VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

METODY POPISU ELEKTRICKÝCH SOUSTAV A JEJICH ŘEŠENÍ

DESCRIPTION METHODS FOR ELECTRICAL SYSTEMS AND THEIR SOLVING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR´S THESIS

AUTOR PRÁCE JAKUB KŘIŽKA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE prof. RNDr. Ing. MILOŠ ŠEDA, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2010

Zadání bakalářské práce

Licenční smlouva

Abstrakt

Úkolem bakalářské práce je rešeršní popis metod, které se používají pro výpočet hodnot obvodových veličin v elektrickém obvodu. Zpočátku se zabývá popisem jednotlivých prvků (zdrojů a součástek) používaných v elektrických obvodech, dále pak rozborem zákonů, které jsou základním stavebním kamenem pro výpočty veličin v elektrickém obvodu – Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony. Nedílnou součástí práce je také souhrn speciálních metod, jako metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí atd. a jejich demonstrace na příkladech elektrických obvodů. Struktura práce je učebnicová a podává postupný souhrn informací v oblasti výpočtů elektrických obvodů.

Abstract

The objective of bachelor thesis is a searching description of methods, which are usually used for calculation of circuit variable values in electric circuits. At the beginning is thesis concerning with description of individual components (power supplies, electronic components) used in electric circuits, then also with analysis of rules, which are the fundamental for a calculation of values in electronic circuit – Ohm’s rule and Kirchhoff’s rules. Indivisible part of thesis is also summary of special methods, such as method of loop currents (mesh analysis), method of nodal voltage (nodal analysis) etc. and their demonstration on examples of electric circuits. The structure of thesis is coursebook and gives successive summary of information in area calculations of electric circuits.

Klíčová slova

Elektrické napětí, elektrický proud, rezistor, kondenzátor, cívka, transformátor, operační zesilovač, Ohmův zákon, Kirchhoffovy zákony, Cramerovo pravidlo, Gaussova eliminace, inverzní matice, MATLAB

Keywords

Electric voltage, electric current, resistor, capacitor, inductor, transformer, operational amplifier, Ohm’s law, Kirchhoff’s laws, Cramer’s rule, Gaussian elimination, inverse matrix, MATLAB

Poděkování:

Rád bych tímto způsobem poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce panu prof. RNDr. Ing. Miloši Šedovi, Ph.D. za vstřícný přístup, věcné připomínky a v neposlední řadě také za pomoc při hledání vhodných zdrojů pro bakalářskou práci.

Obsah:

Zadání závěrečné práce ... 3
Licenční smlouva ... 5
Abstrakt ... 7
Poděkování ... 9

1. Úvod ... 13

2. Prvky elektrického obvodu ... 15
- 2.1 Zdroje elektrické energie ... 15
- 2.2 Rezistory ... 17
  - 2.2.1 Základní rozdělení rezistorů ... 18
  - 2.2.2 Pevné rezistory se dvěma vývody ... 18
  - 2.2.3 Proměnné rezistory se dvěma a více vývody ... 18
- 2.3 Kondenzátory (Kapacitory) ... 19
  - 2.3.1 Rozdělení kondenzátorů podle použitého dielektrika ... 19
  - 2.3.2 Ideální kondenzátor ... 20
- 2.4 Cívky (Induktory) ... 21
  - 2.4.1 Rozdělení cívek ... 21
  - 2.4.2 Ideální cívka ... 22
  - 2.4.3 Transformátor ... 22
- 2.5 Polovodičové součástky ... 23
  - 2.5.1 Dioda ... 24
  - 2.5.2 Tranzistor ... 25
- 2.6 Elektronky ... 29
- 2.7 Operační zesilovač ... 31

3. Metody řešení lineárních elektrických obvodů ... 36
- 3.1 Ohmův zákon ... 36
- 3.2 Kirchhoffovy zákony ... 37
- 3.3 Metoda postupného zjednodušování ... 37
- 3.4 Metoda uzlových napětí ... 40
  - 3.4.1 Cramerovo pravidlo ... 41
  - 3.4.2 Gaussova eliminační metoda ... 42

3.4.3 Inverzní matice 43
3.5 Metoda smyčkových proudů 46
3.5.1 Cramerovo pravidlo 47
3.5.2 Gaussova eliminační metoda 48
3.5.3 Inverzní matice 49
3.6 Metoda lineární superpozice 51
3.7 Věty o náhradním zdroji 54
3.7.1 Théveninova věta 54
3.7.2 Nortonova věta 56

4. Řešení elektrických obvodů se střídavým napájením 59
4.1 Obvody s RLC prvky 59
4.1.1 Metoda smyčkových proudů 60
4.1.2 Metoda uzlových napětí 62
4.2 Obvod s transformátorem 64
4.3 Obvod s operačním zesilovačem 65
4.4 Použití aplikace MATLAB 65
5. Závěr .....

Seznam použité literatury .....

1. Úvod

Elektrické přístroje a zařízení složené z elektrických obvodů jsou již několik desítek let součástí našeho každodenního života. Jejich využití se stává stále častější a to je také důvod proč dochází k jejich neustálé inovaci a současné minimalizaci. Nicméně i přes velkou evoluci, kterou toto odvětví od svého vzniku prošlo, princip elektrických obvodů je stále stejný. Platí stále tatáž pravidla, která budou v této práci probírána. K tomu abychom mohli popsat elektrický obvod však potřebujeme znát základy o jednotlivých prvcích obvodů a jejich chování při průtoku elektrického proudu.

V dřívější době se k výrobě elektronických obvodů používaly výhradně obyčejné součástky, které mají kontakty vyvedeny v podobě neizolovaného vodiče. V 60 letech minulého století však byla vyvinuta tzv. SMT (Surface-mount technology), která se v 80 letech začala velmi hojně používat. Tato metoda konstruování elektronických obvodů využívá minimalizovaných součástek SMD (surface mount device), které se pájí přímo na povrch desky plošných spojů. SMT má mnoho nesporných výhod, ale mezi hlavní patří menší součástky (tedy na desce plošných spojů lze usadit mnohem více součástek), méně děr jinak potřebných pro obyčejné součástky, automatizovaná sériová výroba desek plošných spojů (pájení vlnou) a v neposlední řadě také efektivní oboustranné usazování součástek na desce plošných spojů.

Druhá kapitola bakalářské práce se zaměřuje na popis jak aktivních, tak i pasivních součástek elektrických obvodů. Podrobněji jsou popsány hlavně pasivní prvky - odpor, kondenzátor a cívka vzhledem k jejich častému výskytu v exemplárních příkladech. Důležitý je popis chování součástek při průchodu stejnosměrným a střídavým elektrickým proudem.

Třetí kapitola je zaměřena jednak na popis fundamentálních fyzikálních zákonů, které se týkají řešení elektrických obvodů a také na popis speciálních metod řešení elektrických obvodů. Důraz je kladen i na rozvoj příkladů z matematického hlediska prostřednictvím řešení těchto příkladů více matematickými metodami.

Čtvrtá kapitola se zabývá obvody se střídavým buzením, kde se vyskytuje alespoň jeden nelineární prvek. Proto jsou pasivní prvky obvodu nahrazovány příslušnými impedancemi. Závěrem kapitoly je použití aplikace MATLAB na exemplárních příkladech a zdůraznění jeho výhod při použití u maticových a vektorových výpočtů.

2. Prvky elektrického obvodu

Za elektrický obvod můžeme obecně považovat skupinu součástek osazených na desce plošných spojů a určitým způsobem propojené. Pokud pak připojíme zdroj elektrické energie, začne tímto obvodem protékat proud závislý na použitých součástkách a samozřejmě také na velikosti napájecího napětí. Elektronické součástky svými charakteristickými vlastnostmi ovlivňují procházející proud, v závislosti na tom jestli je proud stejnosměrný nebo střídavý.

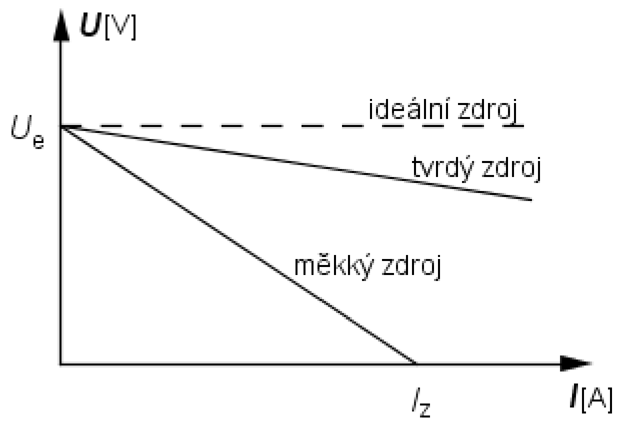
V následující kapitole budou podrobně rozebrány jednotlivé prvky elektrických obvodů, jejich základní vlastnosti a reakce na průchod elektrického proudu.

2.1 Zdroje elektrické energie

Elektrická energie, nezbytná pro funkci elektrických zařízení, je do elektrického obvodu dodávána ve formě elektrického napětí U nebo elektrického proudu I. Zdroj elektrické energie je zařízení, které dodává do obvodu napětí či proud tak, že přeměňuje energii (chemickou, mechanickou atd.) na energii elektrickou. O vlastnostech zdrojů elektrické energie nejlépe vypovídá zatěžovací charakteristika:

Zatěžovací charakteristika

Zatěžovací charakteristika je závislost mezi napětím zdroje U a odebíraném proudu I. K sestrojení tohoto grafu jsou třeba alespoň 2 charakteristické body (platí pro lineární zdroj). To je napětí naprázdno U_0, které můžeme změřit při rozpojených svorkách zdroje za použití voltmetru s vysokým vnitřním odporem a proud nakrátko I_k, který lze získat při zkratovaných svorkách zdroje pomocí ampérmetru s velmi nízkým, téměř nulovým vnitřním odporem. Můžeme také vzít kterékoli jiné 2 body charakteristiky, spojit je a prodloužit přímku k osám, ale vzniká tím větší chyba při kreslení a následném odečítaní z grafu.



Obr. 1 – Zatěžovací charakteristika lineárního zdroje [10]

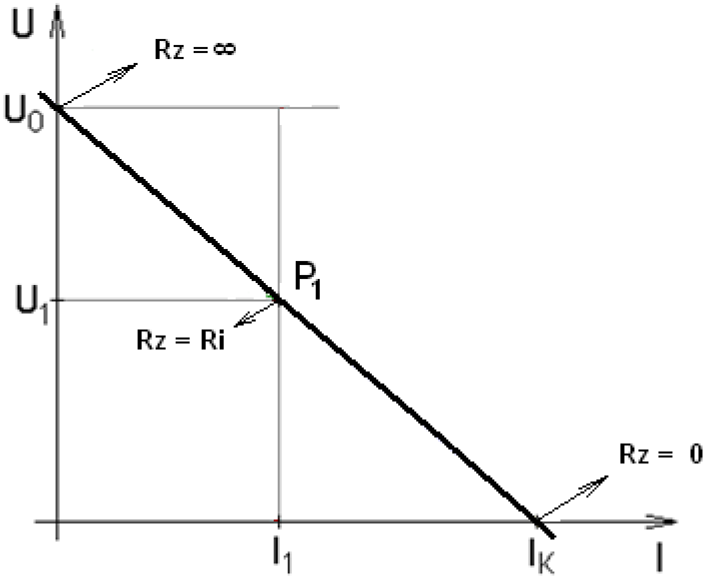
Zdroje můžeme vzhledem k jejich zatěžovací charakteristice rozdělit na:

a. Lineární zdroje

Na Obr.1 můžeme pozorovat rozdíly mezi různými typy zdrojů. Tzv. *měkký zdroj* má strmější spád přímky, protože jeho vnitřní odpor je vyšší. To znamená, že pokud na něj připojíme zátěž s nízkou impedancí, svorkové napětí znatelně poklesne.

Pokud na svorky měkkého zdroje například připojíme zátěž, která má odpor rovnající se vnitřnímu odporu zdroje, tak svorkové napětí poklesne na polovinu. Totéž samozřejmě platí i pro zdroj tvrdý, avšak s tím rozdílem, že z toho zdroje tímto čerpáme mnohonásobně vyšší proud.

Na obr.2 je typická zatěžovací charakteristika lineárního zdroje. Z grafu je zřejmé, že pokud ke zdroji připojíme zátěž R_Z rovnající se vnitřnímu odporu zdroje Ri, tak napětí zdroje U_0 poklesne na hodnotu U_1 a obvodem protéká proud velikosti I_1. Zdroj má nastavený pracovní bod v P_1. Jak už bylo dříve řečeno, zatěžovací charakteristiku lineárního zdroje lze sestrojit jako průsečík bodů U_0 a I_K.

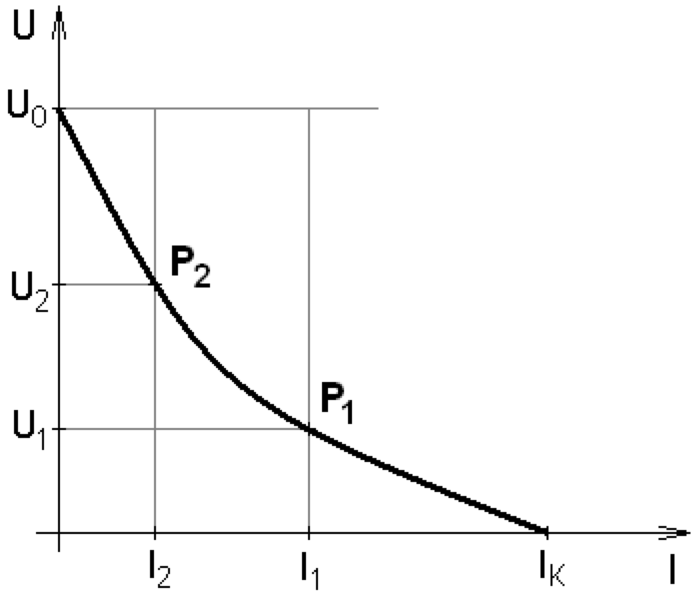


Obr. 2– Zatěžovací charakteristika lineárního zdroje [11]

b. Nelineární zdroje

Ke konstrukci zatěžovací charakteristiky nelineárního zdroje už nám nestačí pouze dva body, ale potřebujeme ji proměřit bod po bodu. Takže pokud chceme mít přesnější zatěžovací charakteristiku nelineárního zdroje, potřebujeme proměnný odpor (nejlépe odporovou dekádu), kterým budeme zdroj postupně zatěžovat a odečítat napětí a proud tímto odporem.

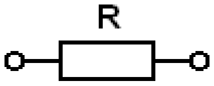
Na obr. 3 máme pouze dva pracovní body a charakteristika je tudíž nepřesná. Pokud bychom z ní chtěli odečíst chování zdroje při zátěži jiné než pro pracovní body, došlo by pravděpodobně k chybě způsobené nepřesným odečítáním.



Obr. 3 – Zatěžovací charakteristika nelineárního zdroje [11]

2.2 Rezistory

Rezistor je lineární elektrotechnická součástka, která při průchodu elektrického proudu vykazuje vlastnost zvanou **elektrický odpor** (jednotka Ohm). Mnoho lidí často označuje samotnou součástku jako odpor. To je však nepřesné a nejednoznačné, jelikož odpor ve formě rezistivity má například i obyčejný vodič. Odpor je tedy vlastnost rezistoru.



Obr. 4 – Schematická značka rezistoru

2.2.1 Základní rozdělení rezistorů:

a) podle počtu vývodů:

- se dvěma vývody
- s třemi vývody

b) velikosti odporu:

- pevné
- nastavitelné

c) typu konstrukce:

- drátové
- vrstvové

2.2.2 Pevné rezistory se dvěma vývody

Drátové

Z hlediska konstrukce jde o izolační tělísko na němž je navinutý drát s určitou rezistivitou, která je přímo úměrná odporu rezistoru. Tento typ je vhodný pro výkonovou elektroniku jelikož drátové vinutí odolává vysokým teplotám sáláním tepla do okolí a zvládá tedy vysoké proudy. Naopak se nehodí do střídavých obvodů, kde má napětí (resp. proud) vysokou frekvenci, protože vykazuje vysokou parazitní indukčnost.

Vrstvové

Konstrukčně jde opět o keramické nosné tělísko tvaru válce či trubičky na němž je nanesena odporová vrstva, například grafit nebo kovové oxidy či slitiny, která je navíc pokryta vrstvou laku nebo smaltu. Pro dosažení vyšších odporů konkrétních hodnot (nad 4 kΩ) se do odporové vrstvy frézuje drážka ve tvaru šroubovice. Tento typ rezistorů se v elektronických obvodech používá mnohem častěji a po konstrukční úpravě vývodů a vrstvy je vhodný i pro vyšší výkony.

2.2.3 Proměnné rezistory se dvěma a více vývody

Proměnný rezistor se dvěma vývody zvaný **reostat** (Obr. 5) funguje v obvodu jako jednobran, který slouží k regulaci proudu obvodem.
Proměnný rezistor se třemi vývody neboli **potenciometr** (Obr. 6) má tři vývody a je zapojen jako dvojbran. V obvodu se používá jako dělič napětí.
Speciální druh proměnného potenciometru je otočný **odporový trimr** (Obr. 7), který se používá k pouze občasné změně odporu pomocí nástroje většinou šroubováku.

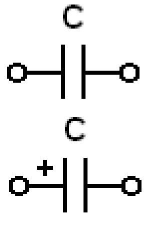
Obr. 5 - Reostat [12] Obr. 6 - Potenciometr [13] Obr. 7- Odporový trimr [13]

2.3 Kondenzátory (Kapacitory)

Kondenzátor je dvojpólová součástka, jejíž vlastnost je **elektrická kapacita** (jednotka Farad) požadované velikosti. V elektrickém obvodě se používá pro uchování elektrického náboje. Z hlediska konstrukce jde o dvě vodivé elektrody oddělené od sebe nevodivým dielektrikem. Velikost kapacity je závislá na velikosti elektrod, jejich vzdálenosti a použitém dielektriku:

$$\boldsymbol{C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}}$$

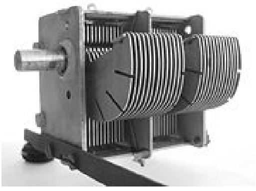
C – výsledná kapacita kondenzátoru [F]
ε_0 – permitivita vakua ($\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1})
ε_r – relativní permitivita, závislá na použitém dielektriku [-]
S – plocha elektrod [m^2]
d – vzdálenost elektrod [m]



Obr. 8 - Schematická značka kondenzátoru

2.3.1 Rozdělení kondenzátorů podle použitého dielektrika:

- kondenzátory vzduchové (obr. 9)
- kondenzátory s papírovým dielektrikem (obr. 10)
- kondenzátory keramické nebo skleněné (obr. 11)
- kondenzátory elektrolytické (obr. 12)
- kondenzátory tantalové (obr. 13)



Obr. 9 – Vzduchový kondenzátor [14]

Obr. 10 – Kond. s papírovým dielektrikem [13]

Obr. 11 – Keramický kondenzátor [15]

Obr. 12 – Elektrolytický kondenzátor [15]

Obr. 13 – Tantalový kondenzátor [15]

2.3.2 Ideální kondenzátor

Je to prvek, který akumuluje energii v závislosti na jeho kapacitě a napětí:

$$W_C = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

Pro výpočet okamžitého proudu protékajícího kondenzátorem používáme vztah:

$$i = C \frac{du(t)}{dt}$$

C – kapacita [F]

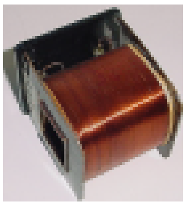
V praxi se s ideálním kondenzátorem nesetkáme, jelikož ten skutečný je zatížený minimálně dvěma vlivy:

- dielektrické ztráty
  Pokud vložíme do elektrického pole izolant, v našem případě dielektrikum, část energie se zde přemění na neužitečné teplo a kondenzátor se zahřívá.
- ztráty svodem mezi elektrodami

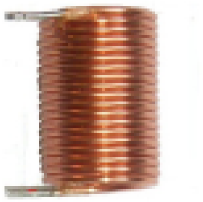
Celkové ztráty energie vzniklé na kondenzátoru jsou dané **ztrátovým činitelem tg δ.** Můžeme si jej představit tak, že k ideálnímu kondenzátoru, u kterého se elektrický proud předbíhá před napětím o 90^0, přidáme paralelně rezistor, který reprezentuje ztráty kondenzátoru a následně snižuje velikost tohoto úhlu.

2.4 Cívky (Induktory)

Cívka je dvojpólová součástka, jejíž požadovaná vlastnost je **indukčnost** (jednotka Henry) požadované velikosti. V elektrických obvodech se používá pro vytvoření magnetického pole pomocí elektrického proudu (elektromagnet), pro galvanické oddělení dvou elektrických obvodů a k indukci elektrického proudu. Z hlediska konstrukce jde o nosné těleso z izolačního materiálu a na něm navinutý vodič, zpravidla měděný, s vnější izolací ve formě smaltu (Obr. 14). Pro menší cívky dokonce není nutné použít kostru, ale pouze vodič navinutý do prstence (Obr. 15).



Obr. 14 - Cívka navinutá na kostře [16]



Obr. 15 - Cívka bez kostry [17]

2.4.1 Rozdělení cívek na dvě velké skupiny:

- *Cívky bez jádra*

Tento typ cívky má zpravidla několik µH až několik set µH a používá se především ve vysokofrekvenčních obvodech a v obvodech, kdy je důležité aby se vlastní indukčnost neměnila se změnou elektrického proudu.

- *Cívky s jádrem*

Jádro v cívce několikanásobně zvyšuje vlastní indukčnost cívky tak, že zlepšuje podmínky průtoku magnetického toku

cívka bez jádra **cívka s jádrem**

Obr. 16 – Schematická značka cívky

2.4.2 Ideální cívka

Tento prvek akumuluje pouze energii magnetického pole a posouvá fázor napětí o 90^0 před fázor proudu. Průchodem proudu cívkou vzniká magnetický tok Φ, který prochází jejím jádrem a vytváří magnetické pole.

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Pro výpočet okamžitého úbytku napětí, které vzniká na cívce:

$$u = L \frac{di(t)}{dt}$$

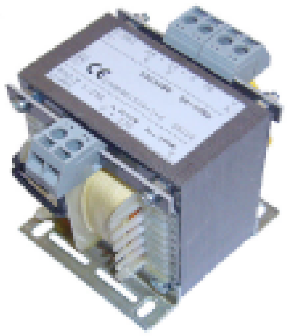
Ideální induktor se v reálném životě nevyskytuje, protože na cívce vznikají tepelné ztráty závislé na frekvenci. Tyto ztráty potom udávají činitel jakosti cívky.

2.4.3 Transformátor

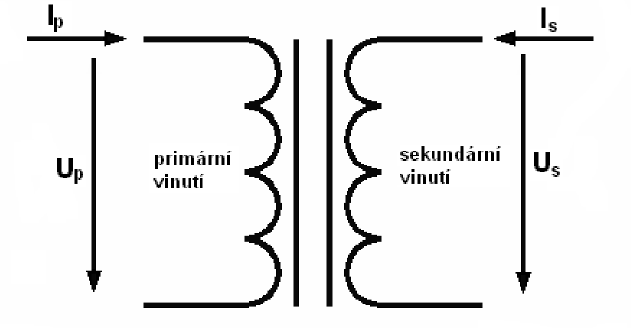
Transformátor (Obr.18) je elektronický prvek, který využívá vzájemnou indukčnost mezi dvěma vinutími, za účelem přenášení elektrické energie mezi obvody.

Tento součástka má dvě funkce:
- Transformace napětí, proudu a impedance
- Galvanické oddělení obvodů

Z hlediska konstrukce jde o 2 vinutí, primární a sekundární, se společným jádrem (Obr. 17). Při průtoku proudu primárním vinutím je v magnetickém obvodu (jádru) buzen magnetický tok, který prochází i jádrem sekundárního vinutí a tam indukuje výstupní elektrické napětí.



Obr. 17 – Transformátor [18]



Obr. 18 –Schematická značka transformátoru

2.5 Polovodičové součástky

Polovodičové součástky jsou v elektrických obvodech často používané. Jejich vlastnosti umožňují usměrňování elektrického proudu a zesilování signálu. Polovodivé látky náleží skupině IV-A Mendělejevovy periodické tabulky. Patří sem uhlík, křemík, germanium, cín a olovo přičemž v dnešní době se používají převážně křemík a germanium.

Schopnost materiálu vést elektrický proud závisí na vzdálenosti mezi valenčním a vodivostním pásem, tedy na šířce zakázaného pásu. Zatímco u látek elektricky vodivých zakázaný pás chybí, u polovodičových má přibližně 1 eV. To znamená, že k tomu, aby elektrony přešly z valenčního pásu do vodivostního, jim musíme dodat určitou energii.

Vlastní vodivost polovodiče

Základní polovodivé materiály jsou prvky čtyřmocné, což znamená, že mají ve valenční sféře 4 elektrony a atomy jsou vázány kovalentní vazbou. K uvolnění elektronu od atomu polovodiče dochází překročením zakázaného pásu z valenční sféry do vodivostní. Pokud dodáme do látky určité množství energie (například tepelné), aby elektrony mohly překonat zakázaný pás, některé vazby jsou tímto rozbity. Elektrony se potom pohybují krystalovou mřížkou a účastní se vedení elektrického proudu. V rozbitých vazbách po nich zůstanou tzv. díry, které se snaží doplnit vazbu tak, že přitahují volné elektrony. Pokud díra přitáhne některý z volných elektronů v okolí dojde k rekombinaci. Tento děj se v látce neustále a na mnoha místech opakuje a nazývá se vlastní neboli intrinzická vodivost polovodiče.

Nevlastní vodivost polovodiče

Pokud nahradíme velmi malé množství polovodivé látky, tvořené pouze čtyřmocnými prvky, několika pětimocnými prvky (Fosfor, Arsen či Anitmon), jeden z elektronů každého tohoto pětimocného prvku bude vázán k jádru jen velmi slabě a k jeho uvolnění dojde po dodání velmi malé energie, dokonce i pokojovou teplotou. Uvolněné elektrony pětimocných prvků neboli donorů se potom pohybují krystalovou mřížkou a vytvářejí nevlastní vodivost typu N (elektronová vodivost). Analogicky funguje i nevlastní vodivost polovodiče způsobená přidáním několika třímocných prvků (bor, hliník, Gallium, Indium) neboli akceptorů. Tím vzniká nevlastní vodivost typu P (děrová vodivost).

Příměsi mají na vodivost polovodičů velký vliv, protože i nepatrná koncentrace donorů či akceptorů zvýší vodivost o několik řádů. V látkách obsahujících příměsi se vždy vyskytují oba typy vodivostí, vlastní i nevlastní.

Přechod P-N

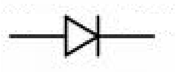
Pokud k sobě přiložíme polovodič typu P a typu N, vznikne **přechod P-N**. Atomy příměsí se změnily v ionty a nemohou se zúčastnit vedení proudu v důsledku difúze a následné rekombinace volných elektronů polovodiče typu N a děr polovodiče typu P. V přechodu náhle vzniká tzv. **vyprázdněná oblast**, která rozděluje oba typy polovodičů, ve kterých se vytváří ionty. To má za následek rozdíl potenciálů jednotlivých polovodičů a vzniká **difúzní napětí**. Děj probíhá až do doby, kdy se dostane kinetická energie difundujících

nosičů náboje do rovnováhy s odpudivou silou elektrostatického pole iontů. V této chvíli dosahuje difúzní napětí svého maxima a další přechod nosičů náboje z jednoho polovodiče do druhého už není možný – vzniká **potenciálová bariéra**.

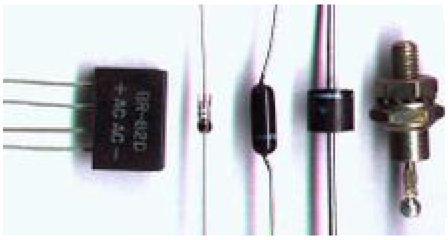
Po připojení stejnosměrného napětí ve stejném směru jako difúzní napětí, potenciálová bariéra vzroste a vyprázdněná oblast se rozšíří. Přechod je nyní polarizován ve zpětném (závěrném) směru a uzavřen pro nosiče náboje. Po obrácení polarity přiloženého napětí, bude elektrostatické pole působit proti elektrostatickému poli pevných iontů. Majoritní nosiče se blíží k přechodu, potenciálová bariéra a vyprázdněná oblast zaniknou. Nyní je přechod v přímém (propustném) směru a obvodem prochází proud, který při zvětšování vnějšího napětí prudce roste.

2.5.1 Dioda

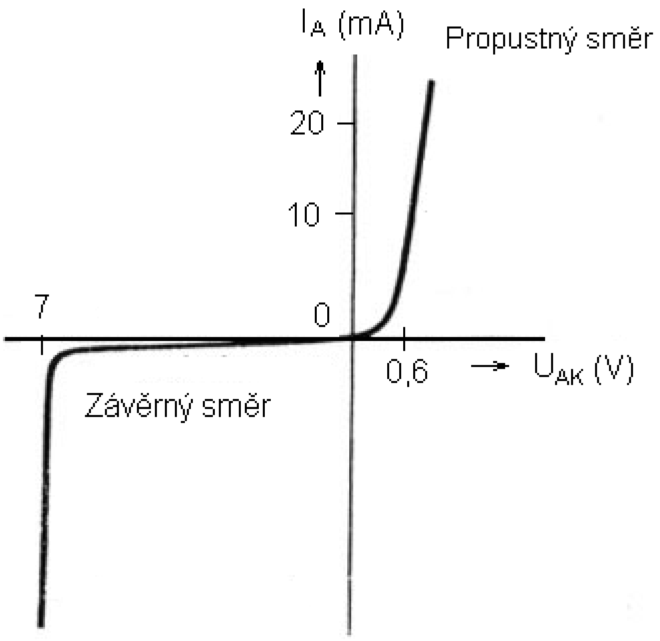
Polovodičová dioda (dále jen dioda) je dvojpólová polovodičová součástka, která využívá pro svoji činnost přechod P-N nebo polovodič-kov (Schottkyho přechod). Tento přechod vykazuje usměrňující vlastnosti, což znamená, že poskytuje průchod elektrického proudu pouze jedním směrem. Schematická značka diody (Obr. 19) diody svojí šipkou intuitivně naznačuje pomyslný průchod proudu.



Obr. 19 – Schematická značka diody



Obr. 20 – Polovodičová dioda různých typů [19]



Obr. 21 – Voltampérová charakteristika polovodičové diody

Závěrný směr

Jak už bylo výše zmíněno, dioda má dva vývody zvané anoda a katoda. Pokud připojíme na elektrody napětí tak, že na katodě je vyšší potenciál než na anodě, dioda je v tzv. **závěrném směru**, kdy se impedance diody se zvýší. V ideálním případě v tomto zapojení dioda nepropouští proud, ale ve skutečnosti diodou protéká velmi nízký proud způsobený minoritními nosiči (viz Obr. 21). Po překročení určitého krajního závěrného napětí dojde k průrazu diody a začne protékat proud i v závěrném směru.

Propustný směr

Pokud diodu zapojíme do propustného směru tak, že na anodě bude kladné napětí a na katodě záporné, a poté toto napětí zvyšujeme, diodou začne protékat proud. Z voltampérové charakteristiky diody je zřejmé, že po překročení bariérového napětí, kdy je elektrostatické pole v oblasti přechodu překonáno, se dioda úplně otevírá a chová se jako sepnutý spínač.

2.5.2 Tranzistor

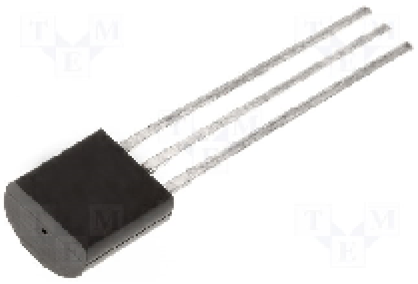
Tranzistor je trojpólová polovodičová součástka, která slouží k zesilování nízkého vstupního proudu. V elektrických obvodech se objevuje vždy v zapojení dvojbranu. V praxi se setkáváme s dvěma principiálně odlišnými typy tranzistorů - bipolární a unipolární.

Bipolární tranzistor

Název bipolární tranzistor nám napovídá, že se ke své funkci používá nosiče náboje obou polarit. Konstrukčně jde o třívrstvovou součástku, kde vnitřní, velmi tenká vrstva zvaná báze má odlišnou nevlastní vodivost než krajní vrstvy, kolektor a emitor. Emitor má na rozdíl od kolektoru vyšší koncentraci příměsi a proto má i vyšší vodivost. Máme tedy 2 kombinace bipolárních tranzistorů – PNP a NPN.

NPN **PNP**

Obr. 22 – Schematická značka bipolárního tranzistoru

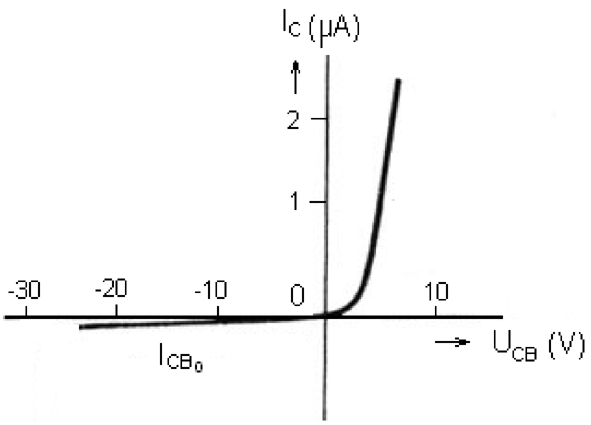


Obr. 23 – Bipolární tranzistor [13]

Činnost tranzistoru

Mějme tranzistor PNP, kde emitor necháme odpojený a mezi bázi a kolektor přivedeme kladné napětí, tedy stejné zapojení jako dioda v závěrném směru. Jak už bylo vysvětleno u diody, bude přechodem protékat velmi malý proud způsobený pouze minoritními nosiči náboje. Pokud polaritu napětí otočíme, proud přechodem velmi vzroste. Závislost popisuje voltampérová charakteristika (Obr. 24), která je velmi podobná charakteristice polovodičové diody.

I_{CB0} – proud bází a kolektorem při odpojeném emitoru



Obr. 24 – Voltampérová charakteristika přechodu báze-kolektor

Z voltampérové charakteristiky lze snadno vyčíst, že i při vyšších napětích U_{BC} (tedy záporných U_{CB}) je proud velmi malý a v tom případě i výkon daný součinem napětí a proudu je velmi malý. Abychom tento výkon mnohonásobně zvýšili, potřebujeme logicky zvýšit také proud kolektorem, tak aby se v oblasti báze zvýšil počet minoritních nosičů náboje. To lze provést tak, že přivedeme napětí mezi emitor a bázi, přechod otevřeme a obvodem začne procházet emitorový proud I_E. Vzhledem k malé tloušťce báze se téměř celý proud emitoru dostane přes bázi přímo do kolektoru, nicméně podle I. Kirchhoffova zákona počítáme i s proudem báze:

$$I_E = I_B + I_C$$

Analogicky funguje i tranzistor NPN s tím rozdílem, že zde jsou minoritními nosiči náboje elektrony.

Základní zapojení tranzistoru

Tranzistor lze jako dvojbran v obvodu zapojit třemi základními způsoby:

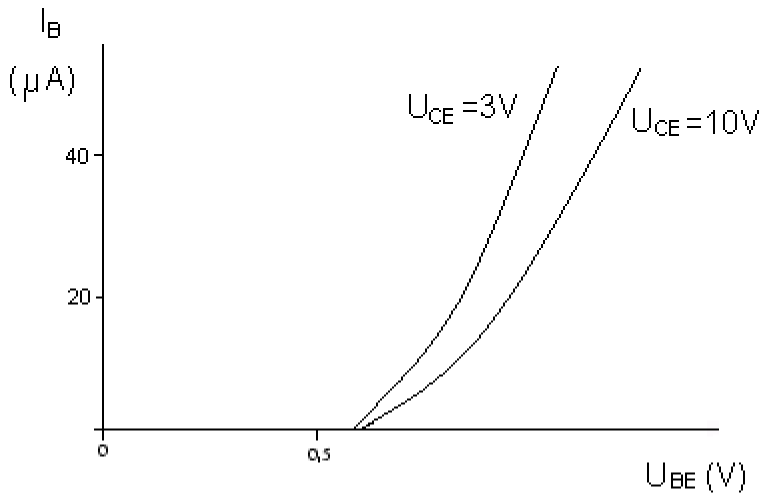
- se společnou bází (SB)
- se společným emitorem (SE)
- se společným kolektorem (SC)

Nejvýhodnější obvykle bývá zapojení se společným emitorem, protože tehdy má tranzistor největší zesílení výkonu. Zapojení se společnou bází se používá zpravidla pro napěťové zesílení a zapojení se společným kolektorem pro proudové zesílení..

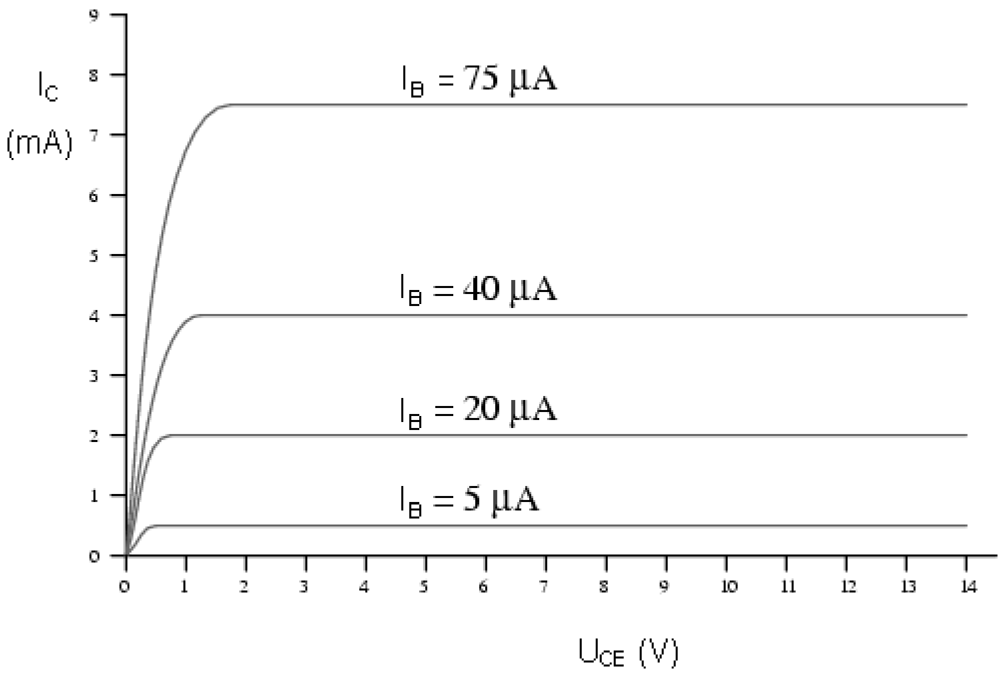
O chování bipolárního tranzistoru nejlépe vypovídají jeho charakteristiky:

- vstupní charakteristika (Obr. 25)
- výstupní charakteristika (Obr. 26)
- přechodová charakteristika

Vstupní charakteristika (Obr. 25) je závislost vstupního napětí na vstupním proudu, přičemž lze vidět, že průběhy jsou na výstupním napětí jen velmi málo závislé. Výstupní charakteristiky (Obr. 26) se měří při konstantním vstupním napětí nebo při konstantním vstupním proudu. V našem případě je konstantou napětí U_{BE}. Jak lze vidět na výstupních charakteristikách tranzistoru, výstupní kolektorový proud je velmi závislý na vstupním bázovém proudu.



Obr. 25 – Vstupní charakteristika tranzistoru se společným emitorem



Obr 26. – Výstupní charakteristika tranzistoru se společným emitorem

Unipolární tranzistor

Tranzistor řízený elektrickým polem (Field-Effect-Transistor FET) byl objeven roku 1952 skupinou amerických vědců. Využívá elektrostatického pole k řízení proudu procházejícího mezi kolektorem a emitorem tak, že mění vodivost kanálů mezi emitorem a kolektorem. Název unipolární tranzistor naznačuje, že zde se vedení proudu účastní pouze většinové nosiče jedné polarity.

Obr 27. – Schematická značka unipolárního tranzistoru
(zleva FET – N, FET – P, MOSFET – N a MOSFET – P)

Na rozdíl od bipolárních tranzistorů, unipolární tranzistor vykazuje vysoký vstupní odpor což je příznivé pro zesilování signálů z tzv. tvrdých zdrojů (jejich vnitřní odpor je vysoký).

2.6 Elektronky

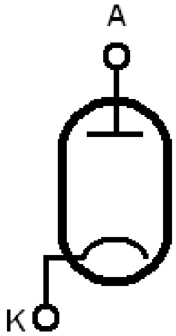
Předtím než se v elektrických obvodech začaly využívat polovodičové součástky, sloužily k usměrňování a zesilování signálu **elektronky**. Jejich princip je založen na emisi a pohybu elektronů prostorem elektronky směrem od katody k anodě. Opačný pohyb elektronů není možný a proto má elektronka usměrňovací vlastnosti. Pro správnou funkci je nezbytné, aby katoda byla schopna emitovat elektrony a na anodě bylo kladné napětí závislé na použití součástky. Uvnitř katody se velmi rychle pohybují volné elektrony, ale v uvolnění z katody jim brání tzv. zrcadlová síla. K tomu aby elektron mohl opustit krystalovou mřížku katody, musíme mu dodat určitou energii dodanou ve formě:

- *Tepelné* (ohřívání katody způsobené průchodem proudu)
- *Světelné* (emise z fotokatody, na kterou dopadá záření)
- *Sekundární* (náraz částic na povrch materiálu a následné „vyrážení“ elektronů)
- *Vlastní* (působení elektrických polí způsobující odtrhování elektronů)

Dioda

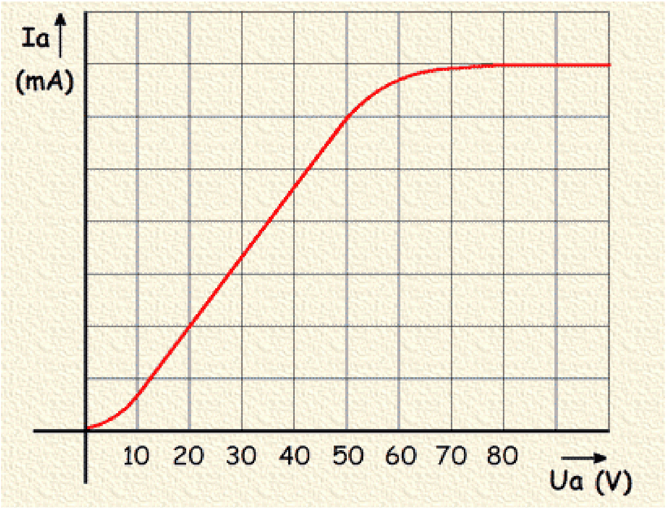
Z hlediska konstrukce jsou si jednotlivé typy elektronek velmi podobné. Jde o vakuovanou skleněnou baňku, ve které jsou umístěné anoda a katoda (Obr. 28), popřípadě mřížka (řídící, stínící a hradící).

Dioda (Obr. 29) je základní a také nejjednodušší elektronka, která obsahuje pouze anodu a katodu. Funkci lze popsat následovně. Připojení katodového zdroje způsobí, že se katoda začne žhavit a emitovat volné elektrony. Pokud však na anodě není připojeno napětí, její potenciál je nulový a proto tyto volné elektrony nepřitahuje. V okolí kolem katody se tedy začne tvořit prostorový náboj, který jednak zabraňuje katodě emitovat další elektrony a jednak také chrání katodu před dopadem těžkých iontů, které snižují životnost katody. Po připojení napětí U_A začne anoda přitahovat elektrony z katody a diodou začne procházet proud I_a (viz Obr. 30).



Obr. 28 – Schematická značka vakuové diody

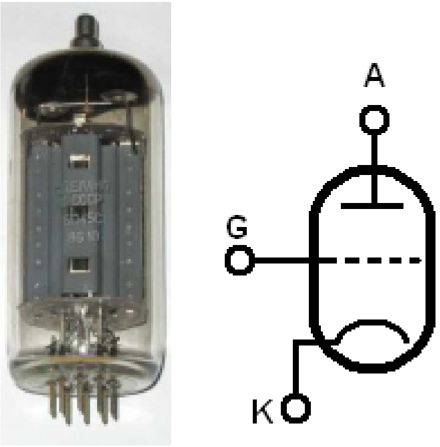
Obr. 29 – Vakuová dioda [20]



Obr. 30 – Voltampérová charakteristika vakuové diody [20]

Trioda

Pokud mezi anodu a katodu elektronky vložíme tzv. řídící mřížku vytvořenou z tenkého drátu popřípadě plíšku, vznikne trioda (Obr. Mřížka se nachází v blízkosti katody a pokud má stejný potenciál jako katoda a tudíž mezi nimi není napětí, trioda se chová stejně jako dioda. Po přiložení záporného napětí mezi mřížku a katodu vzniká kolem mřížky elektrostatické pole a snižuje anodový proud.



Obr. 31 – Vakuová trioda a její schematická značka [20]

Tetroda a pentoda

Pokud vložíme mezi anodu a řídící mřížku elektronky tzv. stínící mřížku vznikne tetroda. Voltampérová charakteristika je podobná tranzistoru, ale v určitém intervalu můžeme pozorovat záporný diferenciální odpor v podobě konkávnosti funkce. Tento tzv. dinatronický dolík může být eliminován použitím svazkové tetrody, popřípadě pentody, ve které je navíc přidána hradící mřížka.

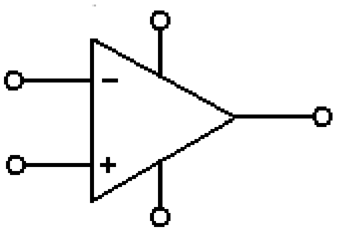
Elektronky se v dnešní době používají spíše ze setrvačnosti ve starších televizorech a monitorech a v neposlední řadě také ve studiové technice.

2.7 Operační zesilovače

Operační zesilovač (dále jen OZ) je analogový elektronický prvek s vysokým zesílením, který byl zpočátku určený pro základní matematické výpočty v analogových počítačích. V dnešní době jsou součástí mnoha elektronických obvodů jako AC/DC zesilovače, klopné obvody, komparátory nebo A/D či D/A převodníky. Z hlediska struktury se jedná o elektronickou součástku se dvěma vstupy, jedním výstupem a napájecími vývody. Jeden ze vstupů OZ se nazývá invertující a reaguje na vstupní signál tak, že jej zesílí a přitom otáčí fázi. Druhý je neinvertující a fáze vstupního a zesíleného výstupního signálu je stejná.

Základní požadované vlastnosti OZ:

- vysoké napěťové a proudové zesílení
- velký vstupní odpor
- velmi nízký výstupní odpor
- frekvenční nezávislost



Obr. 32 – Schematická značka OZ

OZ se dělí na 3 základní části:

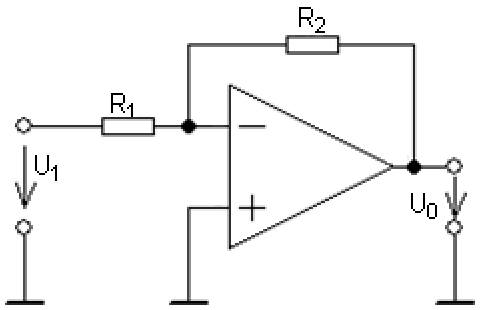
- vstupní zesilovač
- napěťový zesilovač
- výstupní zesilovač

Základní zapojení OZ:

Invertující zapojení

Pokud potřebujeme změnit polaritu vstupního napětí na OZ, použijeme invertující zapojení neboli invertor. Chceme-li, aby na výstupu bylo napětí stejné velikosti jako vstupní, pouze s opačnou polaritou musíme použít oba rezistory R_1 i R_2 stejné velikosti. Velikost výstupního napětí je totiž dána vztahem:

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1} . U_1 = -k . U_1$$

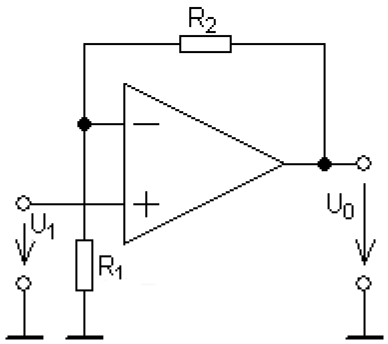


Obr. 33 – Invertující zapojení OZ

Neinvertující zapojení

Pokud zapojíme OZ podle Obr. 34, tedy jako neinvertující zapojení, bude výstupní napětí U_0 ve fázi se vstupním napětím U_1. Vzorec pro výpočet výstupního napětí nám ukazuje, že nejmenší možné zesílení je 1. To znamená, že při jakýchkoli hodnotách rezistorů R_1 a R_2 bude výstupní napětí větší nebo rovno vstupnímu.

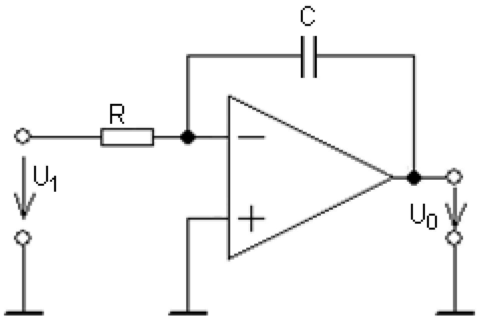
$$U_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_1$$



Obr. 34 – Neinvertující zapojení OZ

Integrátor

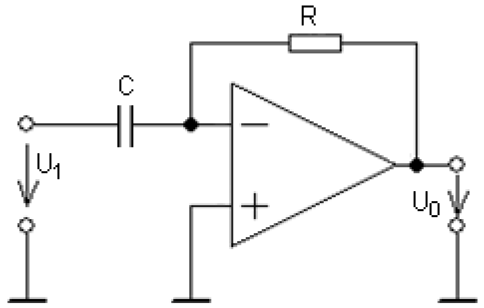
Po připojení vstupního napětí na integrátor se začne nabíjet. Rychlost nabíjení je závislá na velikosti časové konstanty. V tomto případě je nepřímo úměrná velikosti kapacity kondenzátoru. Integrátor se mimo jiné také používá jako zdroj trojúhelníkového signálu nebo dolní propust.



Obr. 35 – Integrační zapojení OZ

Derivátor

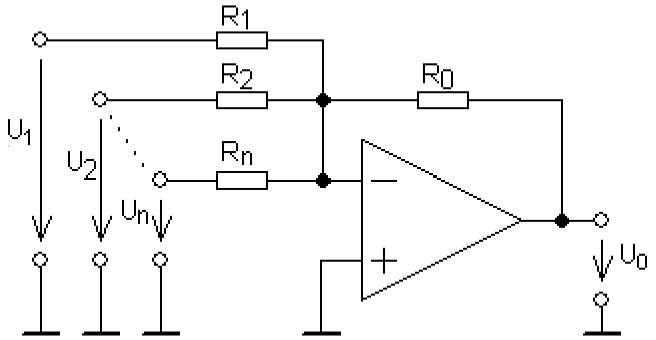
Toto zapojení se používá jen zřídka, protože při derivování se zesílí také parazitní vstupní signál.



Obr. 36 – Integrační zapojení OZ

Součtový zesilovač – Sumátor

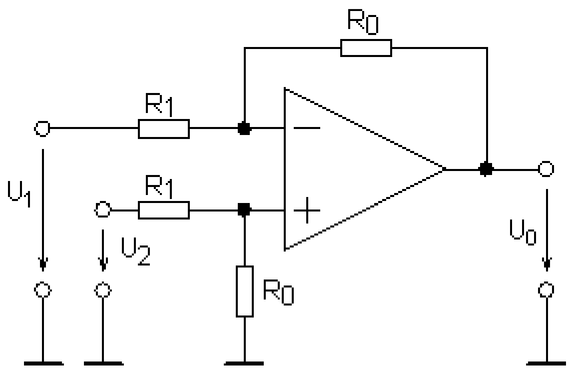
Toto zapojení OZ je velmi výhodné pro sčítání vstupních napětí, přičemž tato jednotlivá napětí lze upravovat pomocí příslušného větvového rezistoru. V případě, že by všechny rezistory v obvodu byly shodné, výstupní napětí U_0 by se rovnalo součtu všech vstupních napětí.



Obr. 37 – Součtové zapojení OZ

Rozdílový (Diferenční) zesilovač

Zapojení diferenčního zesilovače má na výstupu signál úměrný rozdílu invertujícího a neinvertujícího vstupu. Rezistory vstupních větví musí být shodné.

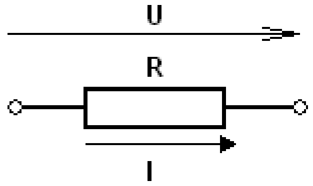


Obr. 38 – Rozdílové (diferenční) zapojení OZ

3. Metody řešení lineárních elektronických obvodů

Pokud chceme analyzovat elektronický obvod nebo kterýkoli jeho prvek, nejprve musíme znát základní pojmy z elektrotechniky:
Elektronický obvod je vzájemné propojení elektronických součástek tak, aby jimi po připojení napájecího napětí mohl protékat proud. Tento proud je závislý na odporu jednotlivých součástek a na velikosti napájecího napětí. Po průchodu proudu jednotlivými součástkami na vznikají úbytky napětí. *Orientace obvodových veličin* je označení předpokládaného smyslu obvodových veličin. Pro přehlednost se napětí značí otevřenou šipkou a proud šipkou uzavřenou (Obr. 39). *Smyčka* je uzavřená část obvodu, obsahující libovolný počet součástek a vodičů. *Větev* je otevřená část obvodu, taktéž obsahující určitý počet součástek propojených vodičem.

K tomu, abychom mohli řešit elektrický obvod, musíme znát základní elektrotechnické zákony. Tyto zákony budou popsány v následující kapitole.



Obr. 39 – Značení obvodových veličin

3.1 Ohmův zákon

Ohmův zákon je základním stavebním kamenem výpočtů elektrických obvodů, který popisuje vztah mezi elektrickým napětím, proudem a odporem. Vynalezl jej německý fyzik Georg Simon Ohm a říká, že napětí přiložené na vodivý předmět je přímo úměrné protékajícímu proudu, kde konstanta úměrnosti je velikost odporu:

$$\mathbf{U = R * I}$$

nebo ekvivalentně: $R = \frac{U}{I}$ $I = \frac{U}{R}$

3.2 Kirchhoffovy zákony

Kirchhoffovy zákony jsou velmi důležitou součástí analýzy elektrických obvodů. Jsou základem pro popis jednotlivých smyček a větví v obvodu.

1. Kirchhoffův zákon

První Kirchhoffův zákon říká, že algebraický součet všech proudů v uzlu je roven nule. Jinými slovy, součet proudů přitékajících je roven součtu proudů odtékajících:

$$I_V = \sum_{i=0}^{n} I_i$$

2. Kirchhoffův zákon

Druhý Kirchhoffův zákon říká, že algebraický součet všech úbytků napětí na spotřebičích je roven napětí zdroje. Jinými slovy, algebraický součet všech napětí ve smyčce je roven nule:

$$U_V = \sum_{i=0}^{n} U_i$$

3.3 Metoda postupného zjednodušování

V případě, že potřebujeme řešit lineární obvod pouze s jedním zdrojem, použijeme metodu postupného zjednodušování. Ta spočívá v tom, že zjednodušíme všechny odpory do jediného a pak spočteme jím protékající proud a jednotlivé úbytky napětí na rezistorech.

Pro výpočet celkové zátěže použijeme následující vztahy:

- sériové zapojení:

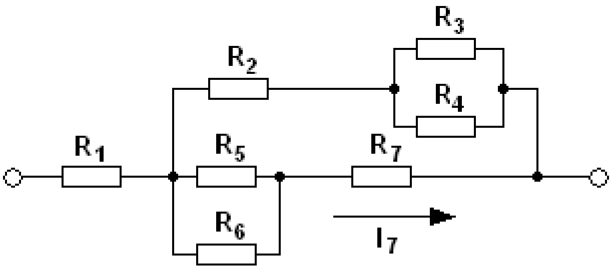
$$\mathbf{R_v = R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

- paralelní zapojení rezistorů:

$$\mathbf{\frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_v}}$$

Příklad č.1

Vypočtěte celkový proud I mezi dvěma svorkami obvodu na Obr. 40, pokud k těmto svorkám připojíme zdroj stejnosměrného napětí U:



U = 20 V
R1 = 20 Ω
R2 = 35 Ω
R3 = 15 Ω
R4 = 10 Ω
R5 = 50 Ω
R6 = 80 Ω
R7 = 25 Ω

Obr. 40 – Příklad metody postupného zjednodušování

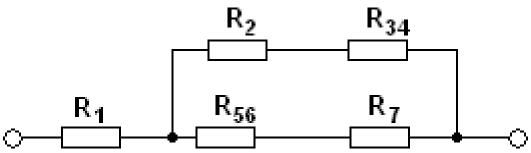
Řešení:

Nejprve zjednodušíme odpor mezi svorkami, tak aby zbyl pouze jediný výsledný odpor. Číselné dosazování hodnot rezistorů je doporučeno až u konečného vztahu pro výsledný odpor, jelikož tím eliminujeme průběžné zaokrouhlování a tím snižujeme chybu teoretického výpočtu.

1. Vypočteme paralelní spojení $R_3 – R_4$ a $R_5 – R_6$:

$$R_{34} = \frac{R_3 . R_4}{R_3 + R_4}$$

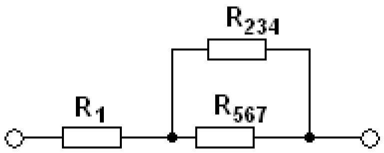
$$R_{56} = \frac{R_5 . R_6}{R_5 + R_6}$$



2. Vypočteme sériové spojení $R_2 – R_{34}$ a $R_{56} – R_7$:

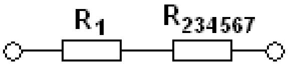
$R_{234} = R_2 + R_{34}$

$R_{567} = R_{56} + R_7$



3. Vypočteme paralelní spojení $R_{234} – R_{567}$:

$$R_{234567} = \frac{R_{234} . R_{567}}{R_{234} + R_{567}}$$



4. Vypočteme výsledný odpor R_v jako sériové spojení $R_1 – R_{234567}$:

$$R_v = R_1 + R_{234567}$$

a po dosazení všech dílčích vztahů:

$$R_v = R_1 + \frac{\left(R_2 + \frac{R_3 . R_4}{R_3 + R_4}\right) . \left(\frac{R_5 . R_6}{R_5 + R_6} + R_7\right)}{\left(R_2 + \frac{R_3 . R_4}{R_3 + R_4}\right) + \left(\frac{R_5 . R_6}{R_5 + R_6} + R_7\right)}$$

Nyní může dosadit číselné hodnoty jednotlivých odporů:

$$R_v = 20 + \frac{\left(35 + \frac{15.10}{15 + 10}\right) . \left(\frac{50.80}{50 + 80} + 25\right)}{\left(35 + \frac{15.10}{15 + 10}\right) + \left(\frac{50.80}{50 + 80} + 25\right)}$$

$$\mathbf{R_v = \underline{\underline{43{,}6\ \Omega}}}$$

5. Celkový proud obvodem I vypočteme podle Ohmova zákona:

$$\mathbf{I = \frac{U}{R} = \frac{20}{43{,}6} = 0{,}458\ A = \underline{\underline{458\ mA}}}$$

3.4 Metoda uzlových napětí

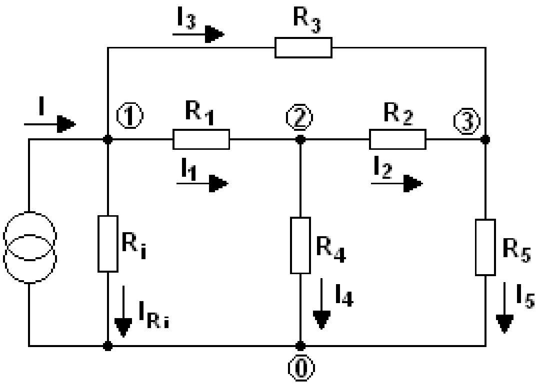
Metoda uzlových napětí, založena na použití I. Kirchhoffova zákona, se používá nejčastěji v lineárních obvodech, kde se nacházejí zdroje proudu. Je vhodná pro řešení obvodů, ve kterých je mnoho větví spojeno do jednoho uzlu.

Postup řešení:

1. Ve zkoumaném obvodu nejprve najdeme uzel, ve kterém se sbíhá nejvíce větví a zvolíme ho jako referenční.
2. Označíme ostatní uzly a zavedeme uzlové napětí mezi tyto a referenční uzel
3. Označíme proudy pro jednotlivé uzly a sestavíme pro ně také rovnice podle prvního Kirchhoffova zákona. Po vyřešení těchto rovnic známe všechny obvodové veličiny.

Příklad:

Metodou uzlových napětí vypočtěte jednotlivá napětí mezi vyznačenými uzly a referenčním uzlem v obvodu na Obr. 41.



R_1 = 500 mΩ

R_2 = 250 mΩ

R_3 = 333 mΩ

R_4 = 1000 mΩ

R_5 = 200 mΩ

I = 500 mA

Obr.41 – Příklad metody uzlových napětí

Řešení:

Sestavíme rovnice podle I. Kirchhoffova zákona pro jednotlivé uzly:

$I_1 + I_3 = I$ -uzel 1

$I_1 - I_2 - I_4 = 0$ -uzel 2

$I_2 + I_3 - I_5 = 0$ -uzel 3

Jednotlivé proudy vyjádříme pomocí uzlových napětí:

$$(U_{10} + U_{20}) * G_1 + (U_{10} - U_{30}) * G_3 = I$$

$$(U_{10} - U_{20}) * G_1 - (U_{20} - U_{30}) * G_2 - U_{20} * G_4 = 0$$

$$(U_{20} - U_{30}) * G_2 + (U_{10} - U_{30}) * G_3 - U_{30} * G_5 = 0$$

Soustavu upravíme:

$$U_{10} * (G_1 + G_3) - U_{20} * G_1 - U_{30} * G_3 = I$$

$$U_{10} * G_1 - U_{20} * (G_1 + G_2 + G_4) + U_{30} * G_2 = 0$$

$$U_{10} * G_3 - U_{20} * G_2 - U_{30} * (G_2 + G_3 + G_5) = 0$$

Po číselném dosazení do matice vznikne následující rovnice:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matici lze sestavit přímo podle následujícího pravidla:

- Každý řádek matice reprezentuje příslušné uzlové napětí
- Prvky hlavní diagonály jsou součtem vodivostí, které jsou do uzlu zapojeny
- Zbývající prvky jsou sdílené vodivosti mezi uzly se záporným znaménkem
- Vektor pravé strany je dán zdroji zapojenými do příslušných uzlů

Metody řešení:

3.4.1 Cramerovo pravidlo

Jedním z nejjednodušších pravidel pro výpočet soustavy lineárních algebraických rovnic maticovým způsobem je Cramerovo pravidlo. Má však jisté omezení co do počtu rovnic v soustavě, jelikož při vzrůstajícím počtu rovnic ve velkém měřítku roste také počet výpočtů subdeterminatntů. Výpočet probíhá tak, že nejprve vypočteme determinant matice koeficientů a následně vypočteme determinanty stejné matice, kde je jeden ze sloupců nahrazen vektorem pravých stran. Jednotlivé neznámé jsou potom dány podílem příslušného determinantu matice s nahrazeným sloupcem a determinantu původní matice koeficientů.

Nevýhodou Cramerova pravidla je nemožnost řešení soustavy rovnic, která má singulární matici, jinými slovy její determinant je roven nule, jelikož v následujícím vyjádření konkrétních veličin by došlo k dělení nulou.

Sarrusovým pravidlem vypočteme příslušné determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -3 & -4 & 12 \end{vmatrix}$$

= [5.7.12] + [(-2).(-4).(-3)] + [(-3).(-2).(-4)] - {[(-3).7 .(-3)] +

+ [(-4).(-4).5] + [12.(-2).(-2)]} = 181

$D_{10} = \begin{vmatrix} 0,5 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix}$ = [0,5.7.12] + [(-2).(-4).0] + [(-3).0.(-4)] – {[0.7.(-3)] +

+ [(-4).(-4).0,5] + [12.0.(-2)]} = 34,0

$D_{20} = \begin{vmatrix} 5 & 0,5 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ = [5.0.12] + [0,5.(-4).(-3)] + [(-3).(-2).0] - {[(-3).0.(-3)] +

+ [0.(-4).5] + [12.(-2).(0,5)]} = 18,0

$D_{30} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0,5 \\ -2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ = [5.7.0] + [(-2).0.(-3)] + [0,5.(-2).(-4)] -

- {[(-3).7.0,5] + [(-4).0.5] + [0.(-2).(-2)]} = 14,5

Výsledné hodnoty uzlových napětí:

$\mathbf{U_{10}} = \frac{D_{10}}{D} = \mathbf{188\ mV}$

$\mathbf{U_{20}} = \frac{D_{20}}{D} = \mathbf{99,4\ mV}$

$\mathbf{U_{30}} = \frac{D_{30}}{D} = \mathbf{80,1\ mV}$

3.4.2 Gaussova eliminační metoda

V případě, že chceme vypočítat hodnoty neznámých soustavy lineárních algebraických rovnic, kde je počet neznámých vyšší než 3, je vhodná Gaussova eliminační metoda. Princip spočívá v tom, že najdeme rozšířenou matici soustavy, kde pod hlavní diagonálou jsou pouze nuly. Tato rozšířená matice je ekvivalentní k původní rozšířené matici, a k úpravě lze použít následujících pravidel:

- Násobení řádku jakýmkoli nenulovým číslem
- Výměna řádků mezi sebou
- Přičítání jakéhokoli násobku jednoho řádku ke druhému

Gaussova rozšířená matice soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -3 & 0,5 \\ -2 & 7 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -3 & 0,5 \\ 0 & 31 & -26 & 1 \\ 0 & -26 & 51 & 1,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -3 & 0,5 \\ 0 & 31 & -26 & 1 \\ 0 & 0 & 905 & 72,5 \end{array}\right)$$

Postup při úpravách:

1. Druhý řádek vynásobíme 5 a přičteme k němu dvojnásobek prvního řádku a současně k 5-ti násobku třetího řádku přičteme trojnásobek prvního řádku
2. Třetí řádek vynásobíme 31 a přičteme k němu 26-ti násobek druhého řádku

Nyní máme matici upravenou tak, že pod hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové a můžeme vyjádřit U_{30}. Pomocí tohoto uzlového napětí postupně vypočteme i ta zbylá:

U_{30}:

$905 \cdot U_{30} = 72{,}5$ *3. Řádek matice*

U_{30} = —— = 80,1 mV

U_{20}:

$31 \cdot U_{20} - 26 \cdot U_{30} = 1$ *2. Řádek matice*

U_{20} = ——— = 99,4 mV

U_{10}:

$5 \cdot U_{10} - 2 \cdot U_{20} - 3 \cdot U_{30} = 0{,}5$ *1. Řádek matice*

U_{10} = ———— = 187 mV

3.4.3 Inverzní matice

V případě, že je matice čtvercová a není singulární, můžeme k výpočtu soustavy lineárních rovnic použít inverzní matici, jelikož platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Kde A je matice koeficientů, X je vektor neznámých a B je vektor pravých stran.

Pokud tedy najdeme inverzní matici A-1 k matici původní a vynásobíme ji vektorem pravých stran, získáme vektor neznámých.

Metody výpočtu inverzní matice:

1. Gaussova eliminace

Princip této metody spočívá v tom, že původní matici rozšíříme o matici jednotkovou. Tyto dvě matice následně upravujeme podle výše zmíněných Gaussových pravidel tak, aby místo původní matice byla matice jednotková. Pravá matice, která byla původně maticí jednotkovou je nyní inverzní.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -26 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -26 & 51 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -26 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 905 & 145 & 130 & 155 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & -26 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 181 & 29 & 26 & 31 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 155 & 0 & -145 & 35 & 10 & 0 \\ 0 & 31 & -26 & 1116 & 1581 & 806 \\ 0 & 0 & 181 & 29 & 26 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 31 & 0 & -29 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 31 & 0 & 1116 & 1581 & 806 \\ 0 & 0 & 181 & 29 & 26 & 31 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5611 & 0 & 0 & 2108 & 1116 & 899 \\ 0 & 5611 & 0 & 1116 & 1581 & 806 \\ 0 & 0 & 181 & 29 & 26 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0,38} & \mathbf{0,20} & \mathbf{0,17} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0,20} & \mathbf{0,28} & \mathbf{0,14} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0,17} & \mathbf{0,14} & \mathbf{0,17} \end{array}\right)$$

Postup při úpravách matice:

1. Druhý řádek vynásobíme 5 a přičteme k němu dvojnásobek prvního řádku a současně k 5-ti násobku třetího řádku přičteme trojnásobek prvního řádku
2. Třetí řádek vynásobíme 31 a přičteme k němu 26-ti násobek druhého řádku
3. Třetí řádek vydělíme 5
4. Druhý řádek vynásobíme 181 a přičteme k němu 26-ti násobek třetího řádku
5. První řádek vydělíme 5
6. První řádek vynásobíme 181 a přičteme k němu 29-ti násobek třetího řádku
7. Všechny řádky vydělíme příslušnými čísly tak, abychom na levé straně měli jednotkovou matici. A na pravé straně máme inverzní matici k matici původní

2. Výpočet pomocí vzorce

Jiný způsob výpočtu inverzní matice spočívá ve využití adjungované matice, subdeterminantů a determinantů. Pro výpočet jednotlivých prvků inverzní matice použijeme následující vztah:

$$a_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} * |A_{j,i}|}{|A|}$$

$|A|$ – detmerminant původní matice

$|A_{j,i}|$ - subdeterminant prvku při vynechání i-tého řádku a j-tého sloupce

Při obvyklém řešení inverzní matice touto metodou je nezbytné nejprve matici transponovat. V tomto případě však není tato úprava potřeba, jelikož je matice souměrná podle hlavní diagonály.

Sarrusovým pravidlem jsme již dříve získali velikost determinantu matice A:

$|A|$ =D = 181

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{181}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{68}{181}} & \mathbf{\frac{36}{181}} & \mathbf{\frac{29}{181}} \\ \mathbf{\frac{36}{181}} & \mathbf{\frac{51}{181}} & \mathbf{\frac{26}{181}} \\ \mathbf{\frac{29}{181}} & \mathbf{\frac{26}{181}} & \mathbf{\frac{31}{181}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,38} & \mathbf{0,20} & \mathbf{0,17} \\ \mathbf{0,20} & \mathbf{0,28} & \mathbf{0,14} \\ \mathbf{0,17} & \mathbf{0,14} & \mathbf{0,17} \end{pmatrix}$$

Výpočtem jsme získali inverzní matici A^{-1} a můžeme ji dosadit do vzorce a tím získat vektor neznámých. V našem případě je to vektor neznámých uzlových napětí:

$$\begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,38} & \mathbf{0,20} & \mathbf{0,17} \\ \mathbf{0,20} & \mathbf{0,28} & \mathbf{0,14} \\ \mathbf{0,17} & \mathbf{0,14} & \mathbf{0,17} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matice a vektoru dostáváme vektor smyčkových proudů:

U_{10} = 0,38.0,5 = **190 mV**

U_{20} = 0,20.0,5 = **100 mV**

U_{30} = 0,17.0,5 = **85 mV**

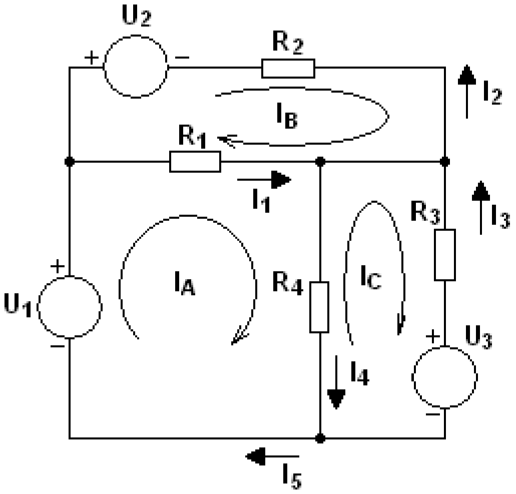
3.5 Metoda smyčkových proudů

Metoda smyčkových proudů využívá II. Kirchhoffův zákon pro výpočet proudů a úbytků napětí tak, že najdeme fiktivní proudy jednotlivými smyčkami a s jejich pomocí vypočteme proudy skutečné.

Postup řešení:

1. Po případné úpravě zdrojů označíme v jednotlivých smyčkách obvodu smyčkové proudy. Směr volíme libovolně avšak pro všechny proudy stejný.
2. Pro všechny smyčky sestavíme rovnice podle 2. Kirchhoffova zákona, které následně vyřešíme. V závislosti na počtu smyček v obvodu volíme řešení buď dosazovací či sčítací metodou (pro 2 smyčky) nebo maticově (pro 3 a více smyček).
3. Pomocí vypočtených smyčkových proudů vypočteme ty skutečné algebraickým součtem a následně také pomocí Ohmova zákona vypočteme jednotlivé úbytky napětí.

Příklad:
Metodou smyčkových proudů vypočtěte jednotlivé proudy větvemi:



$U_1 = U_3 = 5$ V
$U_2 = 2$ V

$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 4\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$

Obr. 42 – Příklad metody smyčkových proudů

Řešení:

Sestavíme rovnice podle II. Kirchhoffova zákona pro jednotlivé smyčky:

$-U_1 + R_1.(I_A - I_B) + R_4.(I_A - I_C) = 0$

$U_2 + R_2.I_B + R_1.(I_B - I_A) = 0$

$U_3 + R_4.(I_C - I_A) + R_3.I_C = 0$

Soustavu rovnic upravíme tak, abychom získali matici koeficientů a vektor neznámých:

$I_A*(R_1 + R_4) - I_B*R_1 - I_C*R_4 = U_1$

$-R_1*I_A + I_B*(R_2 + R_1) = -U_2$

$-I_A*R_4 + I_C*(R_3 + R_4) = -U_3$

a následně zaneseme do matice:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Matici lze sestavit **přímo** podle následujícího pravidla:

- Každý řádek matice reprezentuje příslušný smyčkový proud
- Prvky hlavní diagonály jsou součtem odporů ve smyčce
- Zbývající prvky jsou sdílené odpory mezi smyčkami a pokud jsou smyčkové proudy orientované proti sobě přidáme záporné znaménko

Metody řešení:

3.5.1 Cramerovo pravidlo

Sarrusovým pravidlem vypočteme příslušné determinanty

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = [3.\ 4\ .6] + [(-1)\ .\ 0.\ (\ -2)] + [(-2)\ .\ (-1)\ .\ 0] - \{[(-2)^2\ .\ 4\ .\ ] + [0\ .\ 0\ .\ 3\ \ + [6\ .\ (-1)^2]\} = \underline{\underline{50}}$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = [5\ .\ 4\ .\ 6] + [(-1)\ .\ 0\ .\ 5] + [(-2)^2\ .\ 0] - \{[(-5)\ .\ 4\ \ .\ (-2)] + [0\ .\ 0\ .\ 5] + [6\ .\ (-2)\ .\ (-1)] = \underline{\underline{68}}$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = [3\ .\ (-2)\ .\ 6] + [5\ .\ 0\ .\ (-2)] + [(-2)\ .\ (-1)\ .\ (-5)] - \{[(-2)^3] + [(-5)\ .\ 0\ .\ 3]\ \ + [6\ .\ -1\ .\ (5)]\} = \underline{\underline{-8}}$$

$D_C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ = [3 . 4 . (-5)] + [(-1) . (-2)^2] + [5 . (-1) . 0] – {[(-2) . 4 . 5] + [0 . (-2) . 3] + [(-5) . (-1)^2]} = -19

Výsledné hodnoty smyčkových proudů:

$\mathbf{I_A} = \frac{D_A}{D} = 1{,}36$ A, $\mathbf{I_B} = \frac{D_B}{D} = -0{,}16$ A, $\mathbf{I_C} = \frac{D_C}{D} = -0{,}38$

3.5.2 Gaussova eliminační metoda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 11 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 11 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 25 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Postup při úpravě matice gaussovou eliminační metodou:

1. Druhý řádek vynásobíme –2 a přičteme ke třetímu řádku
2. Druhý řádek vynásobíme 3 a přičteme k prvnímu řádku
3. První řádek vynásobíme 3 a přičteme ke třetímu řádku

Gaussova eliminace sice není úplná, tedy nejsou pod hlavní diagonálou jen nuly. V tomto případě to však nevadí, jelikož v posledním řádku je pouze jedna neznámá, která lze ihned vypočítat a následným dosazením do dalších rovnic lze vypočítat také zbývající proudy.

Z třetího řádku matice lze vypočítat proud I_B:

I_B = - 0,16 A

Dosadíme do druhého řádku matice a získáme I_A:

I_A = 1,36 A

Dosadíme do prvního řádku matice a získáme I_C:

I_C = -0,38 A

3.5.3 Inverzní matice

1. Gaussova eliminace

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & 0 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & 0 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 8 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & 0 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 44 & -8 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 8 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 275 & 0 & 0 & 132 & 33 & 44 \\ 0 & 1100 & 0 & 132 & 308 & 44 \\ 0 & 0 & 50 & 8 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0,48} & \mathbf{0,12} & \mathbf{0,16} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0,12} & \mathbf{0,28} & \mathbf{0,04} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0,16} & \mathbf{0,40} & \mathbf{0,22} \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme 4 a přičteme k němu Postup při úpravě matice:

1. druhý řádek
2. První řádek vynásobíme 2 a přičteme jej ke třetímu znásobenému 11
3. Druhý řádek vynásobíme 11 a přičteme k němu první řádek
4. První a druhý řádek vynásobíme 25 a přičteme k nim čtyřnásobek třetího řádku
5. Upravíme tak, aby na pravé straně byla jednotková matice, tzn. Podělíme příslušnými čísly

Nyní máme na levé straně jednotkovou matici a na pravé straně inverzní matici k matici původní.

2. Výpočet pomocí vzorce

Sarrusovým pravidlem jsme již získali velikost determinantu matice A:

$|A|$ =D = 50

$$A^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{12}{25}} & \mathbf{\frac{3}{25}} & \mathbf{\frac{4}{25}} \\ \mathbf{\frac{3}{25}} & \mathbf{\frac{7}{25}} & \mathbf{\frac{1}{25}} \\ \mathbf{\frac{4}{25}} & \mathbf{\frac{1}{25}} & \mathbf{\frac{11}{50}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0,48} & \mathbf{0,12} & \mathbf{0,16} \\ \mathbf{0,12} & \mathbf{0,28} & \mathbf{0,04} \\ \mathbf{0,16} & \mathbf{0,40} & \mathbf{0,22} \end{pmatrix}$$

Výpočtem jsme získali inverzní matici A^{-1} a můžeme ji dosadit do vzorce a tím vypočítat vektor neznámých. V našem případě je to vektor neznámých smyčkových proudů:

$$\begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}48 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}28 & 0{,}04 \\ 0{,}16 & 0{,}40 & 0{,}22 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matice a vektoru dostáváme vektor smyčkových proudů:

I_A = [0,48 **.** 5] + [0,12 **.** (-2)] + [0,16 **.** –(5)] = 1,36 A

I_B = [0,12 **.** 5] + [0,28 **.** (-2)] + [0,04 **.** (-5)] = -0,16 A

I_C = [0,16 **.** 5] + [0,40 **.** (-2)] + [0,22 **.** -5] = -0,38 A

Třemi způsoby jsme získali tři smyčkové proudy a jejich pomocí vypočítáme proudy skutečné následujícím způsobem:

$\mathbf{I_1}$ = I_A - I_B = 1,52A $\mathbf{I_2}$ = -I_B = 0,16A $\mathbf{I_3}$ = -I_C = 0,38A

$\mathbf{I_4}$ = I_A - I_C = 1,74A $\mathbf{I_5}$ = I_A = 1,36A

3.6 Metoda lineární superpozice

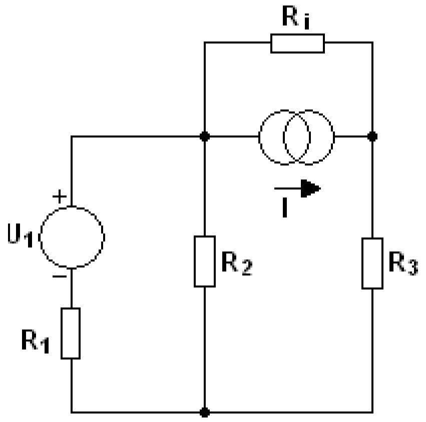
Tato metoda se zaměřuje na řešení lineárních obvodů s několika zdroji elektrické energie. Její princip spočívá v tom, že řešíme obvod vždy pouze s jedním s zdrojem přičemž zbývající nahradíme jejich vnitřními odpory. To znamená, že proudové zdroje nahradíme rozpojením obvodu v místě jejich působení a místo napěťových zdrojů větev zkratujeme. To provedeme postupně pro všechny zdroje a výsledné dílčí veličiny algebraicky sečteme.

Postup při řešení:

- Označíme polaritu zdrojů a také prvek, který budeme analyzovat
- Obvod upravíme tak, aby zůstal pouze jeden zdroj a následně vypočteme napětí a proud na uvažovaném prvku. Úpravou se rozumí vyřazení zdrojů proudu a zkratování zdrojů napětí.
- Totéž provedeme pro ostatní zdroje tak abychom získali dílčí proudy a napětí od jednotlivých zdrojů
- Tyto dílčí proudy a napětí algebraicky sečteme a dostaneme skutečný proud i napětí na uvažovaném prvku

Příklad:

Pomocí metody lineární superpozice vypočteme výsledný úbytek napětí na rezistoru R_3

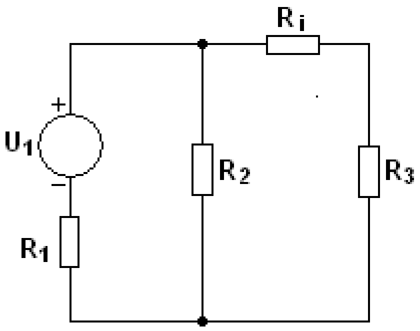


$I = 0{,}01\ A$
$U_1 = 10\ V$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 250\ \Omega$
$R_3 = 200\ \Omega$
$Ri = 500\ \Omega$

Obr 43. – Příklad lineární superpozice

1. **Dílčí obvod**

a) Nahradíme proudový zdroj jeho vnitřním odporem, aby zbýval pouze jediný zdroj:



b) Vypočteme výsledný odpor 1. dílčího obvodu R_{V1} a také celkový proud tímto obvodem I_{V1}

$$R_{i3} = R_i + R_3$$

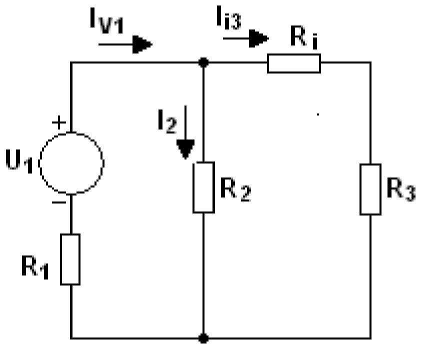
$$R_{i23} = \frac{R_2 + R_{i3}}{R_2 . R_{i3}}$$

$$R_{V1} = R_{i23} + R_1$$

$$R_{V1} = R_{i23} + R_1 = \frac{R_2+R_i+R_3}{R_2.(R_i+R_3)} + R_1 = \frac{250+500+200}{250.(500+200)} + 100 = \underline{\underline{284\ \Omega}}$$

$$I_{V1} = \frac{U_1}{R_{V1}} = \frac{10}{284} = 35{,}2\ mA$$

c) Pomocí poměru vodivostí určíme proud rezistorem R_3 a následně také pomocí Ohmova zákona stanovíme jeho první dílčí úbytek napětí $\boldsymbol{U_3'}$:



$$G_{i3} = \frac{1}{R_{i3}} = \frac{1}{R_i + R_3} = \frac{1}{500 + 200} = 1{,}43\ \text{mS}$$

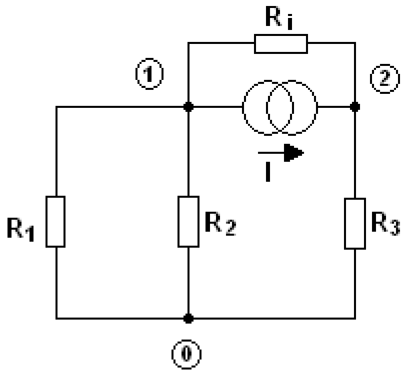
$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{250} = 4{,}00\ \text{mS}$$

$$I_{i3} = I.\frac{G_{i3}}{G_{i3}+G_2} = 35{,}2.\frac{1{,}43}{1{,}43+4} = 9{,}27\ \text{mA}$$

$$U_3' = I_{i3}.R_3 = 9{,}27.10^{-3}\ .\ 200 = \underline{\underline{1{,}85\ \text{V}}}$$

2. Dílčí obvod

a) Nahradíme napěťový zdroj jeho vnitřním odporem, aby zbýval pouze jediný zdroj



b) Vypočteme druhé dílčí napětí $\boldsymbol{U_3''}$ pomocí metody uzlových napětí

Metoda uzlových napětí:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_i} & -\frac{1}{R_i} \\ -\frac{1}{R_i} & \frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{100}+\frac{1}{250}+\frac{1}{500} & -\frac{1}{500} \\ -\frac{1}{500} & \frac{1}{500}+\frac{1}{200} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$$

Po výpočtu (např. Cramerovým pravidlem) získáme jednotlivé uzlové napětí U_{10} a U_{20}:

U_{10} = 0,83 V

U_{20} = 1,66 V

Jak je zřejmé z druhého dílčího schéma, uzlové napětí U_{20} je přímo rovno požadovanému napětí $\mathbf{U_3''}$

$\mathbf{U_3''} = U_{20}$ = 1,66 V

Výsledný úbytek na R_3:

Pomocí prostého algebraického součtu jednotlivých dílčích napětí získáme celkový úbytek napětí na R_3

$$\mathbf{U_3 = U_3' + U_3'' = 1{,}85 + 1{,}66 = \underline{\underline{3{,}51\ V}}}$$

3.7 Věty o náhradním zdroji

Věty o náhradním zdroji nám říkají, že každý lineární obvod, ať už je jakkoli složitý, lze nahradit obvodem skutečného zdroje (ideální zdroj a jeho vnitřní odpor) ke dvěma libovolným svorkám.

3.7.1 Théveninova poučka

Pokud řešíme lineární obvod pomocí Théveninovy věty, nahrazujeme složitý obvod skutečným zdrojem napětí, tedy ideálním zdrojem napětí a jeho vnitřním odporem.

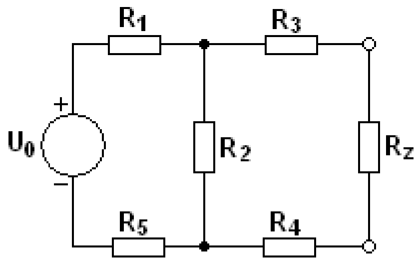
Metoda je bezesporu výhodná, pokud máme stále stejný složitý obvod a měníme pouze velikost zátěžového odporu.

Postup při řešení elektrického obvodu:

- Označíme libovolné svorky, které chceme analyzovat z hlediska obvodových veličin
- Rozdělíme obvod na prvek mezi označenými svorkami a zbytek obvodu
- Zde použijeme Théveninův teorém, kde zbytek obvodu nahradíme skutečným zdroje napětí (ideální zdroj a vnitřní odpor). Velikost napětí tohoto zdroje je roven napětí naprázdno mezi svorkami a vnitřní odpor je celkový odpor soustavy bez prvku mezi svorkami s vyřazenými zdroji

Příklad:

Vypočtěte proud a úbytek napětí na zátěži R_z a také protékající proud:

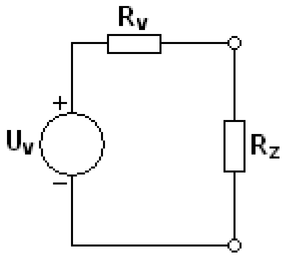


U_0 = 150 V
R_1 = 100 Ω
R_2 = 300 Ω
R_3 = R_4 = 400 Ω
R_5 = 200 Ω
R_z = 500 Ω

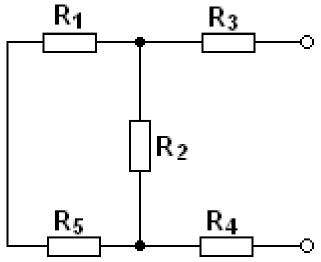
Obr. 44 – Příklad Théveninovy poučky

Řešení:

a) Nakreslíme náhradní obvod



b) Vypočteme celkovou zátěž R_v při vyřazeném zdroji i zátěži



$$R_V = R_3 + \frac{(R_1+R_5).R_2}{R_1+R_5+R_2} + R_4 = 400 + \frac{(100+200).300}{100+200+300} + 400 = \underline{\underline{950\ \Omega}}$$

c) Vypočteme proud I_0 při odpojené zátěži

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1+R_2+R_5} = \frac{150}{100+300+200} = \underline{\underline{0{,}25\ \text{A}}}$$

d) Zjistíme napětí zdroje náhradního obvodu U_v:

Pokud odpory R_3 a R_4 neprotéká proud, nevznikají zde ani úbytky napětí. Napětí zdroje náhradního obvodu U_V je tedy roven rozdílu napětí původního zdroje U_0 a úbytků napětí na odporech R_1 a R_5, tedy U_{R1} a U_{R5}.

$$\mathbf{U_V} = U_0 - U_{R1} - U_{R5} = U_0 - R_1.I_0 - R_5.I_0 = 150 - 100.0{,}25 - 200.0{,}25 = \underline{\underline{\mathbf{75\ V}}}$$

e) Vypočteme proud zátěží I_z a úbytek napětí na zátěži U_R

$$\mathbf{I_Z} = \frac{U_V}{R_V+R_Z} = \frac{75}{950+500} = \underline{\underline{\mathbf{51{,}7\ mA}}}$$

$$\mathbf{U_{Rz}} = R_z.I_z = 500\ .\ 0{,}0517 = \underline{\underline{\mathbf{25{,}8\ V}}}$$

3.7.2 Nortonova věta

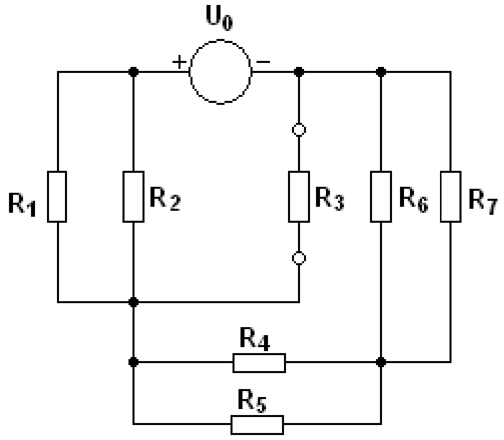
Nortonova věta je proudový ekvivalent Théveninovy věty. Zde nahrazujeme složitý obvod skutečným zdrojem proudu, tedy ideálním zdrojem proudu a jeho vnitřním odporem.

<u>Postup při řešení elektrického obvodu:</u>

- Označíme libovolné svorky, které chceme analyzovat z hlediska obvodových veličin
- Nakreslíme náhradní obvod se zdrojem proudu I_V a vnitřním odporem R_V připojený k analyzovaným svorkám připojený k analyzovaným svorkám
- Vypočteme vnitřní odpor náhradního zdroje R_V, tak že odpojíme zátěž a vyřadíme zdroj
- Vypočteme proud mezi danými svorkami pomocí jejich zkratování
- Připojíme zátěž a vypočteme výsledný proud mezi svorkami

<u>Příklad:</u>

Pomocí Nortonovy věty zjistěte velikost proudu procházejícího rezistorem R_3.

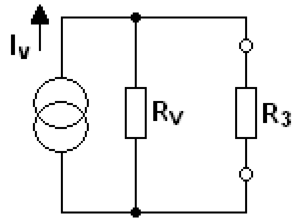


$U_0 = 20$ V
$R_1 = R_2 = 4\ \Omega$
$R_3 = R_4 = 6\ \Omega$
$R_5 = 10\ \Omega$
$R_6 = 15\ \Omega$
$R_7 = 1\ \Omega$

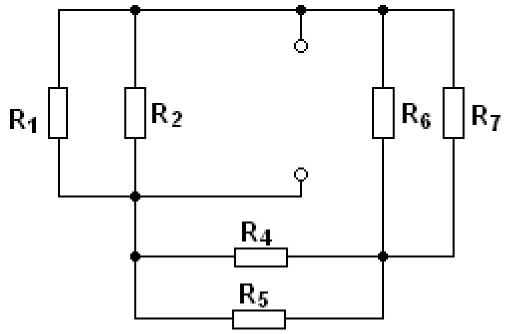
Obr. 44 – Příklad Nortonovy poučky

Řešení:

a) Nakreslíme náhradní obvod



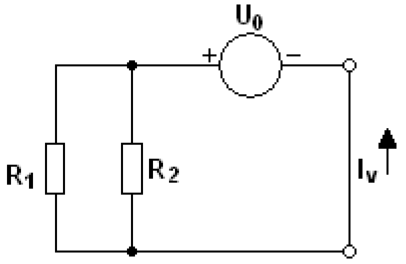
b) Vypočteme celkovou zátěž R_v mezi svorkami, při vyřazeném zdroji i zátěži



$$R_V = \frac{\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}.\left(\frac{R_4.R_5}{R_4+R_5}+\frac{R_6.R_7}{R_6+R_7}\right)}{\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_4.R_5}{R_4+R_5}+\frac{R_6.R_7}{R_6+R_7}} = \underline{\underline{1{,}4\ \Omega}}$$

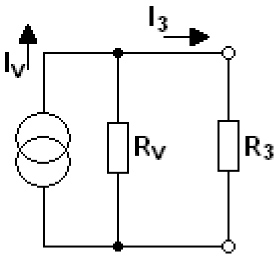
c) Vypočteme proud I_v při zkratování svorek

Abychom mohli vypočítat proud mezi svorkami, musíme je nejprve zkratovat. Tím také „přemostíme“ rezistory R4, R5, R6 a R7. Obvod pro zjištění proudu mezi svorkami bez zátěže tedy vypadá následovně:



$$I_V = \frac{U_0}{\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}} = \underline{\underline{10\ A}}$$

d) Vypočteme výsledný proud I_{R3} rezistorem R_3



$$I_3 = I_V \cdot \frac{R_V}{R_V + R_3} = \underline{\underline{1{,}89\ \text{A}}}$$

4. Řešení elektrických obvodů se střídavým napájením

V praxi se, co se týče elektrických obvodů, setkáváme se složitými obvody obsahující rezistory, kondenzátor, cívky, transformátory, operační zesilovače a mnohé další. Následující kapitola bude zaměřena především na popis chování jednotlivých prvků v obvodu napájeném střídavým zdrojem a na aplikaci metod řešení těchto obvodů, které byly rozebírány v předcházející kapitole.

4.1 Obvody s RLC

Při řešení obvodů, které obsahují akumulační prvky, tedy kondenzátory a cívky musíme brát v úvahu nejen jejich činný odpor, ale i odpor jalový. Ten je zahrnutý v komplexním odporu nazývaném impedance.

Impedance

Impedance **Z** představuje obecný komplexní odpor dané součástky při průchodu střídavého harmonického proudu. Dělí se na reálnou složku, která představuje činný odpor neboli **rezistanci R** a složku imaginární, která je reprezentována jalovým odporem neboli **reaktancí X**.

$$\mathbf{Z = R + jX \qquad [\Omega]}$$

Z – Impedance (komplexní odpor)
R – Rezistance (činný odpor)
X – Reaktance (jalový odpor)

Admitance

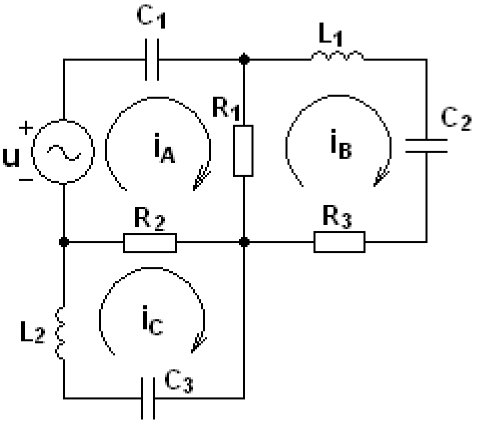
Stejně jako u prostého činného odporu R je převrácenou hodnotou vodivost G, impedance Z má taktéž svůj vodivostní protějšek zvaný **admitance Y.** Admitance se také dělí na složku reálnou a imaginární:

$$\mathbf{Y = G + jB \qquad [S]}$$

Y – admitance (jednotkou je siemens)
G – konduktance (činná vodivost)
B – susceptance (jalová vodivost)

4.1.1 Metoda smyčkových proudů

Pomocí metody smyčkových proudů určete jednotlivé proudy větvemi:



U = 50 V (efektivní hodnota)
f = 400 Hz
R1 = 20 Ω
R2 = 10 Ω
R3 = 50 Ω
C1 = 39,7 µF
C2 = 26,5 µF
C3 = 13,3 µF
L1 = 15,9 mH
L2 = 7,95 mH

Obr. 45 – Příklad metody smyčkových proudů s nelineárními prvky

Nejprve je nutné vypočítat jalový odpor kondenzátorů a cívek, tedy jejich reaktance:

Kapacitní reaktance:

$Xc_1 = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2\pi.400.39{,}7.10^{-6}} = \frac{1}{997{,}7.10^{-4}} = \underline{\underline{10\ \Omega}}$

$Xc_2 = \underline{\underline{15\ \Omega}}$

$Xc_3 = \underline{\underline{30\ \Omega}}$

Induktivní reactance:

$X_{L_1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi.400.15{,}9.10^{-3} = \underline{\underline{40\ \Omega}}$

$X_{L_2} = \underline{\underline{20}}$

Matici koeficientů pro výpočet smyčkových proudů sestavíme podle stejných pravidel jako pro obvod, který obsahuje pouze rezistory:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + jX_{C_1} & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + jX_{L_1} + jX_{C_2} + R_3 & 0 \\ -R_2 & 0 & R_2 + jX_{C_3} + jX_{L_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustavu rovnic vyřešíme Cramerovým pravidlem:

$$\begin{pmatrix} 30+j10 & -20 & -10 \\ -20 & 70+j55 & 0 \\ -10 & 0 & 10+j50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 30+j10 & -20 & -10 \\ -20 & 70+j55 & 0 \\ -10 & 0 & 10+j50 \end{vmatrix} = [(30+j10).(70+j55).(10+j55)] - [(-10)^2.\ (70+j55) + (10+j50).(-20)^2] = \underline{\underline{-113000 + j75500}}$$

$$D_A = \begin{vmatrix} 50 & -20 & -10 \\ 0 & 70+j55 & 0 \\ 0 & 0 & 10+j50 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-109500 + j197000}}$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 30+j10 & 50 & -10 \\ -20 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 10+j50 \end{vmatrix} = \underline{\underline{10000 + j50000}}$$

$$D_C = \begin{vmatrix} 30+j10 & -20 & 50 \\ -20 & 70+j55 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\underline{35000 + j27500}}$$

$$I_A = \frac{D_A}{D} = \frac{-109500 + j197000}{-113000 + j75500} = \underline{\underline{1,475 - j0,757\ A}}$$

$$I_B = \frac{D_A}{D} = \frac{10000 + j50000}{-113000 + j75500} = \underline{\underline{0,143 - j0,347\ A}}$$

$$I_C = \frac{D_A}{D} = \frac{35000 + j27500}{-113000 + j75500} = \underline{\underline{-0,102 - j0,311\ A}}$$

Proud I_C má opačný směr než jsme předpokládali v tom případě i I_C má opačný směr.Vypočteme skutečné proudy jednotlivými větvemi v algebraickém tvaru komplexního čísla:

$\mathbf{I_1}$ = $I_A - I_B$ = (1,475 – j0,757 A) – (0,143 – j0,347 A) = **1,332 – j0,410 A**

$\mathbf{I_2}$ = $I_A - I_C$ = (1,475 – j0,757) – (-0,102 – j0,311) = **1,577 – j0,446 A**

$\mathbf{I_3}$ = I_B = **0,143 – j0,347 A**

$\mathbf{I_4}$ = I_C = **-0,102 – j0,311 A**

$\mathbf{I_5}$ = I_A = **1,475 – j0,757 A**

Přepočet na exponenciální a goniometrický tvar komplexního čísla:

I_1 = 1,332 – j0,410 A = 1,394.$e^{j17,1}$ = |1,394|.(cos 17,1 + j.sin 17,1)

I_2 = 1,577 – j0,446 A = 1,639.$e^{j15,8}$ = |1,639|.(cos 15,8 + j.sin 15,8)

I_3 = 0,143 – j0,347 A = 0,375.$e^{j67,6}$ = |0,375|.(cos 67,6 + j.sin 67,6)

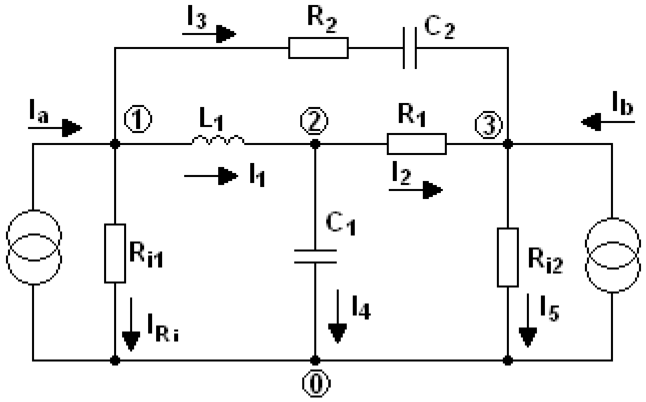
I_4 = -0,102 – j0,311 A = 0,327.$e^{j71,8}$ = |0,327|.(cos 71,8 + j.sin 71,8)

I_5 = 1,475 – j0,757 A = 1,658.$e^{j27,1}$ = |1,658|.(cos 27,1 + j.sin 27,1)

4.1.2 Metoda uzlových napětí

Příklad:

Metodou uzlových napětí vyřešte jednotlivé napětí mezi uzly:



$I_a = 0{,}5.e^{j39^0}$ A
I_b = 0,32 + j0,21 A
R_{i1} = 200 Ω
R_1 = 50 Ω
R_{i2} = 400 Ω
R_2 = 500 Ω
C_1 = 795 nF
C_2 = 227 nF
L_1 = 11,9mH
f = 2 kHz

Obr. 46 – Příklad metody uzlových napětí s nelineárními prvky

Řešení:

Nejprve vypočítáme reaktance kondenzátorů a cívek a převedeme exponenciální tvar proudového zdroje Ia na algebraický:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{2\pi f.C_1} = \frac{1}{2\pi.2000.795.10^{-9}} = 100\ \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2\pi f.C_2} = \frac{1}{2\pi.2000.795.10^{-9}} = 350\ \Omega$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f.L_1 = 2\pi.2000.\ 11{,}9 = 150\ \Omega$$

$$Ia = 0{,}5.e^{j39^0} = 0{,}5.(\cos 39 + j.\sin 39) = 0{,}388 + j.0{,}314\ A$$

Sestavíme matici neznámých konduktancí a susceptancí:

$$\begin{pmatrix} G_{i1}+G_2+jY_{C_2}+jY_{L1} & -jY_{L_1} & -(G_2+jY_{C_2}) \\ -jY_{L_1} & G_1+jY_{L_1}+jY_{C_1} & -G_1 \\ -(G_2+jY_{C_2}) & -G_1 & G_1+G_2+G_{i2}+jY_{C_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a \\ 0 \\ I_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{700}+\frac{1}{j500} & \frac{1}{-j150} & -\frac{1}{(500)}-\frac{1}{j350} \\ \frac{1}{-j150} & \frac{1}{50}+\frac{1}{j250} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{(500)}-\frac{1}{j350} & -\frac{1}{50} & \frac{1}{950}+\frac{1}{j350} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}388+j0{,}314 \\ 0 \\ 0{,}32+j0{,}21 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{700}+\frac{1}{j500} & \frac{1}{-j150} & -\frac{1}{(500)}-\frac{1}{j350} \\ \frac{1}{-j150} & \frac{1}{50}+\frac{1}{j250} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{(500)}-\frac{1}{j350} & -\frac{1}{50} & \frac{1}{950}+\frac{1}{j350} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0{,}00143-j0{,}002 & j0{,}00666 & -0{,}002+j0{,}00286 \\ j0{,}00666 & 0{,}02-j0{,}004 & -0{,}02 \\ -0{,}002+j0{,}00286 & -0{,}02 & 0{,}00105-j0{,}00286 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-6{,}515.10^{-8}+j2{,}696.10^{-7}}}$$

$$D_{10} = \begin{vmatrix} 0{,}388+j0{,}314 & 0{,}00666 & -0{,}002+j0{,}00286 \\ 0 & 0{,}02-j0{,}004 & -0{,}02 \\ 0{,}32+j0{,}21 & -0{,}02 & 0{,}00105-j0{,}00286 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-1{,}520.10^{-4}-j1{,}892.10^{-4}}}$$

$$D_{20} = \begin{vmatrix} 0{,}00143-j0{,}002 & 0{,}388+j0{,}314 & -0{,}002+j0{,}00286 \\ 0{,}00666 & 0 & -0{,}02 \\ -0{,}002+j0{,}00286 & 0{,}32+j0{,}21 & 0{,}00105-j0{,}00286 \end{vmatrix} = \underline{\underline{3{,}406.10^{-5}-j7{,}927.10^{-6}}}$$

$$D_{30} = \begin{vmatrix} 0{,}00143-j0{,}002 & 0{,}00666 & 0{,}388+j0{,}314 \\ 0{,}00666 & 0{,}02-j0{,}004 & 0 \\ -0{,}002+j0{,}00286 & -0{,}02 & 0{,}32+j0{,}21 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-1{,}820.10^{-5}-j7{,}782.10^{-5}}}$$

U_{10} = $\underline{\underline{-563 + j714\ V}}$

U_{20} = $\underline{\underline{0{,}219 - j131\ V}}$

U_{30} = $\underline{\underline{268 - j132\ V}}$

Přepočet na exponenciální a goniometrický tvar komplexního čísla:

U_{10} = -563 + j714 = 909.$e^{-j51,7}$ = $-$ |909|.(cos 51,7 - j.sin 51,7)

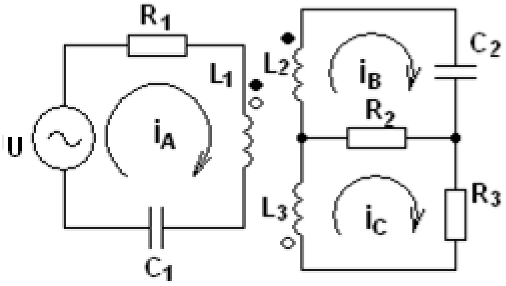
U_{20} = 0,219 – j131 = 131.$e^{-j89,9}$ = |131|.(cos 89,9 - j.sin 89,9)

U_{30} = 268 – j132 = 298.$e^{-j26,2}$ = |298|.(cos 26,2 - j.sin 26,2)

4.2 Obvod s transformátorem

<u>Příklad:</u>

Vypočtěte jednotlivé proudy větvemi pomocí smyčkových proudů.



R_1 = 100 Ω M_{12} = 1,2 mH
R_2 = 80 Ω M_{23} = 1,3 mH
R_3 = 40 Ω M_{13} = 1,5 mH
C_1 = 0,5μF U = 20 V
C_2 = 1,0μF f = 8 kHz
L_1 = 2 mH
L_2 = 1,5 mH
L_3 = 1,2 mH

Obr. 47 – Příklad smyčkových proudů s aplikací na transformátor

<u>Řešení:</u>

Sestavíme soustavu rovnic zanesenou do matice:

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1} & -j\omega M_{12} & -j\omega M_{13} \\ -j\omega M_{12} & R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2} & -(R_2 + j\omega M_{23}) \\ -j\omega M_{13} & -(R_2 + j\omega M_{23}) & R_2 + R_3 + j\omega L_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 + j60,69 & -j100,5 & -j75,36 \\ -j100,5 & 100 + j55,46 & -80 - j65,32 \\ -j75,36 & -80 - j65,32 & 120 + j60,28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustavu vyřešíme pomocí Cramerova pravidla:

$$D = \begin{bmatrix} 100 + j60,69 & -j100,5 & -j75,36 \\ -j100,5 & 100 + j55,46 & -80 - j65,32 \\ -j75,36 & -80 - j65,32 & 120 + j60,28 \end{bmatrix} = \underline{3228214 + j2266132}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 20 & -j100{,}5 & -j75{,}36 \\ 0 & 100 + j55{,}46 & -80 - j65{,}32 \\ 0 & -80 - j65{,}32 & 120 + j60{,}28 \end{bmatrix} = \underline{\underline{82471 + j20528}}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 100 + j60{,}69 & 20 & -j75{,}36 \\ -j100{,}5 & 0 & -80 - j65{,}32 \\ -j75{,}36 & 0 & 120 + j60{,}28 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-98450 + j120576}}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 100 + j60{,}69 & -j100{,}5 & 20 \\ -j100{,}5 & 100 + j55{,}46 & 0 \\ -j75{,}36 & -80 - j65{,}32 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-214882 + j281376}}$$

$$i_A = \frac{D_1}{D} = \frac{82471 + j20528}{3228214 + j2266132} = \underline{\underline{(20 - j7{,}7)\ \text{mA}}}$$

$$i_B = \frac{D_2}{D} = \frac{-98450 + j120576}{3228214 + j2266132} = \underline{\underline{(-2{,}86 + j39{,}3)\ \text{mA}}}$$

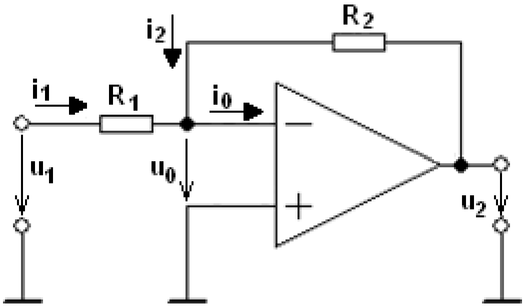
$$i_C = \frac{D_3}{D} = \frac{-214882 + j281376}{3228214 + j2266132} = \underline{\underline{(-3{,}60 + j89{,}7)\ \text{mA}}}$$

4.3 Obvod s operačním zesilovačem

Operační zesilovač, jako aktivní obvodová součástka, byl popsán v kapitole 2.6. Použití OZ je velmi rozšířené, avšak následující příklady jsou zaměřeny především na jejich zapojení v regulátorech.

1.Příklad

Odvoďte vztah pro přenos OZ v invertujícím zesilovači (v tomto případě proporcionální regulátor).



Obr. 46 – Příklad řešení OZ s v invertujícím zapojení

Postup při řešení:
Vyjádříme rovnici proudů podle 1. Krichhoffova zákona:

$$i_1 + i_2 = i_0$$

Vyjádříme jednotlivé smyčky podle 2. Kirchhoffova zákona:

$$u_1 - R_1 i_1 = u_0$$
$$u_2 - R_2 i_2 = u_0$$

Z předchozích rovnic můžeme vyjádřit proudy i_1 a i_2:

$$i_1 = \frac{u_1 - u_0}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{u_2 - u_0}{R_2}$$

Proudy i_1 a i_2 dosadíme do původní proudové rovnice:

$$\frac{u_2 - u_0}{R_2} + \frac{u_2 - u_0}{R_2} = i_0$$

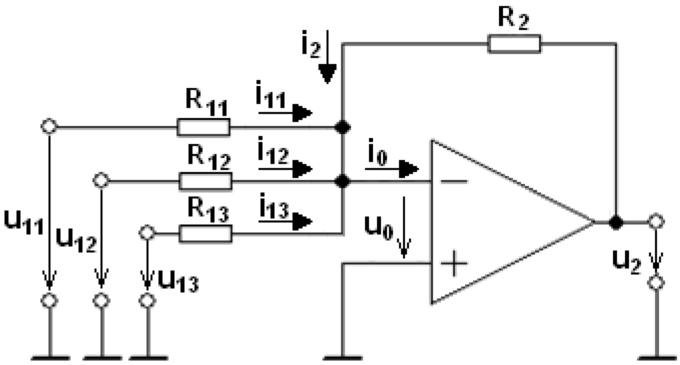
Pokud předpokládáme ideální OZ, kde vstupní odpor je nekonečně velký, bude proud i_0 nulový. To znamená, že napětí u_0 bude také rovno nule vzhledem k nulovému potenciálu tzv. „virtuální země“. Po vyřazení těchto nulových veličin získáme výslednou rovnici, která vyjadřuje zesílení proporcionálního regulátoru:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{u_2}}{\mathbf{u_1}} = -\frac{\mathbf{R_2}}{\mathbf{R_1}}$$

Z výsledného vztahu vyplývá, že přenos operačního zesilovače v invertujícím zapojení je přímo úměrný na velikosti zpětnovazebního odporu a nepřímo úměrný odporu rezistoru v přímé větvi. Záporné znaménko naznačuje otočenou fázi výstupního signálu, proto se zapojení nazývá invertující.

2.Příklad

Odvoďte vztah pro výstupní napětí u následujícího zapojení operačního zesilovače typu sumátor – invertor.



Obr. 47 – Příklad řešení OZ typu sumátor - invertor

Postup při řešení:
Vyjádříme rovnici proudů podle 1. Krichhoffova zákona:

$$i_{11} + i_{12} + i_{13} + i_2 = i_0$$

Vyjádříme jednotlivé smyčky podle 2. Kirchhoffova zákona:

$$u_{11} - R_{11}i_{11} = u_0$$
$$u_{12} - R_{12}i_{12} = u_0$$
$$u_{13} - R_{13}i_{13} = u_0$$
$$u_2 - R_2i_2 = u_0$$

Z předchozích rovnic můžeme vyjádřit proudy i_{11}, $i_{12,}$ i_{13} a i_2:

$$i_{11} = \frac{u_{11} - u_0}{R_{11}}$$

$$i_{12} = \frac{u_{12} - u_0}{R_{12}}$$

$$i_{13} = \frac{u_{13} - u_0}{R_{13}}$$

$$i_2 = \frac{u_2 - u_0}{R_2}$$

Proudy dosadíme do původní proudové rovnice:

$$\frac{u_{11} - u_0}{R_{11}} + \frac{u_{12} - u_0}{R_{12}} + \frac{u_{13} - u_0}{R_{13}} + \frac{u_2 - u_0}{R_2} = i_0$$

Opět uvažujeme ideální OZ, čímž eliminujeme nulový proud i_0 a taktéž u_0:

$$\frac{u_{11}}{R_{11}} + \frac{u_{12}}{R_{12}} + \frac{u_{13}}{R_{13}} + \frac{u_2}{R_2} = 0$$

Výsledný vztah pro výstupní napětí u2:

$$u_2 = -R_2\left(\frac{u_{11}}{R_{11}} + \frac{u_{12}}{R_{12}} + \frac{u_{13}}{R_{13}}\right)$$

Záporné znaménko opět značí invertující zapojení OZ. Ze vztahu je také zřejmé, že výstup sumátoru je skutečně dán součtem jednotlivých vstupních napětí.

4.4 Použití aplikace MATLAB

MATLAB je aplikace, která zahrnuje programovací jazyk pro nejrůznější matematické a fyzikální výpočty, ale i modelování systémů a soustav s jejich následnou analýzou. MATLAB je zkrácený název Matrix Laboratory, tudíž hlavní datovou strukturou, se kterou prostředí pracuje je matematická matice.

Pro výpočty elektrických obvodů je tedy tento program velice vhodný, protože může řešit mnohem složitější elektrické obvody, než dosavadní ruční výpočty numerických metod. Na demonstrovaných příkladech bude demonstrována rychlost a jednoduchost s jakou můžeme řešit soustavu rovnic.

1. **Příklad:**

Vypočtěte příklad z kapitoly 4.1.1 podle Obr. 45 se stejnými hodnotami prvků pomocí aplikace MATLAB:

Soustava rovnic zanesená do maticového a vektorového zápisu:

$$\begin{pmatrix} 30+j10 & -20 & -10 \\ -20 & 70+j55 & 0 \\ -10 & 0 & 10+j50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do příkazového řádku definujeme tři nové datové struktury, přičemž první je matice impedancí A, druhá je vektor pravých stran B a výsledný vektor smyčkových proudů X:

```
>> A=[30+10j -20 -10; -20 70+55j 0; -10 0 10+50j]
>> B=[50; 0; 0]
>>X=inv(A)*B
```

```
>> A=[30+10j -20 -10; -20 70+55j 0; -10 0 10+50j]

A =

  30.0000 +10.0000i -20.0000           -10.0000
 -20.0000            70.0000 +55.0000i        0
 -10.0000                  0            10.0000 +50.0000i

>> B=[50; 0; 0]

B =

    50
     0
     0

>> X=inv(A)*B

X =

   1.4549 - 0.8199i
   0.1432 - 0.3468i
  -0.1017 - 0.3113i
```

Obr. 48 – MATLAB command window

2. <u>Příklad:</u>

Vypočtěte příklad z kapitoly 4.2 podle Obr. 47 se stejnými hodnotami prvků pomocí aplikace MATLAB:

Soustava rovnic zanesená do maticového a vektorového zápisu:

$$\begin{pmatrix} 100+j60{,}69 & -j100{,}5 & -j75{,}36 \\ -j100{,}5 & 100+j55{,}46 & -80-j65{,}32 \\ -j75{,}36 & -80-j65{,}32 & 120+j60{,}28 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stejně jako v předchozím příkladu definujeme nové datové struktury A,B,X:

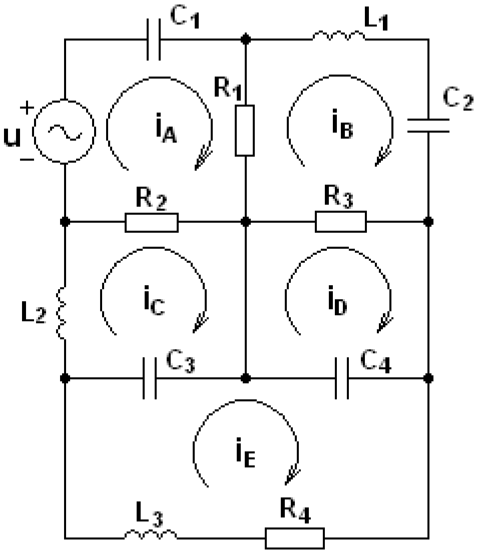
```
>> A=[30+10j -20 -10; -20 70+55j 0; -10 0 10+50j]
>> B=[20; 0; 0]
>>X=inv(A)*B
```

```
>> A=[(100+60.69j) (-100.5j) (-75.36j); (-100.5j) (100+55.46j) (-80-65.32j); (-75.36j) (-80-65.32j) (120+60.28j)

A =

  1.0e+002 *

   1.0000 + 0.6069i        0 - 1.0050i        0 - 0.7536i
        0 - 1.0050i   1.0000 + 0.5546i  -0.8000 - 0.6532i
        0 - 0.7536i  -0.8000 - 0.6532i   1.2000 + 0.6028i

>> B=[20; 0; 0]

B =

    20
     0
     0

>> X=inv(A)*B

X =

   0.0305 - 0.0093i
   0.0078 + 0.0975i
   0.0019 + 0.0874i
```

Obr. 49 – MATLAB command window

3. <u>Příklad:</u>

Sestavte soustavu rovnic pro následující obvod pomocí a vypočtěte pomocí aplikace MATLAB:



f = 1 kHz
u = 200 V

X_{L3} = 90 Ω
X_{L2} = 85 Ω
X_{L1} = 40 Ω
X_{C4} = 30 Ω
X_{C3} = 8 Ω
X_{C2} = 15 Ω
X_{C1} = 20 Ω
R_1 = 100 Ω
R_2 = 50 Ω
R_3 = 80 Ω
R_4 = 20 Ω

Obr. 50 – Příklad metody smyčkových proudů řešení pomocí MATLAB

Rovnice sestavíme podle již probíraných pravidel (kap. 3.4):

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2+jX_{C_1} & -R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_1+jX_{L_1}+jX_{C_2}+R_3 & 0 & -R_3 & 0 \\ -R_2 & 0 & R_2+jX_{C_3}+jX_{L_2} & 0 & -jX_{C_3} \\ 0 & -R_3 & 0 & R_3+jX_{C_4} & -jX_{C_4} \\ 0 & 0 & -jX_{C_3} & -jX_{C_4} & R_4+jX_{L_3}+jX_{C_3}+jX_{C_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_D \\ i_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 150+j20 & -100 & -50 & 0 & 0 \\ -100 & 180+j55 & 0 & -80 & 0 \\ -50 & 0 & 50+j93 & 0 & -j8 \\ 0 & -80 & 0 & 80+j30 & -j30 \\ 0 & 0 & -j8 & -j30 & 20+j128 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_D \\ i_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příkazy v MATLAB command window:

```
>> A=[(150+20j) (-100) (-50) (0) (0) (0); (-100) (180+55j) (0) (-80) (0); (-50) (0)
      (50+93j) (0) (-8j); (0) (-80) (0) (80+30j) (-30j); (0) (0) (-8j) (-30j) (20+128j)]
>> B=[20; 0; 0; 0; 0]
>>X=inv(A)*B
```

```
>> A=[(150+20j) (-100) (-50) (0) (0); (-100) (180+55j) (0) (-80) (0);
(-50) (0) (50+93j) (0) (-8j); (0) (-80) (0) (80+30j) (-30j); (0) (0) (-8j) (-30j) (20+128j)]

A =

  1.0e+002 *

   1.5000 + 0.2000i  -1.0000            -0.5000                  0                  0
  -1.0000             1.8000 + 0.5500i        0            -0.8000                  0
  -0.5000                  0             0.5000 + 0.9300i        0                  0 - 0.0800i
        0            -0.8000                  0             0.8000 + 0.3000i        0 - 0.3000i
        0                  0                  0 - 0.0800i        0 - 0.3000i   0.2000 + 1.2800i

>> B=[20; 0; 0; 0; 0]

B =

    20
     0
     0
     0
     0

>> X=inv(A)*B

X =

   0.1163 - 0.1319i
   0.0148 - 0.1344i
  -0.0277 - 0.0805i
  -0.0198 - 0.1273i
  -0.0009 - 0.0350i
```

Obr. 51 – MATLAB command window

4. Závěr

Cílem bakalářské práce byla ucelená studie metod řešení elektrických obvodů pomocí základních fyzikálních zákonů a také speciálních metod, které se běžně používají k základní analýze elektrických obvodů a výpočtu obvodových veličin. Nedílnou a názornou součástí práce bylo použití těchto metod na příkladech elektrických obvodů. Příklady byly voleny především pro názornou demonstraci jednotlivých metod.

Druhá kapitola se zaměřuje především na základní popis elektrických součástek, jejich schematické značky, využití a především chování při průchodu elektrického proudu. Pro názornost byly připojeny grafické průběhy, převážně voltampérové charakteristiky, ze kterých je nejlépe pochopitelné chování dané součástky.

Třetí kapitola shrnuje jednak základní fyzikální zákony používané pro popis elektrických obvodů (Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony) a také speciální metody s exemplárním použitím na vhodných příkladech. V této kapitole byly také demonstrovány různé matematické metody, které mohou být při obvodové analýze použity.

Čtvrtá kapitola se zaměřuje na aplikaci předchozích metod na obvodech, ve kterých se vyskytuje jeden nebo více nelineárních prvků. Dále pak zahrnuje různé způsoby zápisu střídavých obvodových veličin v komplexním tvaru. Součástí kapitoly je také velmi výhodné řešení příkladů pomocí programu MATLAB, jehož prostředí umožňuje velmi rychlé a přesné výpočty soustav rovnic zanesených do maticového tvaru.

Bakalářská práce je tedy souhrn metod používáných pro výpočet obvodových veličin. Demonstrované příklady byly voleny vzhledem k vhodnosti použití jednotlivých metod a lze obecně tvrdit, že:

- Metoda smyčkových proudů je vhodná pro všechny typy elektrických obvodů s libovolným počtem zdrojů elektrické energie, jelikož je poměrně jednoduché sestavit matici koeficientů i vektor pravých stran
- Metoda uzlových napětí je vhodná především pro obvody, kde se mnoho větví sbíhá v jediném uzlu. Metoda taktéž umožňuje řešení obvodů s více zdroji elektrické energie
- Metoda lineární superpozice je proti výše zmiňovaným dvěma metodám zdlouhavější, jelikož musíme řešit takový počet dílčích obvodů, kolik je v původním obvodu zdrojů elektrické energie. Pro výpočet dílčích obvodů je také vhodné výše zmiňované metody použít
- Věty o náhradním zdroji jsou použitelné pro různé typy elektrických obvodů, přičemž nespornou výhodou je řešení obvodu, k jehož výstupním svorkám připojujeme různé velikosti zátěže.

Pro jednotlivé numerické výpočty lze usoudit, že pokud řešíme Cramerovým pravidlem obvod, který je popsán maticí větší než 3x3 je řešení bez pomoci výpočetní techniky velmi pracné. Gaussova eliminační metoda je vhodná především pro výpočet bez pomoci výpočetní techniky, jelikož výpočetní algoritmus by nebyl triviální. Jak ukazují příklady v kapitole 4.4 pro výpočet soustavy rovnic pomocí inverzní matice, je použití aplikace MATLAB velmi vhodné.

Sezam použité literatury

[1] Noskievič, P.: *Modelování a identifikace systémů*. 1. vyd. Ostrava : MONTANEX, a. s., 1999. 276 s. ISBN 80-7225-030-2.

[2] BIOLEK, D.: *Výuka obecných metod analýzy lineárních obvodů*. STO-5, VA Brno 1994

[3] MAŤÁTKO, Jan.: *Elektronika*. 4 vyd. Praha: IDEA SERVIS, konsorcium,1997. 271 s. ISBN 80-85970-20-1.

[4] Aujezdsky, Radomir. *Alfaelektronky* [online]. 2005, 11.dubna 2010 [cit. 12.září 2009] Dostupné z: <http://www.alfaelektronky.wz.cz/teorie/dioda.html>

[5] Schuhmeier, P. *Aristoteles* [online]. 2006, 12.ledna 2008 [cit. 8.listopadu 2009] Dostupné z: <http://www.aristoteles.cz/matematika/linearni_algebra/soustavy/cramerovo-pravidlo.php>

[6] Přispěvatelé Wikipedie, *Gaussova eliminační metoda* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2010, Datum poslední revize 20. 04. 2010, [citováno 27. 04. 2010] Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaussova_elimina%C4%8Dn%C3%AD_metoda&oldid=5247840>

[7] Přispěvatelé Wikipedie, *Inverzní matice* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2009, Datum poslední revize 28. 12. 2009, [citováno 27. 04. 2010] Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Inverzn%C3%AD_matice&oldid=4753435>

[8] Přispěvatelé Wikipedie, *Théveninova věta* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2010, Datum poslední revize 11. 03. 2010, [citováno 27. 04. 2010] Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9veninova_v%C4%9Bta&oldid=5068373>

[9] Přispěvatelé Wikipedie, *Operační zesilovač* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2010, Datum poslední revize 26. 04. 2010, [citováno 27. 04. 2010] Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Opera%C4%8Dn%C3%AD_zesilova%C4%8D&oldid=5270526>

Seznam obrázků

[10] Dienstbier, Jan. *Editorium* [online]. 2008, [cit. 9.září 2009].
Dostupné z: <http://www.techmania.cz/edutorium /art_exponaty.php>]

[11] Josef, Sedlák. *Řešení elektronických obvodů* [online]. 2003, [cit. 9.září 2009]
Dostupné z: <http://www.zesilovace.cz/rservice.php?akce=tisk&cisloclanku=2003052302>

[12] Giganov Denis. *E-Celica project* [online]. 1999, [cit 10.září 2009]
Dostupné z: <http://e-celica.com/electric_wheel/c_EV.html>

[13] Tme ectronic components [online].1999, 22.srpna 2008 [cit. 10.září 2009]
Dostupné z: <http://www.tme.eu/cz/katalog/artykuly.phtml>

[14] Wikipedie [online]. 2005, [cit. 10. září 2009]
Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kondenz%C3%A1tor>

[15] Škorňák Roman. *Profi elektronik* [online]. 2007, [cit. 10. září 2009]
Dostupné z: <http://www.profi-elektronika.cz/pasivni-soucastky>

[16] Rittershofer, Andreas. *Die mangetische Wirkung* [online]. 2002, 4.listopadu 2005 [cit. 10. září 2009].
Dostupné z: <http://www.lmtm.de/PhysiXTM/elehre/texte/magnetwirkung.html>

[17] GM Electronic [online]. 2008, [cit. 10. září 2009]
Dostupné z: <http://www.gme.cz/cz/dpu068a3-p611-150.html>

[18] TTC Telsys [online]. 2004, [cit. 11. září 2009]
Dostupné z:
<http://www.ttc-telsys.cz/view.php?nazevclanku=transformatory&cisloclanku=2009060004>

[19] Wikipedie [online]. 2005, 7.dubna 2010 [cit. 10. září 2009]
Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Dioda>

[20] Aujezdsky, Radomir. *Alfaelektronky* [online]. 2005, 11.dubna 2010 [cit. 12.září 2009]
Dostupné z: <http://www.alfaelektronky.wz.cz/teorie/dioda.html>