tedy

$$||T_{\mu_2}(h) - T_{\mu_1}(h)||_{\lambda} \leq r |\mu_2 - \mu_1|$$

Odtud a z Věty 7.2.3. plyne

$$\begin{aligned}
 ||h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)||_{\lambda} &= ||T_{\mu_2}[h(t, \mu_2)] - T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] + T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] - T_{\mu_1}[h(t, \mu_1)]||_{\lambda} \\
 &\leq ||T_{\mu_2}[h(t, \mu_2)] - T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)]||_{\lambda} + ||T_{\mu_2}[h(t, \mu_1)] - T_{\mu_1}[h(t, \mu_1)]||_{\lambda} \\
 &\leq \left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} \right) ||h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)||_{\lambda} + r |\mu_2 - \mu_1|.
 \end{aligned}$$

Tudíž

$$||h(t, \mu_2) - h(t, \mu_1)||_{\lambda} \leq \left(1 - \left(\frac{p_1}{\lambda} + p_2 + \frac{p_3 \sum_{i=1}^4 q_i}{\lambda} \right) \right)^{-1} r |\mu_2 - \mu_1|.$$

Funkce $h(t, \mu)$ je stejnoměrně spojitá vzhledem k proměnné $\mu \in \mathbb{R}$, tedy $y(t, \mu)$ je spojitá vzhledem k proměnným $(t, \mu) \in I_1 \times \mathbb{R}$. Důkaz je kompletní.

Uvažujme nyní speciální tvar systému (7.2.4)

$$p_i(t)y'_i - y_i = \mathcal{F}_i \left(t, y(t), y'(t), \int_{0+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s))ds, \mu \right), \quad (7.2.7)$$

$$y^{(j)}(0^+, \mu) = 0, \quad j = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Chování řešení (7.2.7) budeme charakterizovat pomocí řešení přidruženého systému diferenciálních rovnic

$$p_i(t)y'_i - y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.2.8)$$

Položme

$$\eta_i(t, C_i) = C_i \exp \left(\int_1^t \frac{ds}{p_i(s)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.2.9)$$

Je zřejmé, že funkce (7.2.9) jsou obecná řešení systému (7.2.8). Označme

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n), \quad Y_i(t, \mu) = \frac{y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i)}{\eta_i(t, C_i)}, \quad G = (G_1, \dots, G_n),$$

$$G_i \left(t, y(t), y'(t), \int_{0+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s))ds, \mu \right)$$

$$= (p_i(t)\eta_i(t, C_i))^{-1} \mathcal{F}_i \left(t, y(t), y'(t), \int_{0+}^1 K(t, s, y(t), y(s), y'(t), y'(s)) ds, \mu \right)$$

$$\eta(t)(1 + Y(t)) = (\eta_1(t, C_1)(1 + Y_1(t, \mu)), \dots, \eta_n(t, C_n)(1 + Y_n(t, \mu))).$$

Pak

$$Y'_i = \frac{(y'_i(t, \mu) - \frac{\eta_i(t, C_i)}{p_i(t)}\eta_i(t, C_i) - (y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i))\frac{\eta_i(t, C_i)}{p_i(t)})}{\eta_i(t, C_i)^2} =$$

$$= \frac{p_i(t)y'_i(t, \mu) - y_i(t, \mu)}{p_i(t)\eta_i(t, C_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nyní můžeme systém (7.2.7) vyjádřit ve tvaru

$$Y'_i = G_i \left(t, \eta(t)(1 + Y(t)), (\eta(t)(1 + Y(t)))', \int_{0+}^1 K(t, s, \eta(t)(1 + Y(t)), \eta(s)(1 + Y(s)), \right.$$

$$\left. (\eta(t)(1 + Y(t)))', (\eta(s)(1 + Y(s)))' ds, \mu \right).$$

Označme

$$\mathcal{G}_i \left(t, Y(t), Y'(t), \int_{0+}^1 \mathcal{K}(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s)) ds, \mu \right)$$

$$= G_i \left(t, \eta(t)(1 + Y(t)), (\eta(t)(1 + Y(t)))', \int_{0+}^1 K(t, s, \eta(t)(1 + Y(t)), \eta(s)(1 + Y(s)), \right.$$

$$\left. (\eta(t)(1 + Y(t)))', (\eta(s)(1 + Y(s)))' ds, \mu \right).$$

Tedy

$$Y'_i = \mathcal{G}_i \left(t, Y(t), Y'(t), \int_{0+}^1 \mathcal{K}(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s)) ds, \mu \right). \quad (7.2.10)$$

Předpokládejme, že platí následující podmínky:

- (I*) $\mathcal{G} \in C(\hat{\Omega})$,
 $\hat{\Omega} = \{(t, Y, Y', u, \mu) \in I_1 \times (R^n)^3 \times R : |Y| \leq \varphi_1(t), |Y'| \leq \varphi_2(t), |u| \leq \psi^*(t)\}$,
 $|\mathcal{G}(t, \bar{Y}, \bar{Y}'\bar{u}, \mu) - \mathcal{G}(t, \bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Y}}', \bar{\bar{u}}, \mu)| \leq p_1|\bar{Y} - \bar{\bar{Y}}| + p_2|\bar{Y}' - \bar{\bar{Y}}'| + p_3|\bar{u} - \bar{\bar{u}}|$
 pro všechna $(t, \bar{Y}, \bar{Y}', \bar{u}, \mu), (t, \bar{\bar{Y}}, \bar{\bar{Y}}', \bar{\bar{u}}, \mu) \in \hat{\Omega}$.
- (II*) $\mathcal{K} \in C(\hat{\Omega}_1)$, $\hat{\Omega}_1 = \{(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s)) \in I_1 \times I_1 \times (R^n)^4 : |Y(t)| \leq \varphi_1(t), |Y(s)| \leq \varphi_1(t), |Y'(t)| \leq \varphi_2(t), |Y'(s)| \leq \varphi_2(t)\}$,
 $|\mathcal{K}(t, s, \bar{Y}(t), \bar{Y}(s), \bar{Y}'(t), \bar{Y}'(s)) - \mathcal{K}(t, s, \bar{\bar{Y}}(t), \bar{\bar{Y}}(s), \bar{\bar{Y}}'(t), \bar{\bar{Y}}'(s))| \leq$
 $\leq q_1|\bar{Y}(t) - \bar{\bar{Y}}(t)| + q_2|\bar{Y}(s) - \bar{\bar{Y}}(s)|$
 $+ q_3te^{-\lambda s}|\bar{Y}'(t) - \bar{\bar{Y}}'(t)| + q_4e^{\lambda(t-2s)}|\bar{Y}'(s) - \bar{\bar{Y}}'(s)|$
 pro všechna $(t, s, \bar{Y}(t), \bar{Y}(s), \bar{Y}'(t), \bar{Y}'(s)),$
 $(t, s, \bar{\bar{Y}}(t), \bar{\bar{Y}}(s), \bar{\bar{Y}}'(t), \bar{\bar{Y}}'(s)) \in \hat{\Omega}_1$.

Nechť funkce $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, $\psi^*(t)$ a konstanty p_i, q_j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, 4$ splňují stejné podmínky jako ve Větě 7.2.3.

Věta 7.2.5 *Nechť funkce $\mathcal{G}(t, Y(t)Y'(t), \mu)$, $\mathcal{K}(t, s, Y(t), Y(s), Y'(t), Y'(s))$ splňují podmínky (I^*) , (II^*) a nechť*

$$|\mathcal{G}| \leq z_1(t)|Y| + z_2(t)|Y'| + z_3(t)|u|, \quad 0 < z_i(t) \in C(I_1), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\int_{0+}^t z_1(t)\varphi_2(s)ds \leq \gamma_1\varphi_2(t), \quad z_2(t)\varphi_2(t) \leq \gamma_2\varphi_2(t) \quad z_3(t)\psi^*(t) \leq \gamma_3\varphi_2(t),$$

$$\gamma_i \in \mathbb{R}^+, \quad \sum_{i=1}^3 \gamma_i = 1, \quad 0 < p_i(t) \in C(I_1), \quad \int_{0+}^1 \frac{dt}{p_i(t)} = \infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak existuje jediné řešení $y(t, \mu) = (y_1(t, \mu), \dots, y_n(t, \mu))$ systému (7.2.7) splňující nerovnosti

$$|y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i)| \leq \varphi_1(t)|\eta_i(t, C_i)|,$$

$$|y'_i(t, \mu) - \eta'_i(t, C_i)| \leq \varphi_1(t)|\eta'_i(t, C_i)| + \varphi_2(t)|\eta_i(t, C_i)|$$

na intervalu I_1 , $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. Systém (7.2.10) splňuje všechny předpoklady Věty 7.2.3. Tedy existuje jediné řešení $Y(t, \mu) = (Y_1(t, \mu), \dots, Y_n(t, \mu))$ systému (7.2.10) takové, že platí $|Y_i(t, \mu)| \leq \varphi_1(t)$, $i = 1, \dots, n$. Odtud a na základě vlastností funkcí $Y_i(t)$ pak dostáváme

$$|Y_i(t, \mu)| = \left| \frac{y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i)}{\eta_i(t, C_i)} \right| \leq \varphi_1(t) \Rightarrow |y_i(t, \mu) - \eta_i(t, C_i)| \leq \varphi_1(t)|\eta_i(t, C_i)|$$

$$Y'_i = \frac{y'_i(t) - \eta'_i(t, C_i)}{\eta_i(t, C_i)} - \frac{y_i(t) - \eta_i(t, C_i)}{p_i(t)\eta_i(t, C_i)}.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} |y'_i(t) - \eta'_i(t, C_i)| &\leq |\eta_i(t, C)|\varphi_2(t) + \frac{1}{p(t)}|\eta_i(t, C_i)|\varphi_1(t) = \\ &= |\eta_i(t, C)|\varphi_2(t) + \eta'_i(t, C_i)|\varphi_1(t). \end{aligned}$$

Důkaz je kompletní.

8 Závěr

Práce obsahuje nové výsledky o existenci, jednoznačnosti a asymptotickém chování řešení singulární počáteční úlohy pro jisté třídy obyčejných diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic v oblatech, které jsou homeomorfní kuželu s vrcholem v počátečním bodě.

Singulární počáteční úlohy jsou výsledkem matematických modelů některých technických i přírodních jevů. Nacházejí uplatnění například v teorii regulace, teorii elektrických obvodů a terminionických proudů, v mechanice kapalin a v poslední době i v biologii. V mnoha případech mají tyto počáteční úlohy komplikovaný tvar, proto je přirozená snaha používat k jejich vyšetřování asymptotických metod. V případě skalárních diferenciálních rovnic a integrodiferenciálních rovnic nacházejí uplatnění modifikace dekompozičních metod a v poslední době zejména perturbčních homotopických metod.

Výsledky práce ukazují, že lze očekávat, že uvedenými metodami bude možné studovat i obecnější systémy funkcionálních diferenciálních rovnic zejména zlomkové diferenciální rovnice. Některé výsledky ohledně modifikace Adomianovy dekompoziční metody pro zlomkové diferenciální rovnice ve smyslu Caputovy derivace byly již publikovány v práci [8]. Z hlediska aplikací zlomkových funkcionálních rovnic v teorii optimální regulace a v silnoprůdné elektrotechnice je tento směr vyšetřování kvalitativních vlastností zlomkových funkcionálních rovnic aktuální a bude námětem pro další studium.

9 Seznam literatury

Reference

- [1] ABBAOUI K., CHERRUAULT Z. *Convergence of Adomian's method applied to differentialequations*, Comp. Math. Appl., 28, 1994, 103-109.
- [2] ADOMIAN,G., *A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation*, Math. Comput. Modelling, 13(7), 1990, 17-43.
- [3] ADOMIAN,G., RACH, R., *Noise terms in decomposition series solution*, Comput. Math. Appl., 24(11), 1992, 61-64.
- [4] ADOMIAN,G., RACH, R., SHAWAGFEH, N.T., *On the analytic solution of the Lane-Emden equation* , Found. Phys. Lett., 8(2), 1995, 161-185.
- [5] ADOMIAN G. *Solving frontier problem of physics: the decomposition method*, Kluwer Academic Press, 1994.
- [6] AGARWAL R.P., O'REGAN D., ZERNOV A.E. *A singular initial value problem for some functional differential equations*, J. Appl. Math. Stochastic Anal., 3, 2005, 261-270.
- [7] ARCHALOUSOVÁ O. *Application of Ważewski's topological method*, In Proceedings of the 16th Conference Student EEICT 2010. Brno: NOV PRESS s.r.o., 2010, 64-68. ISBN: 978-80-214-4079-1.
- [8] ARCHALOUSOVÁ O., ŠMARDA Z. *Adomian decomposition method for fractional differential equations*, In Proceedings of XXIXth International Colloquium on Education Process, Brno 2011, 1-6 (přijato do tisku).
- [9] BAJZAKOV A.B. *Asymptotic and analytic structure of solutions of certain nonlinear integral equation with irregular singular point*, Inst. matematiki AN BSSR, 24, 1983, 181-189 (in Russian).
- [10] BAŠTINEC J., DIBLÍK J. *On existence of solutions of a singular Cauchy-Nicoletti problem for a system of integrodifferential equations*, Demonstr. Math., 30, 1997, 747-760.
- [11] BAŠTINEC J., DIBLÍK J. *Three-point singular boundary-value problem for a system of three differential equations*, Mathematical Communications, 3, 1998, 211-219. ISSN 1331-0623.
- [12] BELLOMO M., SARAFYAN D. *On Adomian's decomposition metohods and some comparisons with Picard's iterative scheme*, J. Math. Anal. Appl., 123, 1987, 389-400.
- [13] BENCHOHRA M. *On initial value problem for an integrodifferential equation*, An. Stiint. Univ. "AL.I.Cuza" IASI, S.I.Mat. XLV, 1999, 297-304.

- [14] BYKOV J.V. *On some problems of the theory of integrodifferential equations*, Frunze, 1957, 327p. (in Russian).
- [15] ČEČIK V.A. *Investigation of systems of ordinary differential equations with a singularity*, Trudy Mosk. mat. obščestva, 8, 1959, 155-198, (in Russian).
- [16] DIBLÍK J. *Asymptotic behavior of solutions of certain differential equation partially solvable with respect to derivative*, Sibirskij mat. žurnal, 23, 1982, 80-91 (in Russian).
- [17] DIBLÍK J. *Asymptotic behavior of solutions of a differential equation partially solved with respect to the derivative*, Sib. Math. J., 23(5), 1982, 654-662 (in Russian).
- [18] DIBLÍK J. *Sufficient conditions of existence of bundles O -curves of the singular differential equations of the first order*, Diff. uravnenija, 21, 1985, 898-899 (in Russian).
- [19] DIBLÍK J. *On existence of O -curves of certain system of differential equations*, Math. nachr., 122, 1985, 247-258 (in Russian).
- [20] DIBLÍK J. *On existence of solutions of singular Cauchy problem for system of differential equations nonsolvable to a derivation*, Publ. Inst. Math., 37(51), 1985, 73-80.
- [21] DIBLÍK J. *Existence of solutions of a real system of ordinary differential equations, starting at a singular point*, Ukr. Math. J., 38(6), 1986, 588-592 (in Russian).
- [22] DIBLÍK J. *The singular Cauchy-Nicoletti problem for system of two ordinary differential equations*, Math. Bohem., 1, 1992, 55-67.
- [23] DIBLÍK J., RŮŽIČKOVÁ M. *Existence of positive solutions of a singular initial problem for a nonlinear system of differential equations*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 34, 2004, 923-944.
- [24] DIBLÍK J., RŮŽIČKOVÁ M. *Inequalities for solutions of singular initial problems for Carathéodory systems via Ważewski's principle*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 69(12), 2008, 657-656.
- [25] DIBLÍK J., NOWAK C. *A nonuniqueness criterion for a singular system of two ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis, 64, 2006, 637-656. ISSN 0362-546X.
- [26] DYSHKO A., KONYUCHOVA N., SUKOV A. *Singular problem for a third-order nonlinear ordinary differential equation arising in fluid dynamics*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 47(7), 2007, 1108-1128. ISSN 0041-5553.

- [27] EL-SAYED, S.M., *Multi-integral methods for nonlinear boundary-value problems, A fourth order method for a singular two points boundary value problem*, J. Comput. Math., 71, 1999, 259-269.
- [28] ERDÉLYI A. *Asymptotic expansions*, Moskva, 1962 (in Russian).
- [29] FEDOROV V.D. *Analogy of Wazewski's topological method for integrodifferential equations*, Issled. po integr.-diff. uravn., Frunze, 1961, 111-132 (in Russian).
- [30] FILIPPOVA O. *Integrodifferential equations in the theory of electrical circuits and their properties*, In Proceedings of XXV. International Colloquium on the Acquisition Process Management. 1. Brno: University of defence, Brno, 2007, 1-5. ISBN 80-7231-139-5.
- [31] FILIPPOVA O. *Volterra integrodifferential equations with difference kernel and their applications in the theory of electrical circuits*, In Proceedings of the sixth International Conference on Soft Computing Applied in Computers and Economic Enviroments, 2008, 12-15. ISBN 80-227-1995-1.
- [32] FILIPPOVA O., ŠMARDÁ Z. *Singular initial value problem for Volterra integrodifferential equations*, In Proceedings of the First International Forum of Young Researchers. Izhevsk: design. Publishing House of ISTU, 2008, 331-336. ISBN 978-5-7526-0355-6.
- [33] FILIPPOVA O., ŠMARDÁ Z. *Singular initial problem for nonlinear integrodifferential equations of Fredholm-Volterra type*, In The seventh International mathematical Wotkshop. Brno: FAST VUT v Brně, 2008, 24-25. ISBN 978-80-214-3727-2.
- [34] GOLBERG M.A. *A note on the decomposition method for operator equation*, Appl. Math.Comput., 106, 1999, 215-230.
- [35] HARTMAN Ph. *Ordinary differential equations*, New York, London, Sydney, 1964.
- [36] HASAN Y.Q., ZHU L.M. *Solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations*, Journal of Applied Sciences 7, 17, 2007, 2505-2508. ISSN 0973-0176.
- [37] CHANDRASEKAR, S., *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York, 1967.
- [38] CHAWLA,M.M., KATTI, C.P., *A finite-difference method for a class of singular boundary-value problem*, IMA, J. Numer. Anal., 4, 1984, 457-467.
- [39] CHERRUAULT, Y., *Convergence of Adomian's method*, Math. Comput. Modelling, 14, 1990 , 83-93.

- [40] CHERRUAULT, Y., SACCOMANDI, G., *Some new results for convergence of Adomian's method applied to integral equations*, Math. Comput, Modelling, 16(2), 1992, 85-92.
- [41] IMANALIEV M. *Oscillation and stability of solutions of singular-perturbed integrodifferential equations*, Frunze, 1974.
- [42] IYENGAR S.R.K., JAIN P. *Spline difference method for a singular two-point boundary value problems*, Num. Math., 50, 1987, 363-376.
- [43] IZÉ A.F., CARVALHO L.A.V. *Extension of Wazewski's topological method to integrodifferential equations*, Anais da Academia Brasileira de Ciencias, 47, 1975, 177-181.
- [44] KIGURADZE I.T. *Cauchy problem for singular systems of ordinary differential equations*, Diff. uravnenija, 10, 1965, 1271-1291 (in Russian).
- [45] KIGURADZE I.T. *Some singular boundary problems for ordinary differential equations*, Tbilisi, 1975 (in Russian).
- [46] KONJUCHOVA N.B. *Singular Cauchy problems for systems of ordinary differential equations*, Žurnal vyč. mat. i fiziki, 5, 1981, 629-645 (in Russian).
- [47] LEFSCHETZ S. *Geometric theory of differential equations*, Moskva, 1961, 110-121 (in Russian).
- [48] LOTKA A.J. *Mathematical Biology*, New York, 1956.
- [49] NORKIN C.K. *On asymptotic behavior of O -solutions of multidimensional systems*, Diff. uravnenija, 11, 1978, 2079-2081 (in Russian).
- [50] NORKIN C.K. *On asymptotic behavior and structure of the integral O -set of certain singular system*, Diff. uravnenija, 22, 1986, 228-236 (in Russian).
- [51] PROSENJUK L.G., JACENKO L.A. *On behavior of solutions of certain real differential equations of the second order unsolvable with respect derivative*, Ukr. mat. žurnal, 4, 1983, 519-524 (in Russian).
- [52] PEROV A.I. *On Cauchy singular problem*, Trudy seminara po funkc. analizu, Voronežsk. un-ta, 7, 1963, 104-107 (in Russian).
- [53] RACH R. *On the Adomian decomposition method and comparison with Picard method*, J.Math. Anal. Appl., 128, 1987, 480-483.
- [54] RUSSELL R.D., SHAMPINE L.F. *Numerical method for singular boundary value problem*, SIAM J. Num. Anal., 12, 1975, 13-36. ISSN 0036-1429.
- [55] SRZEDNICKI R. *Wazewski method and Conley index, handbook of differential equations: ordinary differential equations*, A. Cañada, P. Drábek and A. Fonda, Eds. vol.1, pp. 591-684, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 2004.

- [56] ŠMARDA Z. *The existence and asymptotic behavior of solutions of certain class of the integrodifferential equations partially solvable with respect to derivative*, Demonstratio Mathematica, 22(2), 1989, 208-214. ISSN 0420-1213.
- [57] ŠMARDA Z. *The asymptotic behaviour of solutions of the singular integrodifferential equation*, Demonstratio Mathematica, 22(2), 1989, 293-307.
- [58] ŠMARDA Z. *The existence and asymptotic behavior of solutions of certain class of the integrodifferential equations*, Archivum Mathematicum, 26, 1990, 7-18. ISSN 0044-8753.
- [59] ŠMARDA Z. *On the uniqueness of solution of the singular problem for certain class of integrodifferential equations*, Demonstratio Mathematica, 25(4), 1992, 835-841.
- [60] ŠMARDA Z. *On a singular initial value problem for a system of integrodifferential equations depending on a parameter*, Fasciculi Mathematici, 24, 1995, 123-126.
- [61] ŠMARDA Z. *On solutions of an implicit singular system of integrodifferential equations depending on a parameter*, Demonstratio Mathematica, 31(1), 1998, 125-130.
- [62] ŠMARDA Z. *On an initial value problem for singular integrodifferential equations*, Demonstratio Mathematica, 35(4), 2002, 803-811. ISSN 0420-1213.
- [63] ŠMARDA Z. *Existence and uniqueness of solutions of nonlinear integrodifferential equations*, Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, 1(2), 2005, 73-77. ISSN 1336-9180.
- [64] ŠMARDA Z. *On singular initial value problem for nonlinear Fredholm integrodifferential equations*, Fasciculi Mathematici, 1(37), 2006, 77-83. ISSN 00444413.
- [65] ŠMARDA Z. *Implicit singular integrodifferential equations of Fredholm type*, Tatra Mt. Math. Publ., 38, 2007, 255-263.
- [66] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Current characteristic of a simple electric circuit described by differential and integrodifferential equation*, In Proceedings of electronic version of reviewed contribution. Brno: UO Brno, 2008, 1-6. ISBN 978-80-7231-511-6.
- [67] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Singular initial problem for Fredholm-Volterra integrodifferential equations I*, In Proceedings of the 8 th International Conference Aplimat 2009. Bratislava: Slovak University of Technology, 2009, 141-146. ISBN 978-80-89313-31-0.
- [68] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Singular initial problem for Fredholm-Volterra integrodifferential equations II*, Journal of Applied Mathematics, 2009, roč. II., č. 2, 69-74. ISSN 1337-6365.

- [69] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Asymptotic equivalence of systems of integrodifferential equations*, In Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Thesis of Conference Reports. Kyiv NAS of Ukraine, 2009, 270-271. ISBN: 80-85960-92-3.
- [70] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Boundedness and asymptotic behavior of solutions of integrodifferential equations*, In Proceedings of electronic version of reviewed contribution. UNOB Brno, 2009, 1-4. ISBN: 978-80-7231-650-2.
- [71] ŠMARDA Z., FILIPPOVA O. *Asymptotic expansions of solutions of certain classes of nonlinear singular integrodifferential equations*, In Seventh International Conference on Soft Computing Applied in Computer and Economic Environments, 2009, 185-188. ISBN: 978-80-7314-163-9.
- [72] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Adomian decomposition method for certain singular initial value problems II*, Journal of Applied Mathematics, 2010, roč. 2010 III., č. 2, 91-98. ISSN: 1337-6365.
- [73] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Comparison of Adomian decomposition method and Picard method*, In Proceedings of International Colloquium on the management of Educational Process. Brno: UNOB Brno, 2010, 27-31. ISBN: 978-80-7231-733-2.
- [74] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Adomian decomposition method for singular differential equations of the second order*, In Proceedings MFL-2010. Alušta, Krym: Simferopol, 2010, 162-163. ISBN: 978-966-491-137-2.
- [75] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Adomian decomposition method for certain singular initial value problems I*, In Proceedings of the 9th International Conference Aplimat 2010. Bratislava: 2010, 183- 188. ISBN: 978-80-89313-47-1.
- [76] ŠMARDA Z., ARCHALOUSOVÁ O. *Integral and integrodifferential equations, modifications of Adomian decomposition method and homotopy perturbation method*, In Proceedings of the 10th International Conference APLIMAT 11. Bratislava: 2011, 193-199. ISBN: 978-80-89313-51-8.
- [77] ŠMARDA Z. *Decomposition method for fractional integrodifferential equations*, In Proceedings of the 10th International Conference APLIMAT 11. Bratislava: 2011, 327-332. ISBN: 978-80-89313-51-8.
- [78] VOLTERRA V. *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [79] VOLTERRA V. *Theory of functionals and of integral and integrodifferential equations*, Dover, New York, 1959.
- [80] WAZWAZ A.M. *A reliable modification of Adomian decomposition method*, Appl. Math.Comput., 100, 1999, 13-25.

- [81] WAZWAZ A.M. *A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type*, Applied Math. Comput., 118, 2001, 287-310. ISSN 0096-3003.
- [82] WAZWAZ A.M. *A new method for solving singular value problems in the second-order ordinary differential equations*, Appl. Math. Comput., 128, 2002, 45-57.
- [83] ZEIDLER E. *Applied functional analysis*, Applied Math. Sciences 108, Springer, 1995, 479pp. ISBN 0-387-94442-7.
- [84] ZEIDLER E. *Applied functional analysis: applications to mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences, 108, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [85] ZERNOV Y. *Geometric Analysis of one singular Cauchy problem*, Nonlinear Oscillations, 7(1), 2004, 65-77. ISSN 1562-3076.
- [86] ZERNOV Y., KUZINA Yu.V. *Qualitative investigation of the singular Cauchy problem*, Ukr. Math. J. 55(10), 2003, 1419-1424 (in Russian).
- [87] ZERNOV Y., KUZINA Yu.V. *Geometric analysis of one singular Cauchy problem*, Nonlinear Oscil., N.Y. 7(1), 2004, 67-80 (in Russian).
- [88] ZERNOV Y., CHAICHUK O.R. *Asymptotic behavior of solutions of a singular Cauchy problem for a functional-differential equation*, J. Math. Sci., 160(1), 2009, 123-135.