VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

TELEGRAFNÍ ROVNICE
TELEGRAPH EQUATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE TOMÁŠ TOVÁREK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE PROF. RNDR. JAN FRANCŮ, CSC.
SUPERVISOR

BRNO 2010

Abstrakt

Telegrafní rovnice modelují šíření elektrického signálu ve vedení. V práci je tato soustava parciálních diferenciálních rovnic odvozena z fyzikálních zákonitostí. Jsou studovány vlastnosti řešení, zejména vliv impedančního přizpůsobení vedení na zkreslení signálu. Výsledky jsou ilustrovány numerickými experimenty

Abstract

Telegraph equations simulate propagation of the electric signal in an electrical transmission line. This pair of partial diferential equations is derived from physical laws. Behaviour of their solution,. especially effect of impedance match of transmission line on signal distortion is studied. The results are illustrated by numerical experiments.

Klíčová slova
Telegrafní rovnice, parciální diferenciální rovnice, impedanční přizpůsobení

Keywords
Telegraph equations, partial diferential equations, impedance match

TOVÁREK, T. *Telegrafní rovnice.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 26 s., 5 s. příl. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Jan Franců, CSc.

Prohlašuji, že v předkládaném textu jsem využil jen prameny citované v seznamu literatury.

Děkuji vedoucímu práce prof. RNDr. Janu Franců, CSc.

Obsah

Úvod

Tématem mojí práce jsou Telegrafní rovnice. V praxi se používají dva druhy přenosu signálu : vzduchem a po vedení. Telegrafní rovnice popisují druhý případ.

Každé vedení má svoje charakteristické veličiny. V jistém zjednodušení to jsou vlastní měrná kapacita a měrná indukčnost, které jsou závislé především na prostorovém uspořádání vodičů, měrný odpor zapříčiněný odporem vodiče a konečně měrný svod, který je důsledkem nedokonalostí v izolaci. Všechny tyto veličiny jsou poměrně snadno měřitelné a ani jejich analytický popis není nijak složitý.

Při přenosu signálu se snažíme eliminovat zkreslení, které je většinou nežádoucí. Jde například o nekvalitní příjem televizního signálu po kabelu, nekvalitní přenos signálu po telefonním vedení a tak podobně. Toto „znehodnocení“ signálu je způsobeno jednak útlumem signálu způsobeným odporem vodičů a svodem, jednak fázovým posunem vlivem indukčnosti a kapacity. Velikost kapacitní a induktivní reaktance (zdánlivého odporu proti průchodu střídavého signálu) je závislá na kmitočtu. Přenášíme-li po vedení stejnosměrný proud, nebo harmonický signál, ke zkreslení vlivem těchto dvou veličin nedochází. V opačném případě nelze zkreslení zanedbat.

V následujících kapitolách se tedy budeme zabývat odvozením vlastní rovnice popisující výchylku napětí, respektive proudu, jako funkci polohy a času, ukážeme, za jakých podmínek dochází k přenosu signálu bez zkreslení (podmínky impedančně přizpůsobeného vedení) a provedeme numerické pokusy na konkrétním příkladě.

1. Model přenosu signálu po vedení

Na schématu 1. je zakreslen úsek vedení s parametry, které se budou v rámci našeho modelu uplatňovat. Dále budeme uvažovat vedení s homogenně rozloženými parametry, tedy že žádná z veličin *l*,*c*,*r*,*g* nebudou funkcemi polohy.

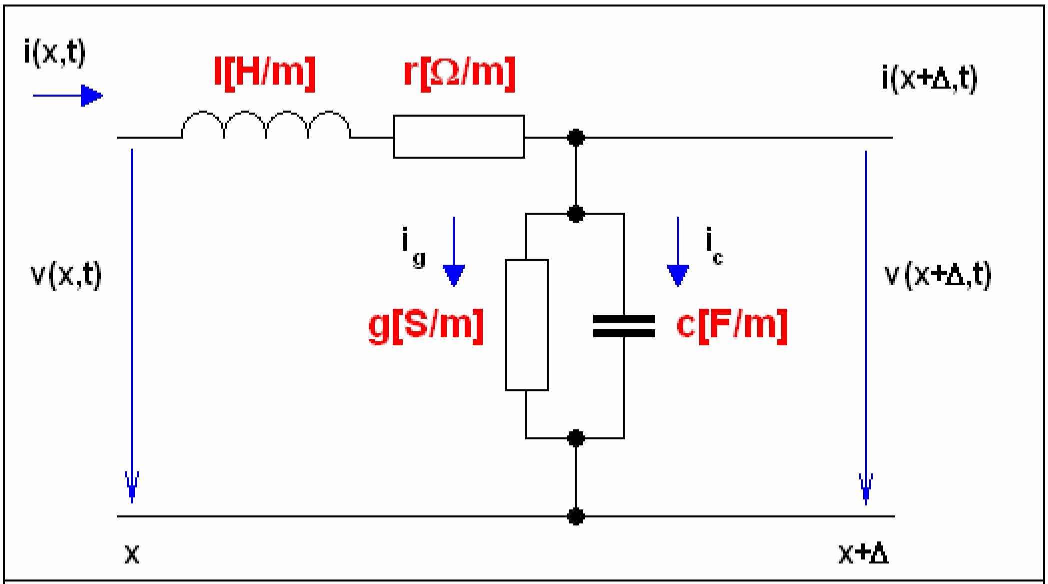


schéma 1 : náhradní schéma elementu Δ homogenního vedení

a) matematické prostředky

Při vlastním odvozování diferenciálních rovnic použijeme s výhodou zejména *integrální tvar věty o střední hodnotě* a *větu o limitě průměru* .

Věta (Věta o střední hodnotě, Lagrangeova věta).
Nechť $a < b$ jsou reálná čísla. Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$ a je spojitě diferencovatelná v intervalu (a,b). Potom existuje c z intervalu (a,b) takové, že

$$\frac{df(c)}{dx} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Větu o střední hodnotě lze napsat také následovně :

Věta : Pokud $f(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $\langle a,b \rangle$, potom platí

$$f(x_b) - f(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx}(x)dx\,,$$

což je důsledek věty o vztahu určitého Riemanova integrálu a primitivní funkce.

Věta : Pokud je funkce $f(x)$ spojitá, potom platí

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{x_0}^{x_0+\Delta} f(x)dx = f(x_0)$$

Při odvozování budeme předpokládat, že funkce jsou spojité a diferencovatelné na daném intervalu.

b) užité veličiny

V rovnicích uvažujeme veličiny $i(x,t)$, $u(x,t)$, které popisují velikost proudu, či napětí v daném bodě a čase. Pro jejich značení používáme písmena malé abecedy, protože se jedná o okamžité hodnoty. Charakteristické veličiny vedení (odpor, svod, kapacita, indukčnost) budeme popisovat jejich *hustotou* (někdy se též používá pojem *měrná veličina*), tedy v našem případě danou veličinu vztáhneme na jednotku délky. Tyto měrné veličiny budeme také značit písmeny malé abecedy. Velikost určité veličiny označené velkým písmenem poté získáme integrací hustoty této veličiny přes zkoumaný interval I :

$$X = \int_I x \cdot dl$$

Z fyzikálních zákonů odvodíme postupně dvě telegrafní rovnice. Vyjdeme z 1. a 2. Kirchhoffova zákona, Ohmova zákona a souvisejících konstitučních vztahů.

c) konstituční vztahy

Definice proudu : $I = \dfrac{dQ}{dt}$ $\left[A;\dfrac{C}{s}\right]$ (1)

Definice kapacity : $C = \dfrac{Q}{U}$ $\left[F;\dfrac{C}{V}\right]$ (2)

Ohmův zákon : $R = \dfrac{U}{I}$ $\left[\Omega;\dfrac{V}{A}\right]$ (3)

Vlastní indukčnost : $\varepsilon_L = L\dfrac{dI}{dt}$ $\left[V;H\dfrac{A}{s}\right]$ (4)

d) Kirchhoffovy zákony

1. Kirchhoffův zákon (o proudech) : $\sum_1^n i_n(x,t) = 0$ (5)

2. Kirchhoffův zákon (o napětí) : $\sum_1^n v_n(x,t) = 0$ (6)

2. Odvození diferenciálních rovnic

Při odvozování první rovnice využijeme *2. Kirchhoffův zákon (6) : Součet úbytků napětí na všech odporech ve smyčce je roven součtu elektromotorických napětí ve smyčce.*

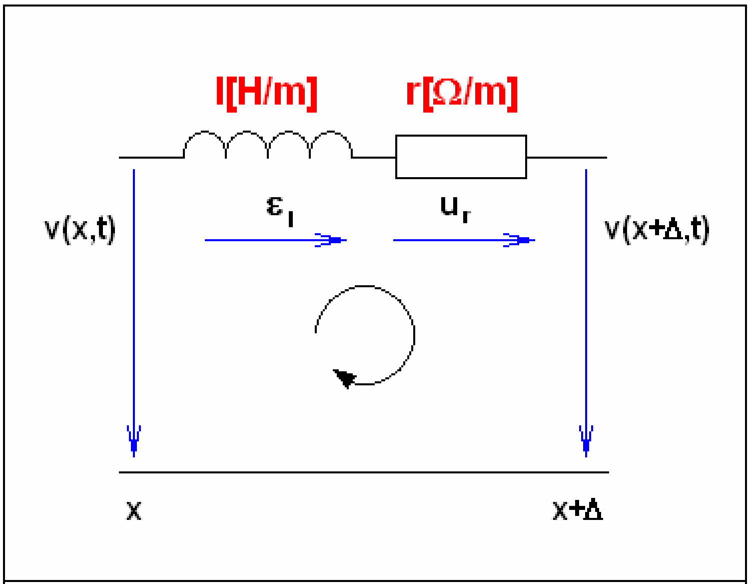


schéma 2 : rozložení napětí a potenciálů na elementu Δ

Aplikací druhého *Kirchhoffova zákona* na smyčku ve schématu 2 a užitím (3) a (4) obdržíme :

$$-v(x,t)+\int_x^{x+\Delta}\varepsilon_l\cdot dx+\int_x^{x+\Delta}u_r\cdot dx+v(x+\Delta,t)=0$$

Odkud plyne

$$v(x+\Delta,t)-v(x,t)+\int_x^{x+\Delta}\left(l\frac{\partial i}{\partial t}+ri\right)\cdot dx=0$$

Nyní užitím věty o střední hodnotě získáme :

$$\int_x^{x+\Delta}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx+\int_x^{x+\Delta}\left(l\frac{\partial i}{\partial t}+ri\right)\cdot dx=0$$

Sloučíme integrály a konečně užitím věty o limitě průměru

$$\lim_{dx\to 0}\frac{1}{(x+\Delta)-x}\int_x^{x+\Delta}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+l\frac{\partial i}{\partial t}+ri\right)\cdot dx=0$$

a po úpravách získáme *první telegrafní rovnici* :

$$\frac{\partial v}{\partial x}+l\frac{\partial i}{\partial t}+ri=0$$

K odvození druhé rovnice vyjdeme z *1.Kirhoffova zákona (5) : Součet proudů do uzlu vstupujících se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících (algebraický součet proudů v uzlu je nulový).*

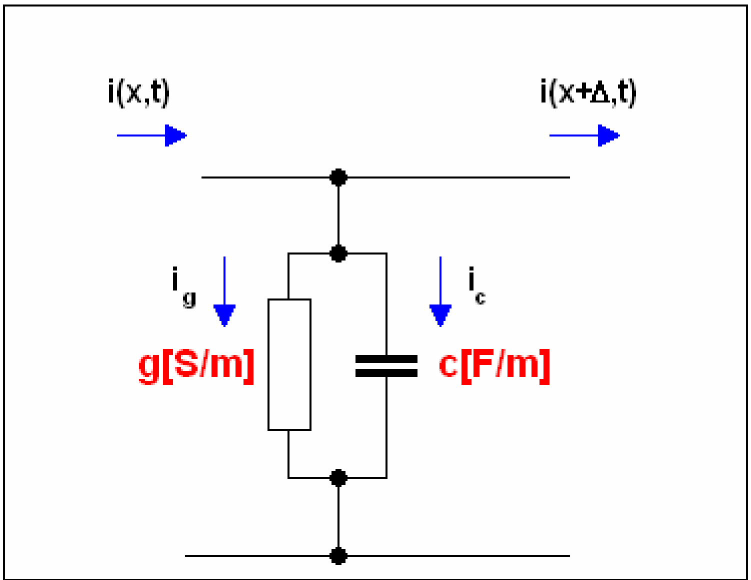


schéma 3 : proudy protékající elementem Δ

Aplikací *prvního Kirchhoffova* zákona na uzel ve schématu 3 získáme :

$$i(x,t) - i(x+\Delta,t) - gv - i_c = 0$$

ze vztahu (1) a (2) získáme $di_c = c\frac{\partial v}{\partial t}$ a rovnici vynásobíme konstantou (-1) :

$$i(x+\Delta,t) - i(x,t) + \int_x^{x+\Delta} gv \cdot dx + \int_x^{x+\Delta} c\frac{\partial v}{\partial t} \cdot dx = 0$$

nyní opět použijeme *integrální tvar věty o střední hodnotě* a získáme :

$$\int_x^{x+\Delta} \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx + \int_x^{x+\Delta} \left(c\frac{\partial v}{\partial t} + gv \right) \cdot dx = 0$$

a tak jako v předchozím případě získáme sloučením integrálu a provedením limitního přechodu *druhou telegrafní rovnici* :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial t} + gv = 0$$

Souhrnem jsme tedy získali soustavu parciálních diferenciálních rovnic nazývaných *soustavou telegrafních rovnic*:

I. $$\frac{\partial v}{\partial x} + l\frac{\partial i}{\partial t} + ri = 0 \qquad (2.1)$$

II. $$\frac{\partial i}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial t} + gv = 0 \qquad (2.2)$$

3. Převod na vlnové rovnice

V tomto odstavci převedeme danou soustavu na vlnové rovnice pro potenciál a proud. Budeme předpokládat, že funkce $v(x,t)$ a $i(x,t)$ jsou diferencovatelné a tedy rovnice (2.1) a (2.2) můžeme derivovat. Nejdříve první rovnici parciálně zderivujeme podle polohy *x*, druhou podle času *t* a obě rovnice sečteme. Získáme tak první vlnovou rovnici pro neznámou funkci v*(x,t)* (potenciál).

$$\text{I.} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + l\frac{\partial i}{\partial t} + ri = 0 \,/\, \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{II.} \qquad \underline{\frac{\partial i}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial t} + gv = 0 \,/\, (-l)\frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - cl\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - gl\frac{\partial v}{\partial t} + r\frac{\partial i}{\partial x} = 0$$

dále pak z II. máme $\frac{\partial i}{\partial x} = -c\frac{\partial v}{\partial t} - gv$ a tedy můžeme psát

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{lc}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c}\right)\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{rg}{lc}v = 0 \tag{3.1a}$$

Podobně první rovnici parciálně zderivujeme podle času *t*, druhou podle polohy *x* a sečtením obdržíme druhou vlnovou rovnici pro neznámou funkci *i(x,t)*.

$$\text{I.} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + l\frac{\partial i}{\partial t} + ri = 0 \,/\, (-c)\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\text{II.} \qquad \underline{\frac{\partial i}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial t} + gv = 0 \,/\, \frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - cl\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - cr\frac{\partial i}{\partial t} + g\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

dále pak z I. máme $v_x = -li_t - ri$ a tedy můžeme psát

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{lc}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \left(\frac{r}{l} + \frac{g}{c}\right)\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{gr}{lc}i = 0 \tag{3.1b}$$

Zavedením konstant $\zeta = \frac{1}{\sqrt{lc}}$, $\alpha = \frac{r}{l}, \beta = \frac{g}{c}$ získáme po řadě vlnové rovnice pro potenciál a proud ve tvaru :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \zeta^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\alpha + \beta)\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha\beta \cdot v \tag{3.2a}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \zeta^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - (\alpha + \beta)\frac{\partial i}{\partial t} - \alpha\beta \cdot i \tag{3.2b}$$

kde konstanty α, β mají rozměr $\left[s^{-1}\right]$. Protože *r,g* jsou nezávislé na kmitočtu, bude mít konstanta α indukční charakter, konstanta β kapacitní charakter. Konstanta ζ má rozměr $\left[ms^{-1}\right]$.

Parciální diferenciální rovnici druhého řádu ve dvou proměnných lze, se zanedbáním členů nižších řádů, které už na klasifikaci nemají vliv, obecně zapsat následovně:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.3)$$

Věta : Rovnicí hyperbolického typu nazveme takovou rovnici (3.3), pro níž je determinant

$$\delta = \begin{vmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{vmatrix} < 0$$

V případě rovnic (3.2a), (3.2b) je determinant $\delta = -\varsigma^2$. Jedná se tedy o lineární homogenní parciální diferenciální rovnice 2. řádu hyperbolického typu.

Rovnice (3.2a), (3.2b) se liší pouze formálním zápisem a fyzikální interpretací, stačí tedy, budeme-li nadále pracovat s libovolnou z nich, vyvozené závěry lze pak analogicky vztáhnout i na druhou rovnici.

4. Transformace rovnice – převod na kanonický tvar

Nyní rovnici (3.2a) transformujeme tak, abychom se zbavili ještě členu s derivací nižšího stupně. Zavedeme substituci.

$$v(x,t) = u(x,t)e^{\eta t} \qquad (4.1)$$

Spočteme opět všechny potřebné derivace :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} e^{\eta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} e^{\eta t} + \eta u e^{\eta t} = (u_t + \eta u)e^{\eta t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{\eta t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial t} + \eta^2 u)e^{\eta t}$$

Dosazením do rovnice (3.2a) obdržíme :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial t} + \eta^2 u\right)e^{\eta t} + (\alpha + \beta)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \eta u\right)e^{\eta t} - \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{\eta t} + \alpha\beta u e^{\eta t} = 0$$

Protože exponenciální funkce jsou nenulové, lze jimi celou rovnici podělit a po dalších úpravách získáme rovnici ve tvaru :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [(\alpha+\beta) + 2\eta]\frac{\partial u}{\partial t} + [(\alpha+\beta)\eta + \eta^2 + \alpha\beta]u = 0$$

Volbou $\eta = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ obdržíme rovnici (3.2a) ve tvaru :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 u = 0 \qquad (4.2)$$

Připomeňme nyní význam konstant $\zeta = \frac{1}{\sqrt{lc}}$, $\alpha = \frac{r}{l}, \beta = \frac{g}{c}$. Jak už bylo výše řečeno, svod a odpor mají vliv jen na amplitudu signálu nikoliv na fázový posun. Má tedy konstanta α indukční charakter a konstanta β charakter kapacitní.

Odvoďme nyní podmínku impedančního přizpůsobení. Obecný harmonický signál je popsán rovnicí

$$X(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0) \qquad (4.3)$$

kde ω je úhlová rychlost, k je vlnové číslo a φ_0 je počáteční fáze v čase *t=0*.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\frac{f}{v} = \frac{\omega}{v}$$

Toto číslo popisuje vlnu s úhlovou rychlostí ω, která vzdálenost jedné periody urazí rychlostí *v*. Amplitudu φ_0 zvolíme nulovou. Můžeme dále psát, že

$$u(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Tento výraz dvakrát derivujeme podle času a podle polohy :

$$u_{tt} = -A\omega^2 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$u_{xx} = -A\frac{\omega^2}{v^2} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Po dosazení do rovnice (4.2) a dělení výrazem $A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ obdržíme postupně:

$$-\omega^2 + \zeta^2 \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 = 0$$

$$v = \zeta\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 + \delta}}\text{, kde } \delta = \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 \tag{4.4}$$

Je ihned vidět, že rychlost $v = f(\omega)$ a tedy tento vztah popisuje rychlost šíření vlny s úhlovou rychlostí ω. Zároveň je patrné, že pokud zvolíme $\alpha = \beta$ vyjde nám rychlost $v = \zeta$. Pro vedení s *homogenně rozloženými parametry* je $\zeta = konst.$ To znamená, že se všechny vlny, bez ohledu na jejich kmitočet, budou šířit vedením stejnou rychlostí a tedy signál se nebude zkreslovat.

Jde o již zmiňované *impedanční přizpůsobení*. V praxi se k vedení připojují kompenzační kondenzátory nebo cívky, a to právě tak, aby se konstanty α a β pokud možno vyrovnaly. Například u koaxiálního vedení se toto přizpůsobení řeší přímo geometrickou realizací konektoru.

5. rozklad signálů do Fourierovy řady

V předchozím odstavci jsme odvodili kanonický tvar vlnové rovnice, který je vhodný pro kvantitativní výpočet řešení. Protože však exaktní řešení rovnice některou z metod (pro hyperbolické rovnice se často užívá metoda charakteristik, protože právě hyperbolické rovnice mají jednoznačné dva charakteristické směry na rozdíl od rovnic parabolických, které mají charakteristiky degenerované a rovnice eliptické nemají charakteristiky vůbec) by bylo obtížné, řešení si usnadníme. Protože goniometrické funkce sinus a cosinus mají derivace všech řádů (nám by dokonce stačilo, aby byly $\mathbf{C}^2$ diferencovatelné) a dále víme, že libovolnou funkci diferencovatelnou na nějakém intervalu lze rozvést do harmonické řady na tomto intervalu, pro další numerické „pokusy" převedeme pár v praxi používaných signálů do Fourierovy řady a díky principu superpozice, jedné z vlastností lineárních úloh, obdržíme řešení jako součet nekonečné řady.

Vzorce pro výpočet koeficientů Fourierovy řady uvedeme bez odvození (odvození koeficientů např. [1],[3]). Aby byli vzorce co nejjednodušší, použijeme navíc rozvoj na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a budeme rozvádět funkce 2π periodické:

Libovolnou funkci diferencovatelnou na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ lze napsat ve tvaru nekonečné řady :

$$f(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) \tag{5.1}$$

Koeficienty a_0, a_k, b_k jsou definovány takto :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cdot dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \cdot dt$$

Koeficient a_0 je „průměrem" dané funkce, zbylé dvě posloupnosti koeficientů udávají, jakou měrou se na výsledném signálu podílejí vyšší harmonické lichých, nebo sudých funkcí.

V praxi se lze například setkat se signálem obdélníkovým, pilovým a trojúhelníkovým. Uvedeme tedy tvar řady, se kterým budeme dále pracovat a pro ilustraci grafy těchto funkcí. Grafy byli vykresleny v *Matlabu*.

a) signál obdélníkový

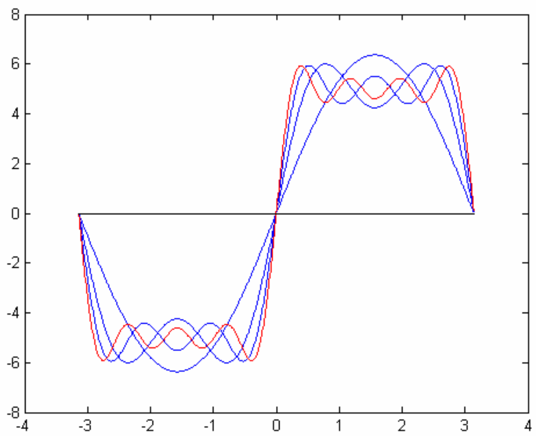
$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{A}{2} & \langle -\pi + 2k\pi; 0 + 2k\pi) \\ \dfrac{A}{2} & \langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \end{cases}$$

Zvolíme signál jako lichou funkci a můžeme hned říci, že koeficienty a_0, a_k budou nulové. Dopočítáme tedy zbylý koeficient b_k :

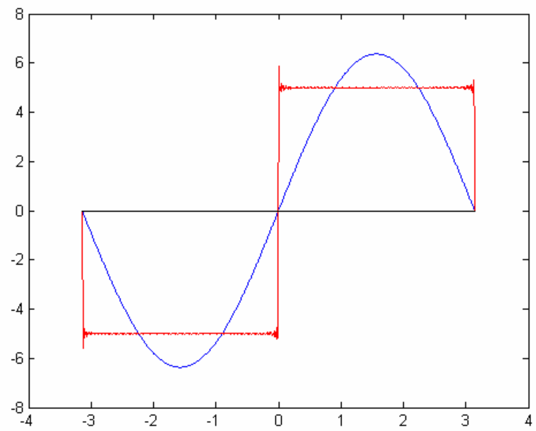
$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} a\cos kt \cdot dt + \int_{0}^{\pi} b\cos kt \cdot dt\right) = \frac{-2}{(2k+1)\pi} A$$

$$f(t) \equiv -\frac{2}{\pi} A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)t\right)}{(2k+1)}, \qquad (5.2)$$

kde konstanta *A* je amplitudou signálu.
Z obrázku 1. je patrné, že ačkoliv se obdélníkový signál výrazně odlišuje od funkce sinus, už čtvrtý součet řady se signálu podobá. Zvýšíme-li potom počet součtů na 200, je výsledek uspokojivý, jak je vidět na obrázku 2.



Obr. 1. : A=10, k=4



Obr. 2. : A=10, k=200

b) signál pilový

$$f(t) = \frac{a}{\pi} t \qquad \langle -\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$$

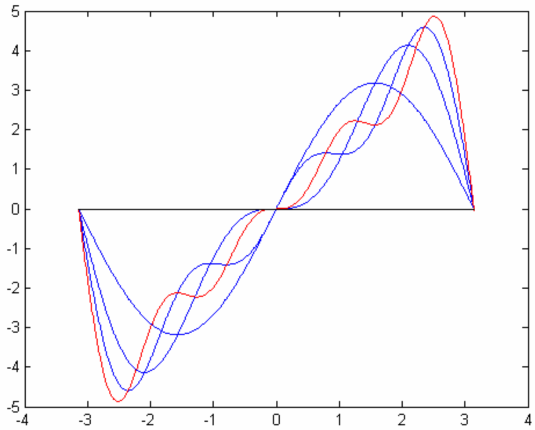
Opět zvolíme signál jako lichou funkci. Koeficienty a_0, a_k budou nulové. Dopočítáme tedy koeficient b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a}{\pi} t \sin kt \cdot dt = \frac{a}{\pi^2}\left(\left[-\frac{t}{k}\cos kt\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cdot dt\right) = -2\frac{a}{k\pi}(-1)^k$$

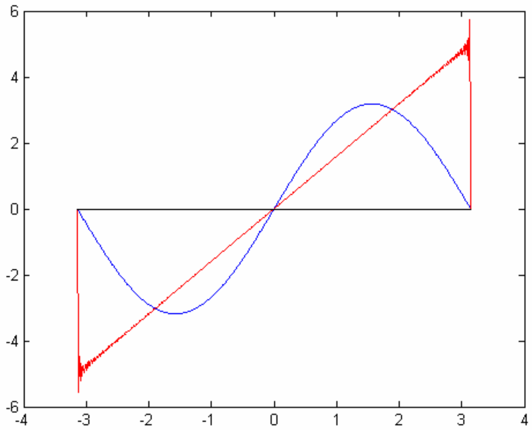
rozvoj funkce má tvar:

$$f(t) \equiv -2\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^k \sin kt \qquad (5.3)$$

Konstanta *a* zde vystupuje jako amplituda. Z obrázků vidíme, že i zde se nám podaří signál dobře aproximovat, ale protože tento signál nabývá svých extrémů v krajních bodech, kde naopak funkce sinus je nulová, budeme potřebovat k vytvoření ostré hrany součtů poněkud více.



Obr. 3. : a=5, k=4



Obr. 4. : a=5, k=200

c) signál trojůhelníkový

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{2a}{\pi}t-a & \langle -\pi+2k\pi;0+2k\pi) \\ \dfrac{2a}{\pi}-a & \langle 0+2k\pi;\pi+2k\pi) \end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{2a}{\pi}t-2a & \langle -\pi+2k\pi;-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi) \\ \dfrac{2a}{\pi}t & \langle -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\dfrac{\pi}{2}+2k\pi) \\ -\dfrac{2a}{\pi}t+2a & \langle \dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi) \end{cases}$$

V případě trojúhelníkového signálu zvolíme funkci nejprve jako sudou a potom i jako lichou. Uvidíme, že v obou případech dojdeme ke stejnému výsledku, ovšem v případě sudé funkce je formální vyčíslení integrálů jednodušší.

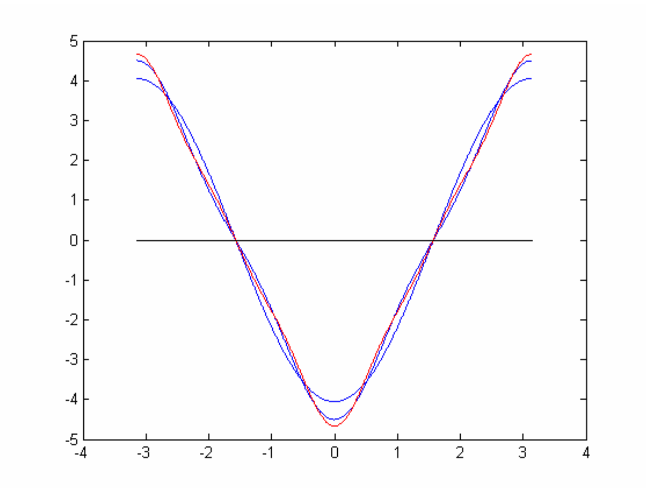
V prvním případě, jak jsme uvedli, jde o funkci sudou, tedy koeficienty a_0, b_k budou nulové. Koeficient a_k dopočítáme :

$$a_k=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-2\frac{a}{\pi}t-a\right)\cos kt\cdot dt+\int_{0}^{\pi}\left(2\frac{a}{\pi}t-a\right)\cos kt\cdot dt\right)=4\frac{a}{\pi^2k^2}\left(-1+(-1)^k\right)$$

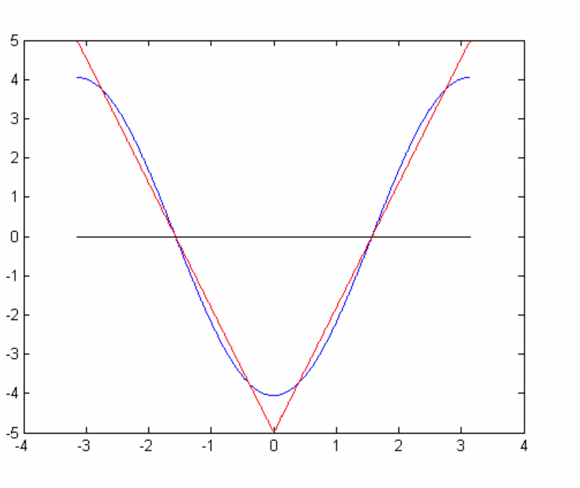
rozvoj funkce má tvar

$$f(t)\equiv 4\frac{a}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(-1+(-1)^k\right)\cos kt=-8\frac{a}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\cos 2kt \qquad (5.4)$$

Protože signál je spojitý a velmi podobný funkci cosinus vidíme, že nebudeme mít s konvergencí žádné problémy a už při součtu padesáti členů dosahujeme velmi dobré aproximace(ve skutečnosti má řada jen 25 členů, protože každý sudý je nulový, jak je patrné z předpisu).



Obr. 5. : a=5, k=4



Obr. 6. : a=5, k=50

V druhém případě budou nulové koeficienty a_0, a_k, koeficient b_k dopočítáme :

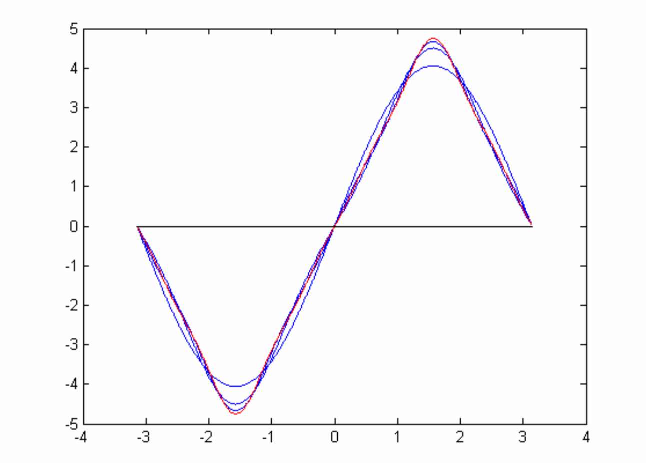
$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\left(-2\frac{a}{\pi}t-2a\right)\sin kt\cdot dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\frac{a}{\pi}t\right)\sin kt\cdot dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-2\frac{a}{\pi}t+2a\right)\sin kt\cdot dt\right)=$$

$$=8\frac{a}{\pi^2(2k+1)^2}(-1)^{(2k+1)}$$

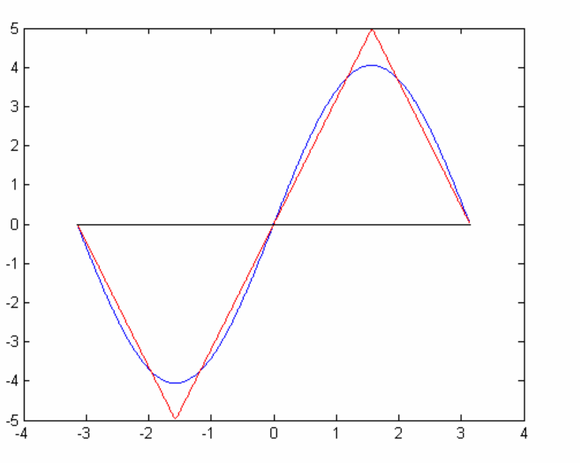
rozvoj funkce má tvar

$$f(t)\equiv 8\frac{a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^{(2k+1)}\sin(2k+1)t \qquad (5.5)$$

Ani zde nebudeme mít s konvergencí problémy :



Obr. 7. : a=5, k=8



Obr. 8. : a=5, k=50

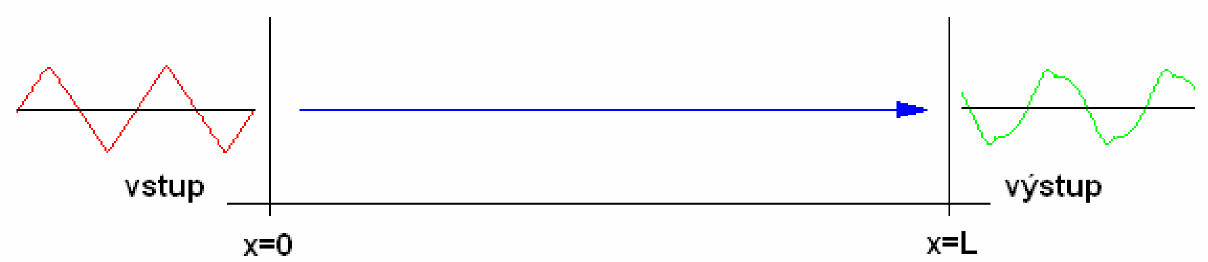
Na posledních dvou případech si také můžeme všimnout jisté podobnosti ve vyjádření vzorců (5.4) a (5.5).

6. Numerické modelování přenosu signálu

Nyní, když už máme odvozenou rovnici a zkušební signály, přistoupíme k numerickému řešení principem superpozice. Neharmonické signály jsme si rozložili na součet řady harmonických signálů. Základní vlna i její vyšší harmonické se budou vlivem parazitních indukčností a kapacit šířit vedením rozdílnou rychlostí, a proto s různým fázovým posuvem. Na konci řadu opět složíme a budeme pozorovat, nakolik bude přijatý signál zkreslený.

Vezměme si nyní opět rovnici (4.2). Jak už bylo řečeno v diskuzi této rovnice v odstavci 4, zvolíme-li $\alpha = \beta$ bude signál nezkreslen, jen zeslaben a tento případ pro nás bude nezajímavý. Zvolíme konstanty záměrně tak, aby $\alpha \neq \beta$.

Protože uvažujeme vedení s homogenně rozloženými parametry po délce, budou tedy pro dané vedení koeficienty α a β konstanty, a proto jsme zavedli substituci $\delta = \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2$. Pro praktické výpočty by nebyl tento zápis vhodný, protože bychom naměřili charakteristické veličiny vedení každou zvlášť a použili bychom tedy například zápisu (3.1). Pro náš účel, kdy chceme ukázat pouze to, jak kvalitativně ovlivňují tyto parametry zkreslení signálu, je naopak výhodné shrnout všechny konstanty do jedné. Zřejmě ale změna libovolného parametru *l*,*c*,*r*,*g* bude mít vliv na hodnotu δ a tedy i rychlosti *v*.



Obr. 9. : schéma přenosu signálu po impedančně nepřizpůsobeném vedení

Vyšleme-li po nepřizpůsobeném vedení nekonečnou sinusovou vlnu, tak na vzdálenosti *L* pozorujeme vlivem fázového posuvu posunutí v časové ose proti téže vlně vyslané po přizpůsobeném vedení. Můžeme tedy říci, že vlna vyslaná z počátečního bodu dorazí do koncového bodu vlivem kapacity a indukčnosti s nějakým fázovým posuvem, či s nějakým posunutím. Protože neharmonický signál jsme rozložili na součet harmonických signálů a každá vlna tohoto součtu se bude šířit ve vedení rozdílnou rychlostí, budeme v koncovém bodě vlivem tohoto posunutí sčítat zcela jiné spektrum a výsledný součtový signál se bude od původního lišit. Dojde tedy ke zkreslení signálu. To je v praxi ve většině aplikací nežádoucí.

Budeme modelovat následující situaci : Z bodu *x=0* vysíláme zkušební signál, který je součtem nekonečné řady, a v bodě *x=L* budeme signál přijímat. Rovnice (6.1) a (6.2) dosadíme do vzorců pro výpočet Fourierovy řady (5.1). Potom vypadá řešení naší úlohy následovně :

velikost napětí v počátku a čase *t* :

$$f_0(t) \equiv u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k t) \tag{6.3a}$$

velikost napětí v bodě x a čase t :

$$f_x(t) \equiv u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left[\omega_k\left(t - x\sqrt{\frac{\omega^2+\delta}{\omega^2}\frac{1}{\zeta}}\right)\right] \tag{6.3b}$$

Porovnáním vzorců (6.3) se vzorci pro signály, které jsme odvodili v odstavci 5 vidíme, že díky volbě intervalu, na kterém jsme převedli anharmonické funkce na funkce 2π periodické, se ω_k rovná právě koeficientu nekonečné řady k. Koeficient ω je pro každý sčítanec řady jiný, neboť závisí na frekvenci. Dopočítáme ho ze vztahu :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{k}} = k$$

Dále můžeme psát, že zpoždění Δt je rovno

$$\Delta t = t - L\sqrt{1+\frac{\delta}{k^2}\frac{1}{\zeta}} \tag{6.4}$$

Vidíme tedy, že volbou vhodného intervalu na kterém funkci rozvedeme do Fourierovy řady se obecné vzorce podstatně zjednoduší.

a) signál obdélníkový

$$f_0(t) \equiv \frac{A}{2} - \frac{2}{\pi}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{(2k+1)} \tag{5.2}$$

$$f_L(t) \equiv u(L,t) = \frac{A}{2} - \frac{2}{\pi}A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\left[(2k+1)\left(t - L\sqrt{1+\frac{\delta}{(2k+1)^2}\frac{1}{\zeta}}\right)\right]$$

b) signál pilový

$$f_0(t) \equiv -2\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k \sin kt \tag{5.3}$$

$$f_L(t) \equiv u(L,t) = -2\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k \sin\left[k\left(t - L\sqrt{1+\frac{\delta}{k^2}\frac{1}{\zeta}}\right)\right]$$

c) signál trojúhelníkový

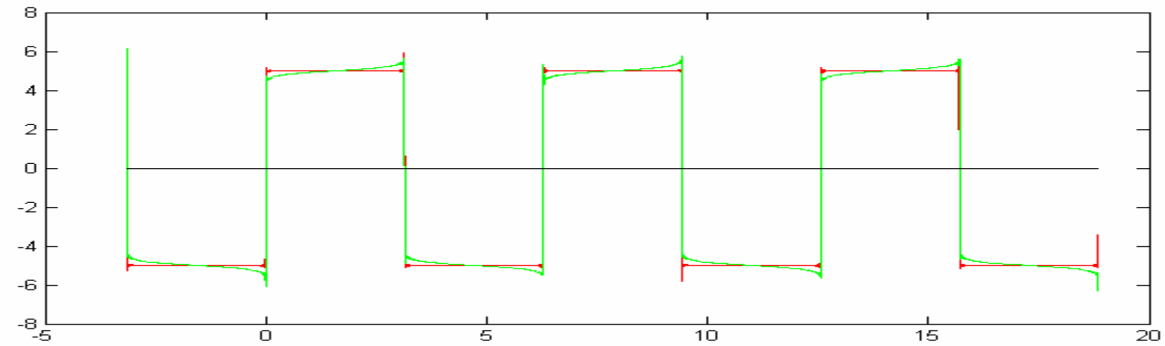
$$f_0(t) \equiv 8\frac{a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^{(2k+1)}\sin(2k+1)t \tag{5.4}$$

$$f_L(t) \equiv u(L,t) = 8\frac{a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(-1)^{(2k+1)}\sin\left[(2k+1)\left(t - L\sqrt{1+\frac{\delta}{(2k+1)^2}\frac{1}{\zeta}}\right)\right]$$

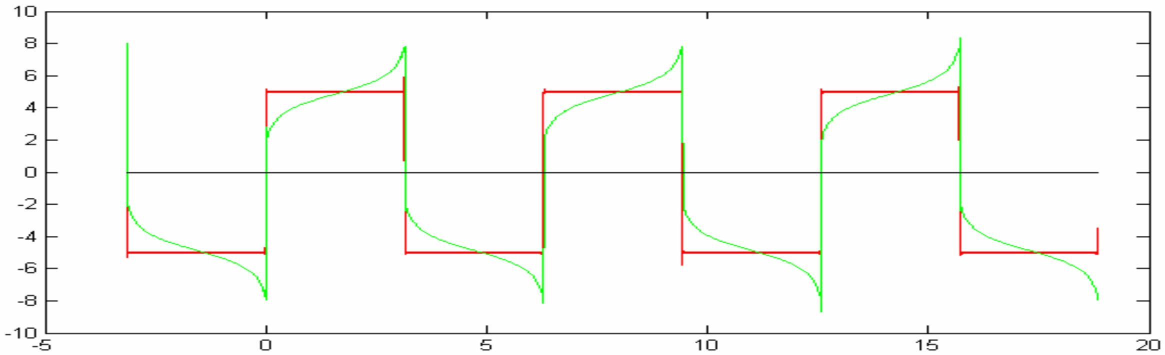
Abychom se alespoň řádově přiblížili hodnotám veličin v praktických aplikacích, použijeme hodnoty příkladu z [2].

Př: Homogenní vedení (r=3 $\Omega \cdot m^{-1}$, l=3 $mH \cdot m^{-1}$, c=8 $nF \cdot m^{-1}$, g=1 $\mu S \cdot m^{-1}$)

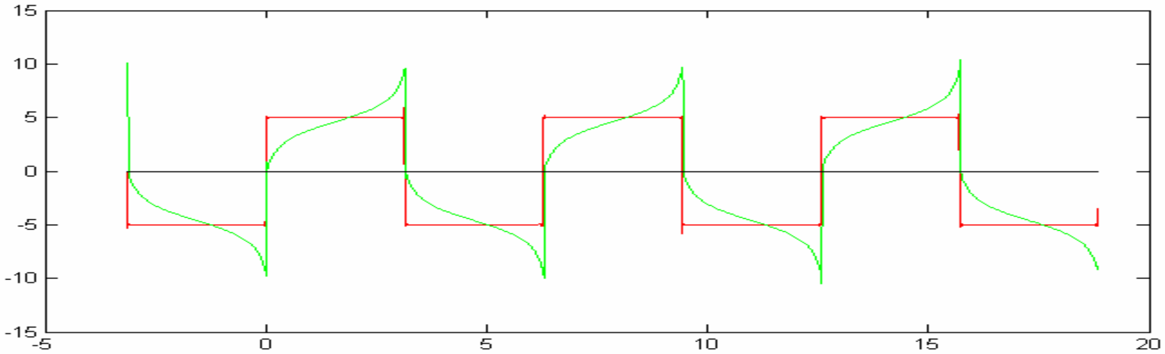
Pro výpočet kapacity, odporu a indukčnosti konkrétního vedení lze použít vztahy, které jsou ze základních závislostí odvozeny například v [2]. Tyto veličiny závisí na geometrickém uspořádání vodičů v prostoru, na materiálu vodiče, materiálu isolace, takže jsou pro každý typ vodiče – kabelu, vedení - jiné a nemá je tedy smysl uvádět, bylo by to na újmu obecnosti. Pro názornost byly v následujících grafech vykresleny oba signály – vstupní i výstupní – do jednoho obrázku.



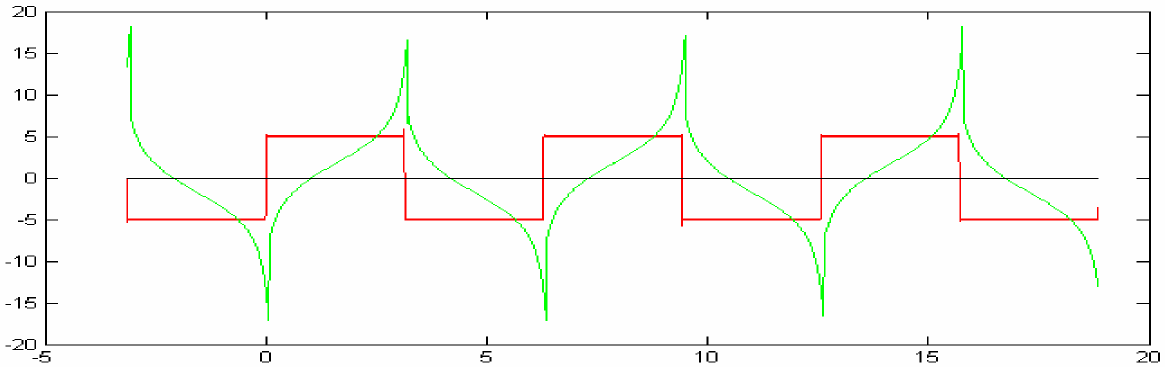
Graf 1a : délka L=500



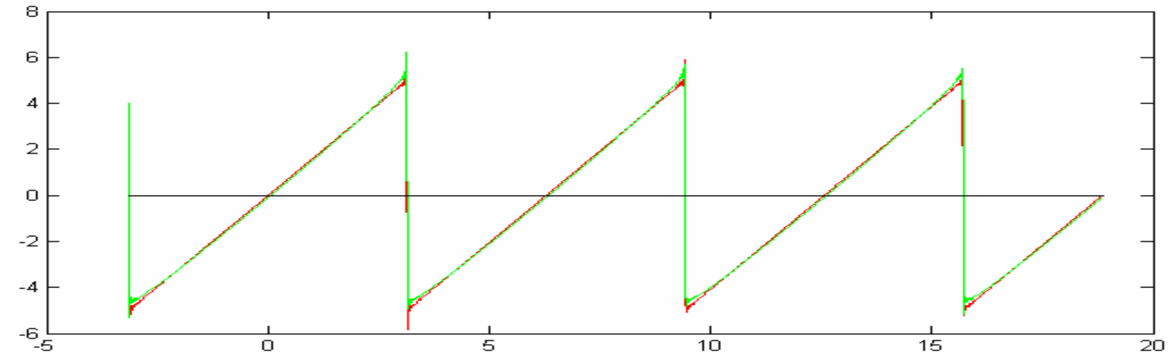
Graf 1b : délka L=3000



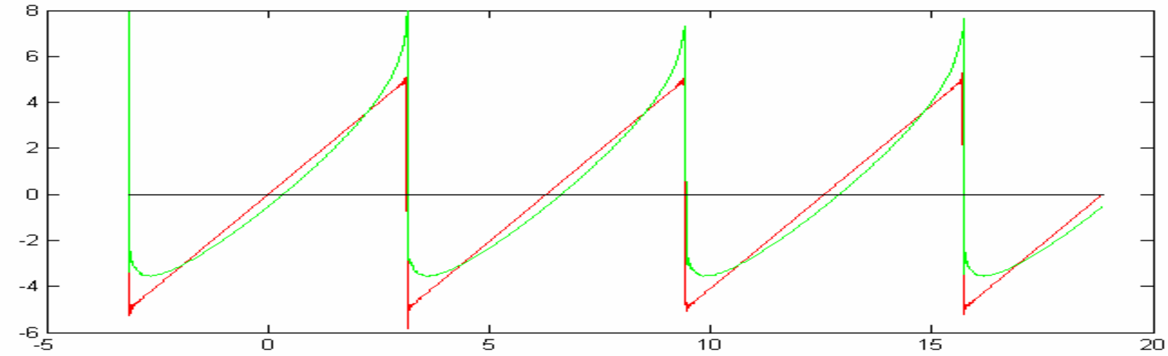
Graf 1c : délka L=5000



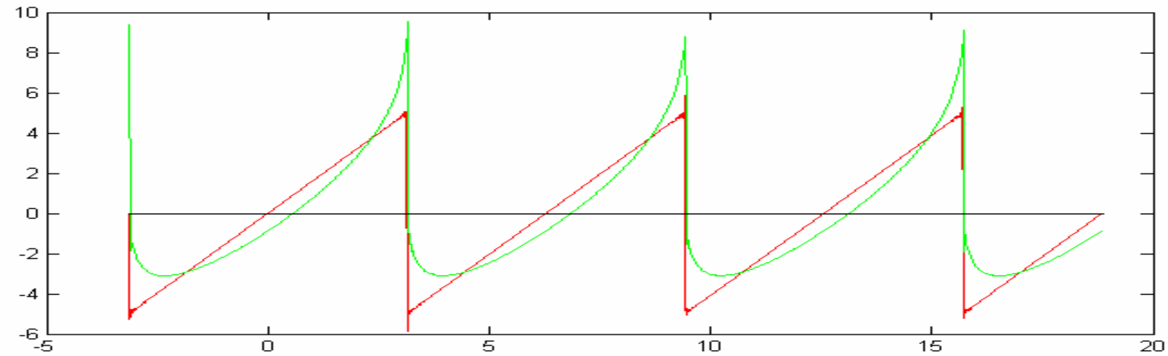
Graf 1d : délka L=15000



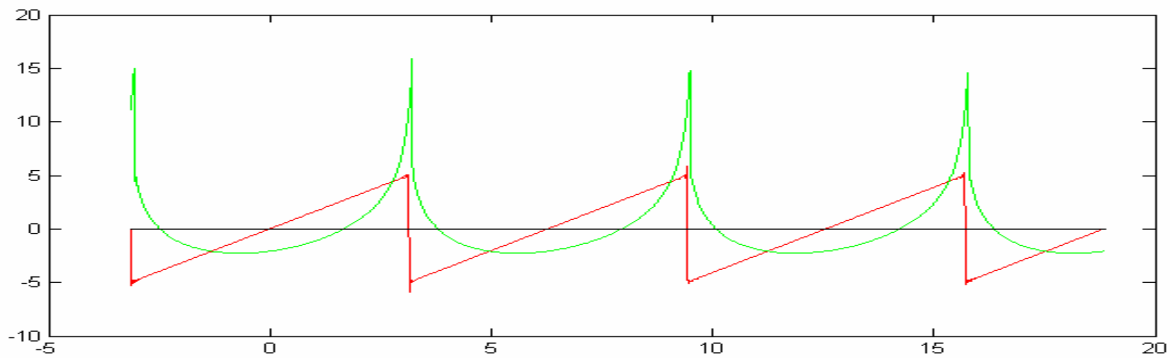
Graf 2a : délka L=500



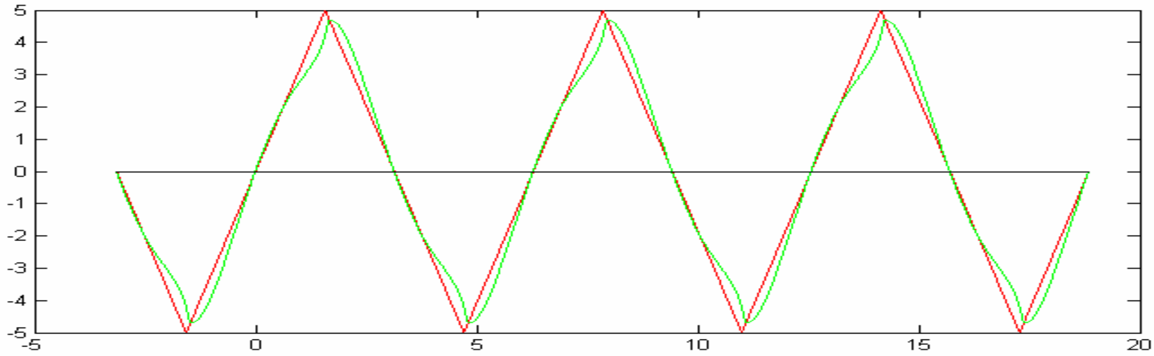
Graf 2b : délka L=3000



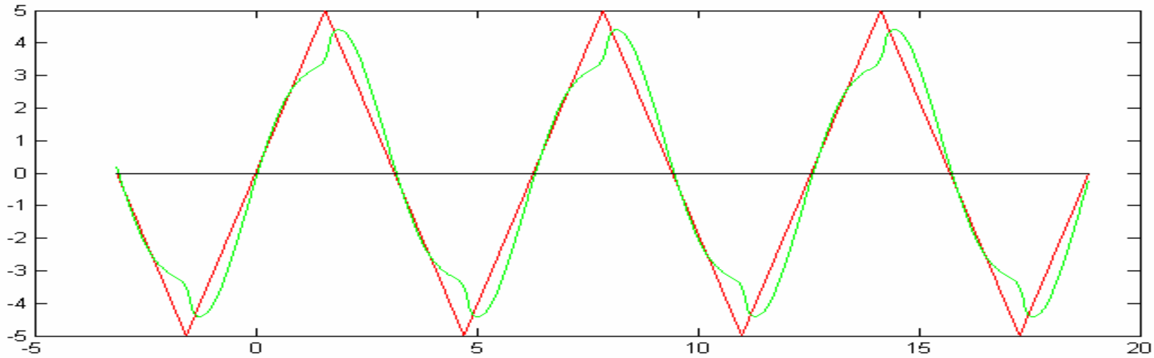
Graf 2c : délka L=5000



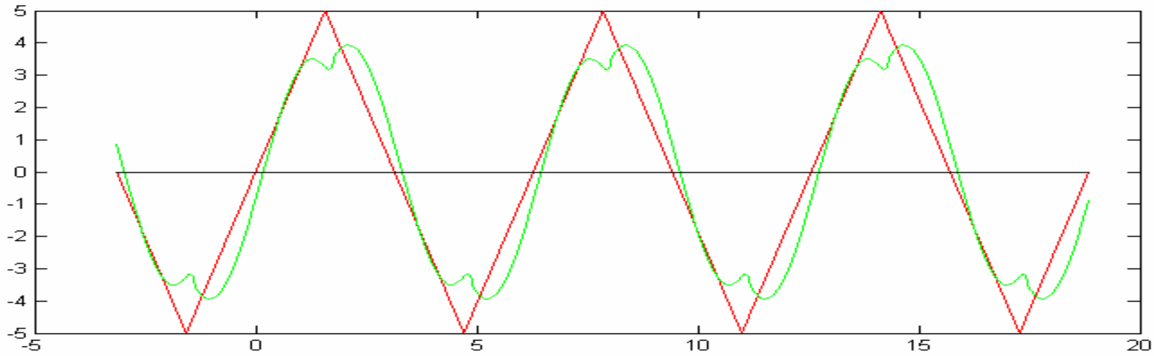
Graf 2d : délka L=15000



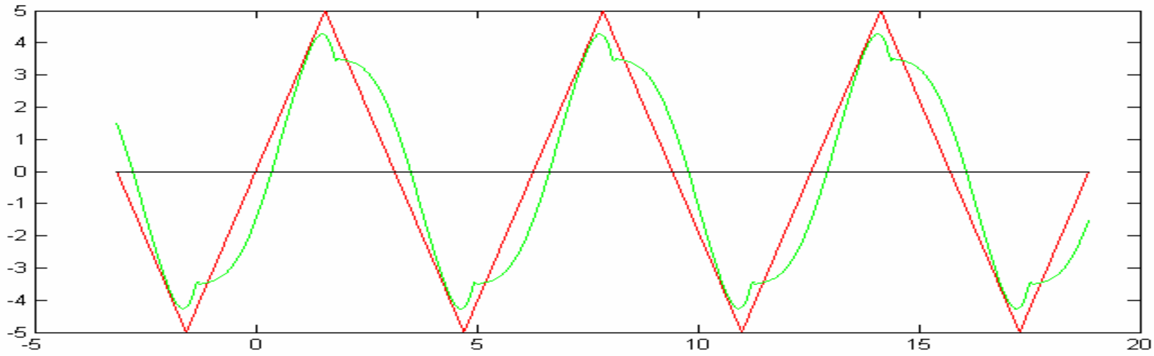
Graf 3a : délka L=15000



Graf 3b : délka L=25000



Graf 3c : délka L=40000



Graf 3d : délka L=60000

7. Závěr

Odvodili jsme z fyzikálních zákonitostí *vlnovou rovnici* popisující amplitudu proudu a napětí jako funkci času a polohy. Poté jsme rovnici transformovali, uvedli podmínky, za kterých bude signál po vedení přenesen bez zkreslení a provedli jsme několik ilustrativních příkladů přenosu *neharmonického signálu* po *impedančně nepřizpůsobeném* vedení. Pro tyto konkrétní pokusy jsme všechny charakteristické parametry vedení shrnuli do jedné konstanty δ. Tento parametr jsme ponechali ve všech případech stejný a měnili jsme pouze vzdálenost *L*. Z rovnice (6.3b) je ovšem patrné, že pro ilustraci chování neharmonického signálu ve vedení je to postačující.

Interpretace našeho pokusu je tedy taková, že na daném vedení s parametry $\delta = \frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{l} - \frac{g}{c}\right)^2$ sledujeme, jaké zkreslení naměříme ve vzdálenosti *L*.

Pokud vedení impedančně přizpůsobíme, tj. zvolíme-li charakteristické parametry tak, aby $\delta = 0$, potom bude signál nezkreslený, jen zeslabený a na vzdálenosti *L* posunutý o $\Delta t = t - \frac{L}{\zeta}$. Tento případ nebyl simulován. Také jsme nesimulovali zeslabení, tj. zmenšení amplitudy vlivem svodu a odporu vedení.

Lze předpokládat, že u grafů obdélníkového a pilového signálu se bude v bodech nespojitosti chovat výsledná funkce ve skutečnosti poněkud jinak. Je to dáno tím, že testovací signály jsou navrženy jako idealizované. Ve skutečnosti nelze realizovat u těchto signálů skok z minima do maxima za časový úsek $dt = 0$. Také rozkladem do Fourierovy řady získáváme jen aproximaci daného signálu. I tak lze říci (zvláště porovnáme-li obdélník a trojúhelník), že čím více se signál liší od harmonického, tím více je v impedančně nepřizpůsobeném vedení zkreslen. Dochází k zaoblování hran a celkovému tvarovému znehodnocení signálu už na poměrně krátké vzdálenosti.

Obdélníkový signál se často používá v automatizaci jako ovládací signál a právě ostré hrany jsou podmínkou správného vyhodnocení informace. Tento signál se většinou nepřenáší na „velké“ vzdálenosti, avšak je vidět, že impedanční přizpůsobení nesmíme zanedbat, chceme-li se vyhnout chybám způsobeným nesprávným vyhodnocením zkresleného signálu.

Seznam použité literatury :

[1] Franců, Jan; Parciální diferenciální rovnice - Brno PC-DIR 2000. ISBN 80-214-1272-0.
[2] Mayer, Daniel; Elektrodynamika v energetice – Praha BEN 2005. ISBN 80-7300-164-0
[3] Martišek, Dalibor; Matematické principy grafických systémů - Brno CENTA 2002. ISBN 80-85763-19-2
[4] Tichonov, A. N.; Samarskij, A. A.; Uravnenija matematičeskoj fiziki dlja studentov universitetov - Moskva : Nauka, 1972

Internetové zdroje :

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Telegraph_equation
[11] http://access.feld.cvut.cz/view.php?nazevclanku=&cisloclanku=2006042301
[12] mvtp3.ic.cz/telegrafn%ED%20rovnice.doc
[13] http://lucy.troja.mff.cuni.cz/~tichy/vfel/index.html

Seznam zkratek a symbolů

$v(x,t)$	[V]	potenciál v bodě x a čase t
$i(x,t)$	[A]	proud v bodě x a čase t
r	[Ω/m]	měrný odpor
g	[S/m]	měrná vodivost (zde vystupuje jako svod)
c	[F/m]	měrná kapacita
l	[H/m]	měrná indukčnost

Příloha

Výpisy zdrojových kódů systému MATLAB pro výpočet a vykreslení přenosu signálu.

```
function obdelnikz2(A,s,L)
%vykresli aproximaci obdelnikoveho signalu Fourierovou radou a zkresleni
na vedeni delky L
%A  amplituda
%s  pocet souctu
clc;
clf;
n=0; %pocitadlo%
ro=10;
eps0=10;
epsr=10;
l=0.003; %indukcnost
c=8*10^(-9); %kapacita
r=3; %odpor
g=1*10^(-6); %svod

dzeta=1/(l*c)^0.5;
delta=0;

T=-pi:.01:pi*6+0.006; %casovy radek%
[u,v]=size(T);
X=zeros(1,v);

for t=1:v,   %nulty soucet%
   X(1,t)=-2/pi*A*sin(T(1,t));
end;        %prvni soucet%

for k=2:1:s,
    for t=1:v,
    X(k,t)=X(k-1,t)-2/pi*A*sin((2*(k-1)+1)*T(1,t))/(2*(k-1)+1);
%Fourieruv rozvoj%
    end
end
plot(T(1,:),X(s,:),'r')
hold on;

for t=1:v,   %nulty soucet%
   X(1,t)=-2*A*sin(T(1,t)-L*(1+delta)^0.5/dzeta)/pi;
end;        %prvni soucet%

for k=2:1:s,
    for t=1:v,
    X(k,t)=X(k-1,t)-2/pi*A*sin((2*(k-1)+1)*(T(1,t)-L*(1+delta/(2*(k-
1)+1)^2)^0.5/dzeta))/(2*(k-1)+1); %Fourieruv rozvoj zkresleny%
    end
end
%plot(T(1,:),X(s,:),'g')
hold on;
plot(T(1,:),0,'k')
end
```

```
function pila(A,s,L);
%vykresli aproximaci piloveho signalu Fourierovou radou a jeho zkresleni
na
%vedeni delky L
%A  amplituda
%s  pocet souctu
clc;
clf;
n=0; %pocitadlo%
ro=10;
eps0=10;
epsr=10;

l=0.003; %indukcbnost
c=8*10^(-9); %kapacita
r=3; %odpor
g=1*10^(-6); %svod

dzeta=1/(l*c)^0.5;
delta=(r/l+g/c)/4;

    T=-pi:.01:pi*6+.01; %casovy radek%
[u,v]=size(T);
X=zeros(1,v);

for t=1:v,   %prvni soucet%
   X(1,t)=sin(T(1,t))*(2*A/pi);
end;        %prvni soucet%
for k=2:1:s,
    for t=1:v,
    X(k,t)=X(k-1,t)-(-1)^k*sin(k*T(1,t))*(2*A/pi)/k; %Fourieruv rozvoj%
    end
end
plot(T(1,:),X(s,:),'r')
hold on;

for t=1:v,   %prvni soucet zkreslene rady%
   X(1,t)=sin(T(1,t)-L*(1+delta)^0.5/dzeta)*(2*A/pi);
end;        %prvni soucet%
for k=2:1:s,
    for t=1:v,
    X(k,t)=X(k-1,t)-(-1)^k*sin(k*(T(1,t)-
L*(1+delta/k^2)^0.5/dzeta))*(2*A/pi)/k; %Fourieruv rozvoj zkreslene
rady%
    end
end
plot(T(1,:),X(s,:),'g')
hold on;
plot(T(1,:),0,'k')
end
```

```
function trojuhelniksinz1(A,s,L)
%vykresli aproximaci trojuhelnikoveho signalu Fourierovou radou a
zkresleni
%na vedeni delky L
%A  amplituda
%s  pocet souctu
clc;
clf;
n=0; %pocitadlo%
ro=10;
eps0=10;
epsr=10;

l=0.003; %indukcbnost
c=8*10^(-9); %kapacita
r=3; %odpor
g=1*10^(-6); %svod

dzeta=1/(l*c)^0.5;
delta=(r/l+g/c)/4;
T=-pi:.01:6*pi; %casovy radek
[u,v]=size(T);
X=zeros(1,v);

for t=1:v,   %prvni soucet%
   X(1,t)=8*A/pi^2*sin(T(1,t));
end;        %prvni soucet%

for k=2:1:s,
    for t=1:v,
    X(k,t)=X(k-1,t)+8*A/pi^2/k^2*sin(k*pi/2)*sin(k*T(1,t)); %Fourieruv
rozvoj%
    end
end
plot(T(1,:),X(s,:),'r')
hold on;

for t=1:v,   %prvni soucet%
   X(1,t)=8*A/pi^2*sin(T(1,t)-L*(1+delta/k^2)^0.5/dzeta);
end;        %prvni soucet%

for k=2:1:s,
    for t=1:v,
    X(k,t)=X(k-1,t)+8*A/pi^2/k^2*sin(k*pi/2)*sin(k*(T(1,t)-
L*(1+delta/k^2)^0.5/dzeta)); %Fourieruv rozvoj%
    end
end
plot(T(1,:),X(s,:),'g')
hold on;
plot(T(1,:),0,'k');
end
```