



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

EXPERIMENTÁLNÍ URČENÍ TLUMENÍ NOSNÍKU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondřej Fučík

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Ondřej Rubeš

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Ondřej Fučík**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojírenského inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Ondřej Rubeš**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Experimentální určení tlumení nosníku

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je přinést přehled možností určení vlastního tlumení různých materiálů. Dále potom provedení vlastního experimentu s nosníkem z různých materiálů a určení jejich vlastního tlumení.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše způsobů určení vlastního tlumení kovových materiálů.
2. Experimentální měření odezvy nosníků z různých materiálů.
3. Zpracování dat z experimentálního měření a určení vlastního tlumení daných materiálů.

Seznam doporučené literatury:

KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.

BREPTA, Rudolf, František TUREK a Ladislav PŮST. Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, c1994. Technický průvodce, 71. ISBN 80-901684-8-5.

ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. Kmitání mechanických soustav. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-337-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce „Experimentální určení tlumení nosníku“ se zabývá tématem vlastního tlumení kovových materiálů. V teoretické části jsou materiály rozděleny do tří skupin podle jejich tlumících vlastností. Dále jsou stručně popsány metody pro určení tlumících vlastností a rovněž jsou zde nastíněny způsoby modelování viskoelastického chování materiálů. V další části je proveden experiment s různými konfiguracemi nosníků odlišných délek a materiálů a jsou vytvořeny matematické modely jednotlivých konfigurací. V poslední části jsou výsledky experimentu zpracovány. Pomocí matematických modelů jsou určeny tlumící vlastnosti nosníků.

Abstract

This bachelor thesis deals with structural damping of metallic materials. The first part is research of damping properties, ways how to discover damping properties and short description of how to simulate viscoelasticity of materials, using mathematical models. The second part is focused on an experiment with beams of different lengths and materials. Mathematical models making is also part of solution. The third, last part is focused on results processing. Using mathematical models, damping ratios of beams are determined.

Klíčová slova

Viskoelasticita, viskoelastické chování, tlumené kmitání, materiálové tlumení, strukturální tlumení, analytické modelování

Keywords

Viscoelasticity, viscoelastic behaviour, damping ratio, material damping, structural damping, analytic modelling

Bibliografická citace

FUČÍK, Ondřej. *Experimentální určení tlumení nosníku* [online]. Brno, 2019. [cit. 2019-05-24]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117062>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ondřej Rubeš.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Experimentální určení tlumení nosníku“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne 24. 5. 2019

.....

Ondřej Fučík

Poděkování

V úvodu své bakalářské práce bych chtěl poděkovat mému vedoucímu práce Ing. Ondřeji Rubešovi za odborné vedení, cenné rady, trpělivost, ochotu a vstřícnost při konzultacích.

Obsah

1	Úvod.....	15
2	Cíle práce	16
3	Lineární mechanické kmitání s jedním stupněm volnosti.....	17
3.1	Pohybová rovnice	17
4	Materiálové tlumení	19
4.1	Elastické materiály	19
4.2	Viskózní materiály.....	19
4.3	Viskoelastické materiály.....	20
5	Metody pro stanovení parametrů viskoelastického tlumení	21
5.1	Metoda určení plochy hysterezní smyčky	21
5.2	Metoda nucených kmitů	22
5.3	Metoda modální šířky pásma.....	23
5.4	Metoda volných kmitů.....	24
6	Modelování viskoelastického chování materiálů.....	25
6.1	Prvky v modelování viskoelastického chování materiálů	25
6.1.1	Pružný prvek	25
6.1.2	Viskózní prvek.....	25
6.2	Dvouprvkové modely	25
6.3	Tříprvkové modely	27
6.4	Čtyřprvkové modely	28
7	Experimentální měření odezvy nosníků.....	29
7.1	Obecný popis	29
7.2	Vztahy potřebné k vytvoření matematického modelu.....	29
7.3	Měření konfigurace nosníků	30
7.3.1	Nosník číslo 1	32
7.3.2	Nosník číslo 2	34
7.3.3	Nosník číslo 3	35
7.3.4	Nosník číslo 4	36
7.3.5	Nosník číslo 5	37
7.3.6	Nosník číslo 6	38
8	Závěr	40
	Seznam použitých zdrojů.....	41
	Seznam použitých symbolů, veličin a zkratk.....	42

Seznam obrázků.....	43
Seznam tabulek.....	44
Seznam příloh	45

1 Úvod

Studium a analýza mechanického kmitání patří v současnosti mezi nejdůležitější oblasti dynamiky. Je to zejména tím, že kmitání a vibrace se vyskytují všude okolo nás, aniž bychom si to uvědomovali. Vibrace mechanické soustavy jsou vždy spojené s nějakým buzením. Mohou to být vibrace podlahy způsobené chůzí, u strojů způsobené vnějším impulsem nebo nevyváhou rotujících součástí, u stavebních konstrukcí způsobené větrem či jinými vnějšími vlivy a další.

Vibrace jsou většinou nežádoucí a je snaha je tlumit, případně úplně eliminovat. Jednou z možností je přidat do mechanické soustavy tlumič nebo soustavu tlumičů, které kmitání utlumí tím způsobem, že energii mechanických kmitů transformují v energii tepelnou. Další možností je volba vhodných materiálů, které mají vysokou hodnotu vnitřního tlumení (materiálového tlumení). Tlumícími vlastnostmi kovových materiálů se zabývá tato bakalářská práce.

2 Cíle práce

První část této bakalářské práce je věnována popisu vlastního tlumení kovových materiálů (materiálového tlumení). Materiály jsou podle svých viskoelastických vlastností rozděleny do tří základních skupin. Dále jsou popsány metody pro stanovení parametrů viskoelastického tlumení. Rovněž jsou nastíněny možnosti modelování viskoelastického chování materiálů pomocí základních prvků – pružného (pružina) a viskózního (tlumič).

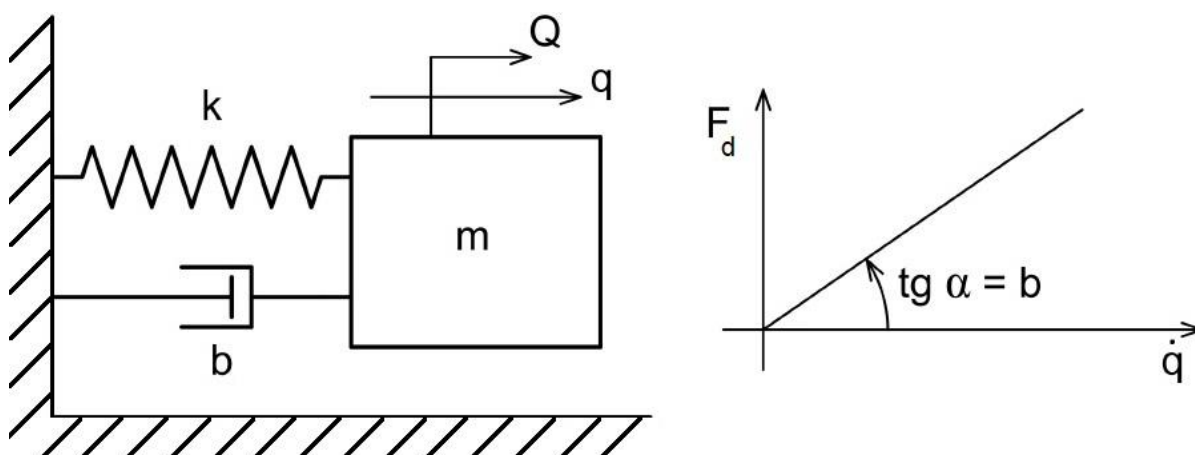
Hlavním cílem této bakalářské práce je provést experiment s nosníky různých délek a materiálů a na základě experimentu určit jejich vlastní tlumení. Součástí řešení jsou i matematické modely daných konfigurací nosníků vytvořené v softwaru MatLAB. Na základě získaných a zpracovaných dat z experimentu je provedena analýza a zhodnocení výsledků. Pomocí matematických modelů jsou určeny hodnoty poměrných útlumů všech konfigurací nosníků a v příslušných časových intervalech.

3 Lineární mechanické kmitání s jedním stupněm volnosti

Mechanické kmitání lze dělit z mnoha hledisek. [1] Podle charakteru řešené soustavy a požadovaných výsledků dělíme mechanické modely na modely se soustředěnými (diskrétními) parametry a modely se spojitě rozloženými parametry. Podle charakteru jeho vzniku je dělíme na volné, buzené nebo samobuzené, podle vlastností disipované energie na tlumené a netlumené, podle typu matematického modelu na lineární nebo nelineární. Tato dělení je možné dále zpřesňovat.

Speciálním případem diskrétního modelu je model lineárního kmitání s jedním stupněm volnosti. Tento model má svá omezení, zejména to, že se jedná o malé kmity okolo rovnovážné polohy. Je však ve své podstatě dobře použitelný pro vysvětlení takových jevů, které vznikají v mnoha mechanických soustavách.

Příčinou tlumení v mechanických soustavách jsou složité nevratné procesy, které způsobují rozptyl energie, pokles výchylky a fázový posun. Tlumení lze rozdělit na tlumení vnější (aerodynamický a hydrodynamický odpor, odpor tlumičů, úmyslně vkládaných do mechanických soustav), tlumení ve vazbách (jak pohyblivých, tak nepohyblivých – např. lisované, šroubované, nýtované, svařované spoje) a tlumení vnitřní, způsobené vnitřními odpory materiálu. Toto tlumení se nazývá materiálové tlumení. V matematickém modelu lze proces tlumení reprezentovat tlumičem s koeficientem tlumení b (viz Obr. 1). Do pohybové rovnice mechanické soustavy se vkládá ekvivalentní tlumící síla F_d , působící proti směru pohybu.



Obr. 1: Lineární kmitání s jedním stupněm volnosti [1]

3.1 Pohybová rovnice

Odvození pohybových rovnic je možné například pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu. Rovnice (3.3) a (3.9) jsou převzaty z [2], ostatní rovnice v podkapitole 3.1 z [1].

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (3.1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k q^2 \quad (3.2)$$

$$R = \frac{1}{2} b \dot{q}^2 \quad (3.3)$$

$$P = Q \dot{q} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial q} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) = m \ddot{q} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = k q \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = b \dot{q} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}} = Q \quad (3.10)$$

Pohybová rovnice vynuceného tlumeného kmitání v tomto konkrétním případě je

$$m \ddot{q} + b \dot{q} + k q = Q. \quad (3.11)$$

Obecný tvar pohybové rovnice vynuceného tlumeného kmitání je potom

$$m' \ddot{q} + b' \dot{q} + k' q = Q', \quad (3.12)$$

kde q , $\dot{q}$, $\ddot{q}$ je zobecněná souřadnice a její první, resp. druhá derivace, m' , b' , k' , Q' jsou konstanty. Jedná se o diferenciální rovnici druhého řádu s pravou stranou. Řešení této rovnice se předpokládá ve tvaru

$$q = q_h + q_p, \quad (3.13)$$

kde q_h je homogenní řešení a q_p je partikulární řešení rovnice.

Jestliže v dané mechanické soustavě je $Q = 0$, pak se jedná o volné tlumené kmitání a řešení pohybové rovnice volného tlumeného kmitání

$$m' \ddot{q} + b' \dot{q} + k' q = 0 \quad (3.14)$$

má pouze homogenní složku.

4 Materiálové tlumení

Při cyklickém zatěžování těles z různých materiálů dochází k přetvoření, které má vůči působícímu napětí určitý fázový posun φ . [3] To je způsobeno vlastním tlumením materiálu, při němž je část vynaložené mechanické energie přeměněna (disipována) na energii tepelnou. Tento děj je nevratný.

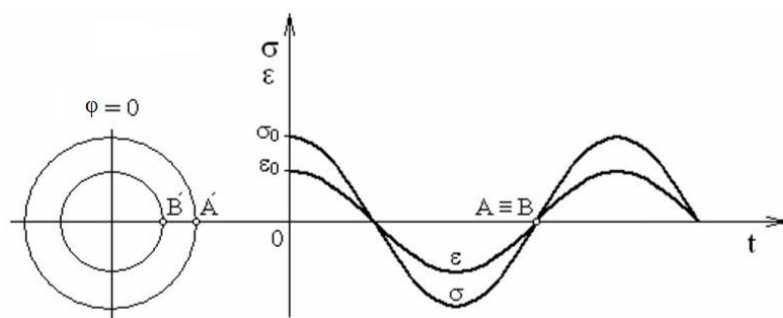
Z pohledu disipace energie při dynamickém namáhání lze materiály rozdělit na elastické, viskózní a viskoelastické.

4.1 Elastické materiály

Pro ideálně elastické materiály platí Hookův zákon

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (4.1)$$

kde σ je mechanické napětí, E je Youngův modul pružnosti v tahu daného materiálu a ε je přetvoření. [4] Elastické materiály jsou takové materiály, u kterých je veškerá energie akumulovaná při zatížení materiálového vzorku, po odlehčení vzorku zpětně využita. [3] U ideálně elastických materiálu tedy nedochází k disipaci energie v teplo. Napětí a přetvoření jsou ve fázi, tedy fázový posun je $\varphi = 0$ (viz Obr. 2).



Obr. 2: Časová závislost mechanického napětí a přetvoření na čase u ideálně elastických materiálů [3]

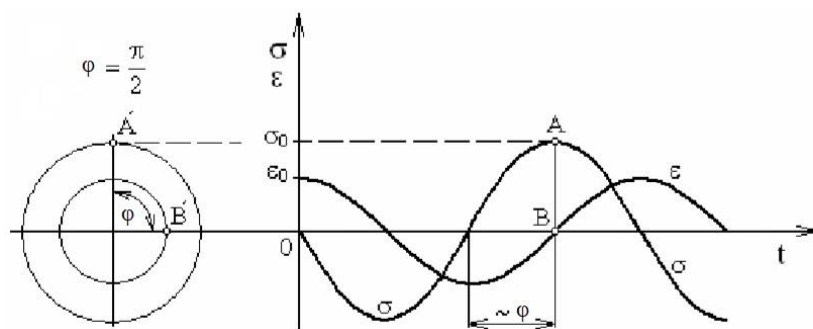
Průběhy napětí a přetvoření u ideálně elastických materiálů lze rovněž popsat následujícími vztahy: [5]

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

4.2 Viskózní materiály

Ideálně viskózní materiály se chovají při harmonickém namáhání zcela opačně než materiály elastické, tedy pro ně neplatí Hookův zákon. [3] Veškerá energie akumulovaná při zatěžování materiálového vzorku je disipována v teplo, tedy po odlehčení vzorku nedochází k žádnému zpětnému využití vložené mechanické energie. Napětí a přetvoření u ideálně viskózních materiálů nejsou ve fázi a fázový posun mezi nimi je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (viz Obr. 3).



Obr. 3: Časová závislost mechanického napětí a přetvoření na čase u ideálně viskózních materiálů [3]

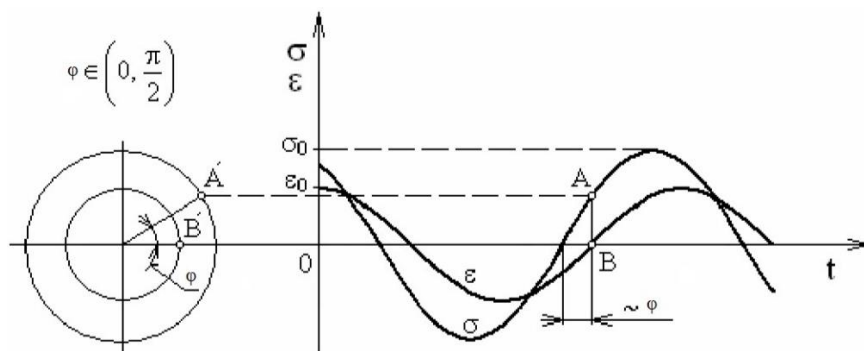
Průběhy napětí a přetvoření lze rovněž popsat následujícími vztahy: [5]

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4.4)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (4.5)$$

4.3 Viskoelastické materiály

Většina reálných materiálů při namáhání vykazuje jak elastické, tak viskózní chování. [3] Pro viskoelastické materiály neplatí Hookův zákon. Jde zejména o přírodní a technické materiály, jako jsou např. polymery, asfalty a mnoho typů biologických materiálů. Z Obr. 4 je zřejmé, že napětí a přetvoření se mění harmonicky se stejnou frekvencí, přičemž napětí předbíhá přetvoření. Fázový posun mezi napětím a přetvořením leží v intervalu $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$. Část vložené mechanické energie při harmonickém zatěžování viskoelastických materiálů se zpětně využije po odlehčení, zbytek energie se disipuje v tepelnou energii.



Obr. 4: Časová závislost mechanického napětí a přetvoření na čase u viskoelastických materiálů [3]

Průběhy napětí a přetvoření lze rovněž popsat následujícími vztahy: [5]

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.6)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (4.7)$$

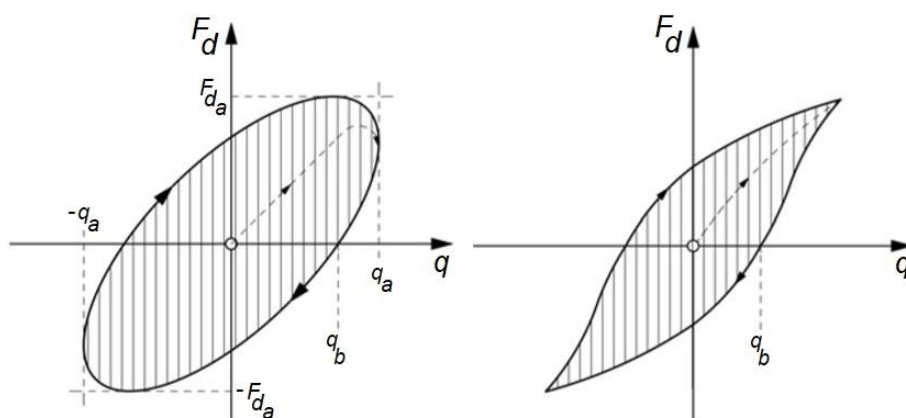
5 Metody pro stanovení parametrů viskoelastického tlumení

Materiálové tlumení závisí na mnoha faktorech, z nichž nejvýznamnější je amplituda zatěžování, dále pak typ materiálu, vnitřní síly, počet cyklů, geometrické rozměry, kvalita povrchu a teplota. [3] Pro stanovení parametrů tlumení mechanických soustav existují různé metody, z nichž každá je vhodná pro některé frekvenční rozsahy, typy materiálů, apod..

5.1 Metoda určení plochy hysterezní smyčky

Rovnice v podkapitole 5.1 byly odvozeny s pomocí zdroje [6].

Jednou z možností, jak kvantifikovat tlumení struktury, je určit velikost přeměněné (disipované) mechanické energie E_d . [3] Disipovaná energie je úměrná velikosti plochy hysterezní smyčky. Ta vznikne zakreslením závislosti tlumicí síly na přetvoření (zobecněná souřadnice q) za danou periodu. Tvar hysterezní smyčky je zobrazen na Obr. 5a) pro lineární tlumení, na Obr. 5b) pro nelineární tlumení.



Obr. 5: Hysterezní smyčka a) lineárního tlumení; b) nelineárního tlumení [7]

Energii disipovanou (absorbovanou tlumičem) lze vyjádřit vztahem

$$E_d = \oint F_d \cdot dq, \quad (5.1)$$

kde F_d je tlumicí síla. Nejjednodušší model tlumení (s jedním tlumičem) lze popsat vztahem (3.9). Nechť je

$$q = q_{max} \cdot \sin(\omega t - \varphi), \quad (5.2)$$

kde q_{max} je amplituda výchylky.

Derivací rovnice výchylky (5.2) podle času dostaneme rovnici rychlosti

$$\dot{q} = \omega q_{max} \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (5.3)$$

Jestliže

$$dq = \dot{q} dt, \quad (5.4)$$

pak

$$E_d = \oint b_{eq} \dot{q} dq = \oint b_{eq} \dot{q}^2 dt. \quad (5.5)$$

Substitucí rovnice (5.3) do rovnice (5.5) dostaneme

$$E_d = b_{eq} \omega^2 q_{max}^2 \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \pi b_{eq} \omega q_{max}^2. \quad (5.6)$$

Pak lze odvodit vztah pro ekvivalentní koeficient tlumení

$$b_{eq} = \frac{E_d}{\pi \omega q_{max}^2}. \quad (5.7)$$

5.2 Metoda nucených kmitů

Stěžejní veličinou této metody je činitel vnitřního tlumení η_T . [3] Tuto veličinu lze rovněž nazvat mechanický ztrátový úhel, neboť je definována tangentou fázového posunu φ mezi napětím a přetvořením. Činitel vnitřního tlumení η_T je dán vztahem

$$\eta_T = \frac{E''}{E'} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (5.8)$$

Následující vztahy jsou převzaty ze zdroje [5].

E' je reálná složka komplexního modulu pružnosti v tahu, která charakterizuje pevnostní vlastnosti materiálu. Hodnotu E' lze získat pomocí vztahu

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \varphi. \quad (5.9)$$

E'' je imaginární složka komplexního modulu pružnosti v tahu (ztrátový modul), která charakterizuje tlumící vlastnosti materiálu. Hodnotu E'' lze určit pomocí vztahu

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \varphi. \quad (5.10)$$

Komplexní modul pružnosti je dán vztahem

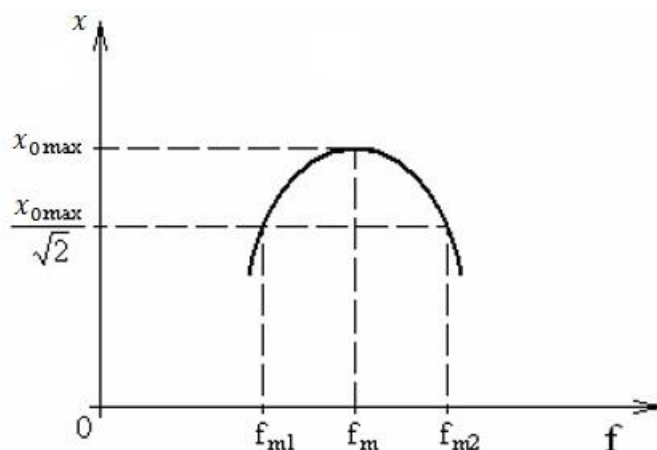
$$E^* = E' + i \cdot E''. \quad (5.11)$$

S ohledem na existenci vnitřního tlumení materiálů lze Hookův zákon zobecnit na tvar

$$\sigma = E' \cdot (1 + i \cdot \eta_T) \cdot \varepsilon. \quad (5.12)$$

5.3 Metoda modální šířky pásma

Při kvantifikaci tlumících vlastností materiálu metodou modální šířky pásma se vychází z amplitudo-frekvenční charakteristiky výchylky. [3] K nejvyšším hodnotám amplitudy výchylky dochází při rezonančních frekvencích, které se obecně nazývají modální frekvence a označují se f_m , kde m je číslo módu (viz Obr. 6).



Obr. 6: Amplitudo-frekvenční charakteristika výchylky [3]

Tlumící vlastnosti pro všechny modální frekvence se určí ze známé výchylky x_{0max} při modální frekvenci f_m . Výchylky krajních frekvencí f_{m1} a f_{m2} frekvenčního pásma Δf se stanoví pomocí vztahu

$$x_0 = \frac{x_{0max}}{\sqrt{2}}. \quad (5.13)$$

Činitel vnitřního tlumení je potom

$$\eta_T = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{f_{m2} - f_{m1}}{f_m}. \quad (5.14)$$

5.4 Metoda volných kmitů

Velikost amplitudy výchylky x při volném harmonickém tlumeném kmitání postupně klesá až k nule, matematicky vyjádřeno $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Pro určení hodnoty tlumení se používá logaritmický dekrement útlumu ν , který závisí na součiniteli tlumení b_r . Vztah pro výpočet logaritmického dekrementu je

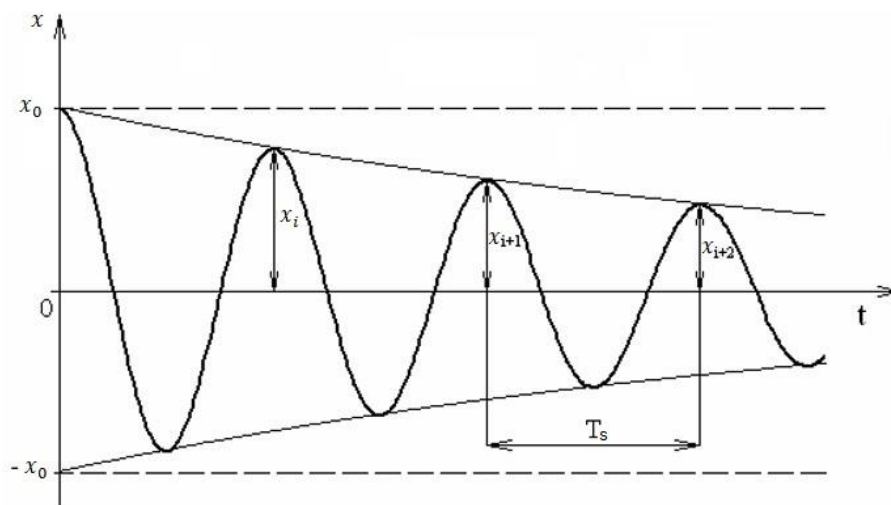
$$\nu = \ln \frac{x(t)}{x(t + nT_s)} = \frac{2\pi \cdot b_r}{\sqrt{1 - b_r^2}} \quad (5.15)$$

kde $x(t)$ a $x(t + nT_s)$ jsou amplitudy výchylek v časech t a $(t + nT_s)$ a n je počet period kmitání T_s . [1] Logaritmická funkce (obálka) prochází amplitudami výchylek v daných časech (viz Obr. 7).

Ze vztahu (5.15) plyne, že pro $b_r \ll 1$

$$\nu = 2\pi \cdot b_r. \quad (5.16)$$

Další možností kvantifikace tlumení pomocí metody volných kmitů je určení součinitele dozínivání δ . Tlumení kovových nosníků v této práci je kvantifikováno pomocí metody volných kmitů a preferovanou veličinou je součinitel dozínivání δ . Součinitel dozínivání lze vypočítat pomocí vztahu (7.9).



Obr. 7: Časový průběh volných tlumených kmitů [3]

6 Modelování viskoelastického chování materiálů

Modely viskoelastického chování materiálů se skládají ze dvou základních prvků, a to z pružného a viskózního. [3] Podle počtu a umístění prvků jsou definovány jednotlivé modely.

6.1 Prvky v modelování viskoelastického chování materiálů

6.1.1 Pružný prvek

Závislost napětí a přetvoření u pružného prvku popisuje Hookův zákon – rovnice (4.1). Pružné prvky mají při zatěžování okamžitou pružnou deformaci. [3] Jedná se však o ideální případ, protože přetvoření při zatěžování skutečného prvku má vůči napětí určitý fázový posun. Pružný prvek se v modelech označuje pružinou o tuhosti k nebo pružinou s modulem pružnosti E .

6.1.2 Viskózní prvek

Závislost napětí a přetvoření u viskózního prvku popisuje Newtonův zákon viskozity

$$\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (6.1)$$

kde η je koeficient Newtonovské viskozity. [3] Nejedná se však o koeficient viskozity pro tekutiny, protože u tekutin je viskozita spojena s tečným napětím. V tomto případě se jedná o napětí normálové. [8] Člen $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ve vztahu (6.1) vyjadřuje rychlost deformace.

Realizace viskózního prvku je mnohem obtížnější než realizace pružného prvku. [3] Viskózní prvek se v modelech označuje tlumičem a je kvantifikován koeficientem tlumení b nebo koeficientem Newtonovské viskozity η .

6.2 Dvouprvkové modely

Dvouprvkové modely se skládají z pružného a viskózního prvku, které v modelu mohou být řazeny sériově (Maxwellův model) nebo paralelně (Kelvinův model). [3] Důležitým předpokladem dvouprvkového modelu je, že tyče spojující tyto dva prvky jsou dokonale tuhé (nemohou se deformovat).

Při sériovém řazení prvků se deformace obou prvků sčítají. Platí tedy

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (6.2)$$

a napětí na každém prvku je rovno celkovému napětí na modelu. Platí tedy

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2. \quad (6.3)$$

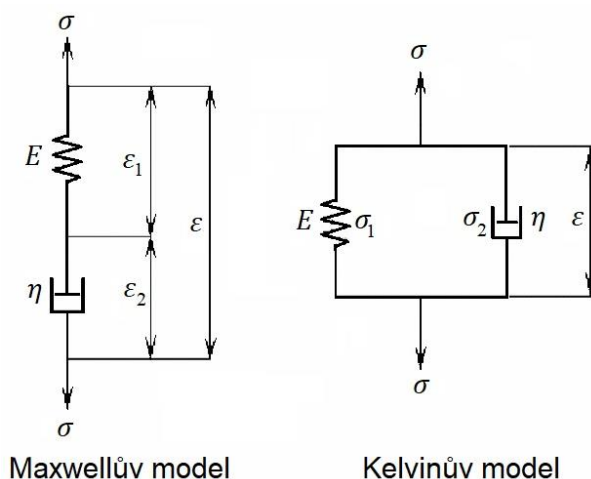
Při paralelním řazení prvků jsou deformace každého prvku stejné.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (6.4)$$

Celkové napětí při paralelním řazení je dáno součtem napětí na jednotlivých prvcích. Platí tedy

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (6.5)$$

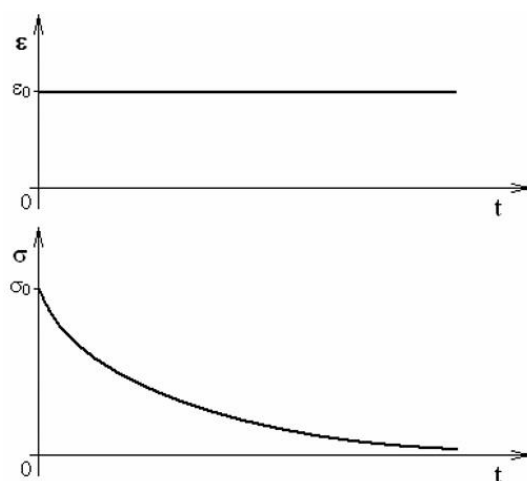
Na Obr. 8 jsou znázorněny oba typy dvouprvkových modelů.



Obr. 8: Sériové a paralelní řazení pružného a viskózního prvku v dvouprvkovém modelu [3]

Tyto modely lze aplikovat pro různé případy, např. pro konstantní deformaci, konstantní napětí, konstantní rychlost deformace a periodickou deformaci. Uvažuje-li se např. Maxwellův model pro konstantní deformaci ($\varepsilon = \varepsilon_0$), pak pro časový průběh napětí (viz Obr. 9) lze odvodit vztah

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} = E \cdot \varepsilon_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t}. \quad (6.6)$$



Obr. 9: Časový průběh napětí při konstantní deformaci u Maxwellova modelu [3]

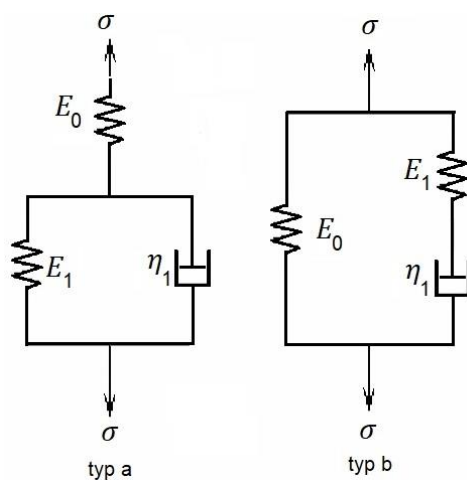
6.3 Tříprvkové modely

Tříprvkové modely lze dělit do dvou základních tříd s následujícími prvky: [3]

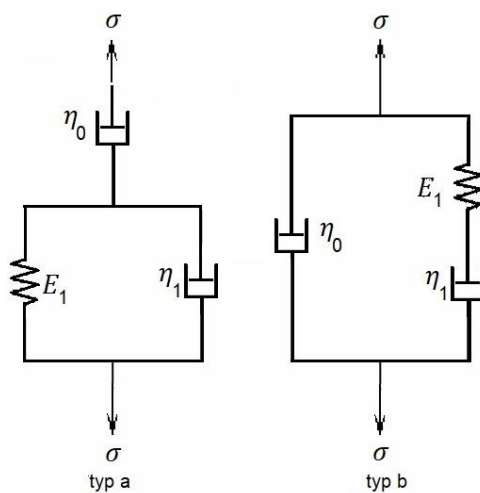
- třída C: dvě pružiny a jeden tlumič,
- třída D: jedna pružina a dva tlumiče

Tyto třídy se navzájem liší podle typu uspořádání prvků, která jsou zřejmá z Obr. 10 a Obr. 11.

Na Obr. 10 jsou uvedena schématická zobrazení modelů třídy C typu „a“ a typu „b“. U modelu typu „a“ se jedná o sériové řazení Kelvinova modelu a pružného prvku. Model typu „b“ vznikne paralelním řazením pružného prvku a Maxwellova modelu.



Obr. 10: Tříprvkové modely třídy C [3]



Obr. 11: Tříprvkové modely třídy D [3]

Na Obr. 11 jsou zobrazeny modely třídy D typu „a“ a typu „b“. Model typu „a“ třídy D je dán sériovým řazením Kelvinova modelu a tlumiče. Model typu „b“ třídy D vznikne paralelním řazením Maxwellova modelu a tlumiče.

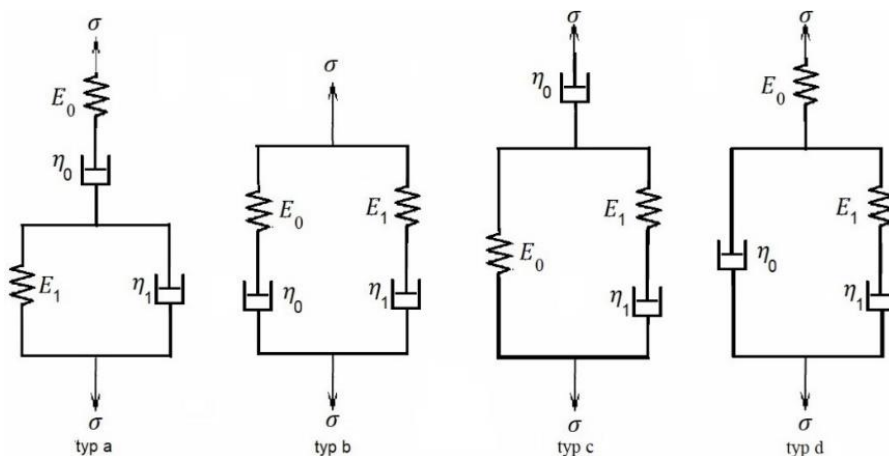
6.4 Čtyřprvkové modely

Existují tři základní konfigurace čtyřprvkových modelů, které se mohou skládat: [3]

1. ze dvou pružin a dvou tlumičů,
2. ze tří pružin a jednoho tlumiče,
3. z jedné pružiny a tří tlumičů.

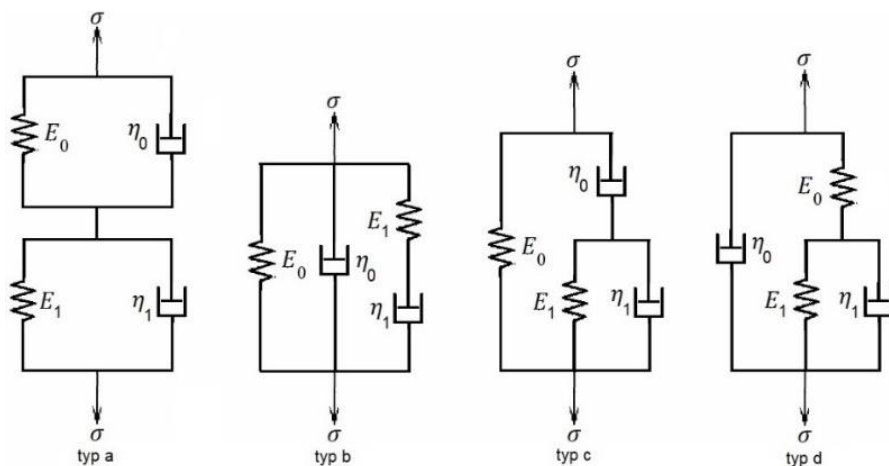
Různá spojení prvků druhé a třetí konfigurace jsou ekvivalentní předchozím dvou a tříprvkovým modelům. Modely první konfigurace se dále dělí na čtyřprvkové modely třídy A a třídy B.

Čtyřprvkové modely třídy A lze rozdělit do čtyř typů (viz Obr. 12). Model typu „a“ je dán sériovým řazením Maxwellova a Kelvinova modelu. Model typu „b“ je dán dvěma paralelně řazenými modely podle Maxwella. Modely typů „c“ a „d“ jsou dány sérioparalelním řazením různých prvků.



Obr. 12: Čtyřprvkové modely třídy A [3]

Čtyřprvkové modely třídy B lze rovněž rozdělit do čtyř typů (viz Obr. 13). U modelu typu „a“ se jedná o dva sériově řazené Kelvinovy modely. Model typu „b“ je dán paralelním řazením pružiny, tlumiče a Maxwellova modelu. Modely typů „c“ a „d“ jsou dány sérioparalelním řazením pružných a viskózních prvků.



Obr. 13: Čtyřprvkové modely třídy B [3]

7 Experimentální měření odezvy nosníků

7.1 Obecný popis

V praktické části této bakalářské práce byl proveden experiment. V rámci experimentu byla měřena odezva nosníků za účelem zjištění jejich tlumících vlastností. K měření byly použity nosníky z oceli a hliníku.

Samotný nosník byl na jednom konci upevněn v kleštinách (v matematickém modelu považován za vetknutý) a na jeho volném konci byl umístěn akcelerometr. Akcelerometr byl připojen přes USB port do počítače. Po vychýlení nosníku z rovnovážné polohy bylo zaznamenáváno zrychlení kmitavého pohybu. Pomocí softwaru SignalExpress firmy National Instruments byla získána závislost zrychlení volného konce nosníku na čase. Veškerá data byla exportována v excelu a následně zpracována pomocí softwaru MatLAB.

Poté rovněž pomocí softwaru MatLAB byl vytvořen matematický model nosníku. Na základě matematického modelu byly následně odhadnuty poměrné útlumy b_r .

7.2 Vztahy potřebné k vytvoření matematického modelu

K vytvoření matematického modelu bylo zapotřebí znát všechny rozměry nosníku, z nichž se vypočítal objem V a hustota ρ materiálu nosníku. Hustota oceli byla uvažována $\rho_{ocel} = 7850 \frac{kg}{m^3}$, hustota hliníku $\rho_{hlinik} = 2700 \frac{kg}{m^3}$. Poté pomocí vztahu

$$m = \rho \cdot V \quad (7.1)$$

byla spočtena hmotnost celého nosníku. [9]

Dále bylo nutné pomocí vztahu

$$J = \frac{T \cdot W^3}{12} \quad (7.2)$$

vypočítat kvadratický moment průřezu J , kde T je šířka a W je tloušťka nosníku. [1]

Vlastní úhlová frekvence byla analyticky vypočtena pomocí vztahu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_{ef}}}, \quad (7.3)$$

kde bylo důležité použít efektivní hmotnost m_{ef} . Efektivní hmotnost byla použita jako ekvivalent hmotnosti hmotného bodu, který v mechanické soustavě reprezentuje vetknutý nosník. Vztah (7.4) pro výpočet efektivní hmotnosti lze odvodit pomocí integrálního počtu. [10]

$$m_{ef} = \frac{33}{140} m \quad (7.4)$$

Ohybová tuhost vetknutého nosníku se vypočte pomocí vztahu (7.5). [1]

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot J}{L^3} \quad (7.5)$$

Modul pružnosti pro ocel byl uvažován $E_{ocel} = 2,1 \cdot 10^{11} Pa$, pro hliník $E_{Al} = 7,0 \cdot 10^{10} Pa$. [4] L je délka nosníku.

Vlastní frekvence jednotlivých nosníků byla analyticky vypočtena pomocí vztahu (7.6). [1]

$$f = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \quad (7.6)$$

Při tvorbě modelu bylo použito pohybové rovnice zrychlení, která po odvození a zjednodušení pro experiment má tvar

$$\ddot{q}(t) = C_a \cdot e^{-b_r \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (7.7)$$

kde

$$C_a = \omega_0^2 \cdot \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{b_r \omega x_0 + \dot{x}_0}{\omega}\right)^2}. \quad (7.8)$$

V případě měření nosníků v tomto experimentu $C_a \approx \omega_0^2 \cdot x_0$, neboť poměrné útlumy jsou řádově $b_r \ll 1$, počáteční výchylky x_0 jsou v porovnání s délkou nosníků velmi malé (řádově 10^3 krát menší) a počáteční rychlost $\dot{x}_0 = 0$.

Část rovnice (7.7) $C_a \cdot e^{-b_r \cdot \omega_0 \cdot t}$ je rovnicí obálky.

Hodnota poměrného útlumu b_r v jednotlivých matematických modelech, která je stěžejní pro výpočet součinitele dozínání δ , byla odhadnuta tak, aby obálky modelů odpovídaly časovému závislostem zrychlení získaných při experimentu.

Součinitel dozínání lze vypočítat pomocí vztahu

$$\delta = b_r \cdot \Omega_0, \quad (7.9)$$

kde Ω_0 je vlastní úhlová frekvence zjištěná pomocí funkce FFT v MatLABu.

Experimentálně změřené hodnoty byly proloženy příslušným počtem obálek. Každá z nich aproximuje křivku tlumení v příslušném časovém intervalu.

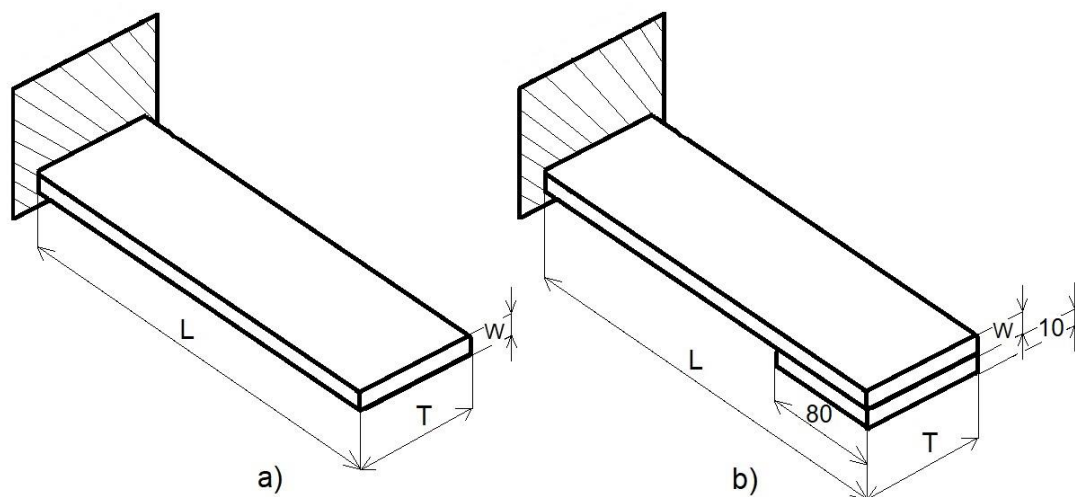
7.3 Měřené konfigurace nosníků

Celkem proběhla dvě měření, z nichž první bylo neúspěšné z důvodu nemožnosti proložení průběhu zrychlení obálkami. Bylo to způsobeno značnou nelinearitou kmitání, kterou zapříčinila druhá vlastní frekvence nosníků. Ve druhém měření byl tento problém vyřešen tím, že nosník byl vychýlen amplitudou o vysoké hodnotě. Tím se druhá vlastní frekvence velmi rychle utlumila a na měření neměla téměř žádný vliv.

Experimentálně zjištěné závislosti zrychlení (šedé křivky) na čase byly vykresleny pomocí softwaru MatLAB. Obálky (červené křivky) byly vykresleny pomocí příslušného matematického modelu vytvořeného rovněž v MatLABu. Všechny křivky byly zobrazeny v jednom grafu, aby byla zřejmá relativní přesnost či odchylka reálného experimentu od ideálního modelového případu. První vlastní frekvence jednotlivých nosníků byly zjištěny analytickým výpočtem a následně pomocí Fourierovy transformace (v MatLABu funkce FFT).

Všechny testované nosníky byly ocelové s rozměry udanými v Tab. 1, s výjimkou hliníkového nosníku (nosník č. 6), který měl na volném konci navíc přivařenou ocelovou část o rozměrech 50x10-80 mm (viz Obr. 14).

Vztah pro výpočet efektivní hmotnosti (7.4) byl použit u všech konfigurací nosníků. U nosníku č. 6 byla k efektivní hmotnosti přičtena ještě navíc celá hmotnost ocelové části, protože je přivařena na konci nosníku. Z tohoto důvodu ovlivňuje vlastní frekvenci nosníku celou svojí hmotností.



Obr. 14: a) Ilustrace nosníků č. 1 – 5; b) ilustrace nosníku č. 6

Skripty z MatLABu jsou součástí přílohy.

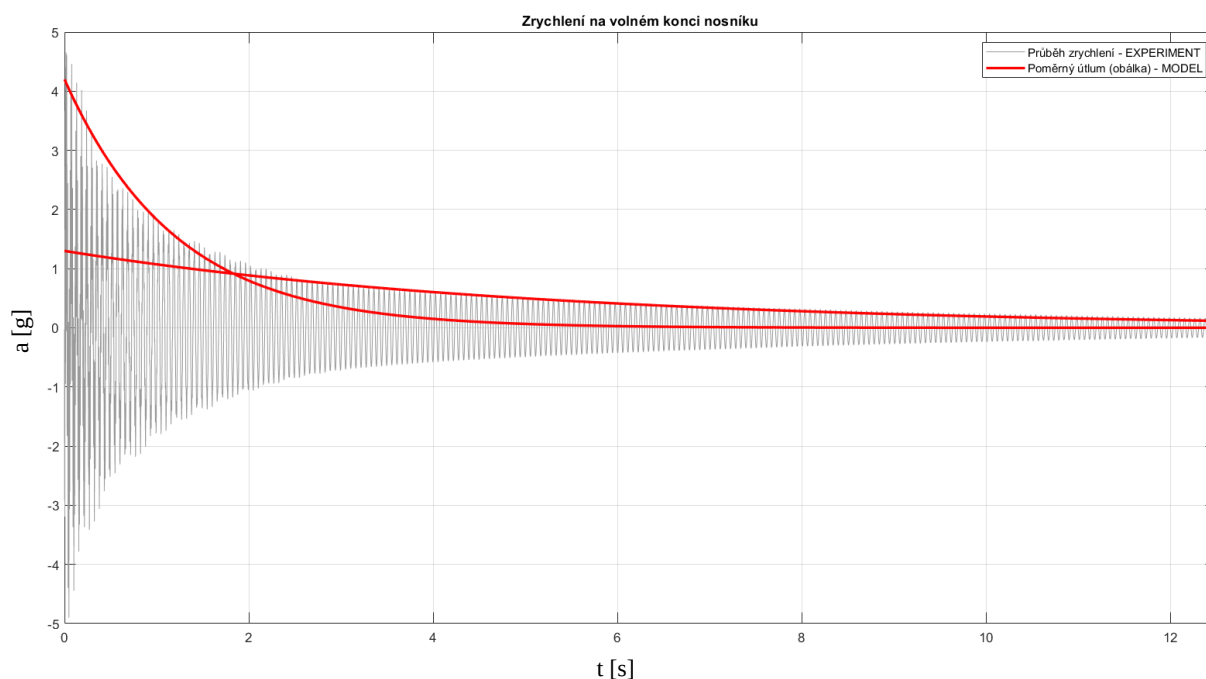
Tab. 1: Experimentálně zjišťované nosníky

Číslo nosníku	Rozměry T×W-L [mm]	Materiál nosníku	Graf charakteristik	Skript z MatLABu	1. vlastní frekvence (analyticky) [Hz]
1	40x6-500	ocel S235JRC+C	Obr. 17	Příloha 1	20,35
2	30x3-500	ocel S235JRC+C	Obr. 19	Příloha 2	10,17
3	30x3-400	ocel S235JRC+C	Obr. 21	Příloha 3	15,90
4	30x3-300	ocel S235JRC+C	Obr. 23	Příloha 4	28,26
5	30x3-200	ocel S235JRC+C	Obr. 25	Příloha 5	63,58
6	50x10-500	hliník AW 6060 + ocel S235JRC+C	Obr. 27	Příloha 6	19,34

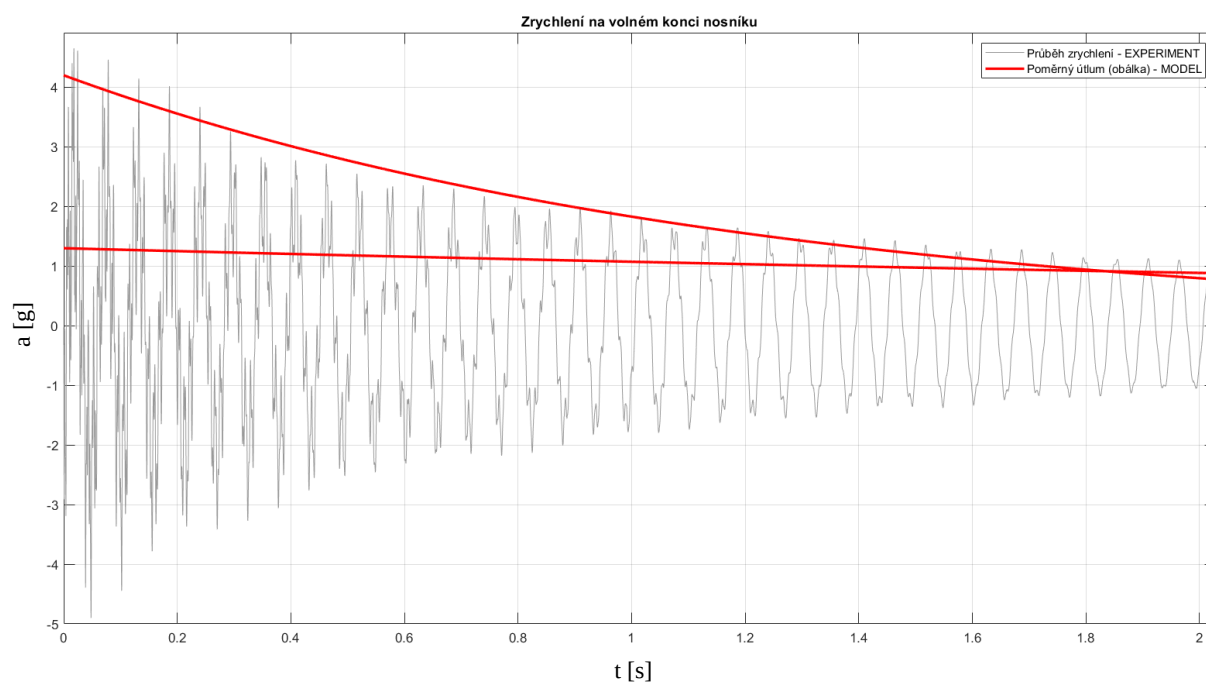
7.3.1 Nosník číslo 1

Měření zkreslené druhou vlastní frekvencí

Jak je uvedeno v podkapitole 7.3, první měření bylo neúspěšné. Z Obr. 15 je zřejmé, že se jednalo o silně nelineární kmitání. Na Obr. 16 je detail vlivu druhé vlastní frekvence nosníku. Druhá frekvence se zde vyskytuje až do času $t \approx 1,9$ s, kdy amplituda zrychlení je již méně než poloviční oproti počáteční amplitudě.

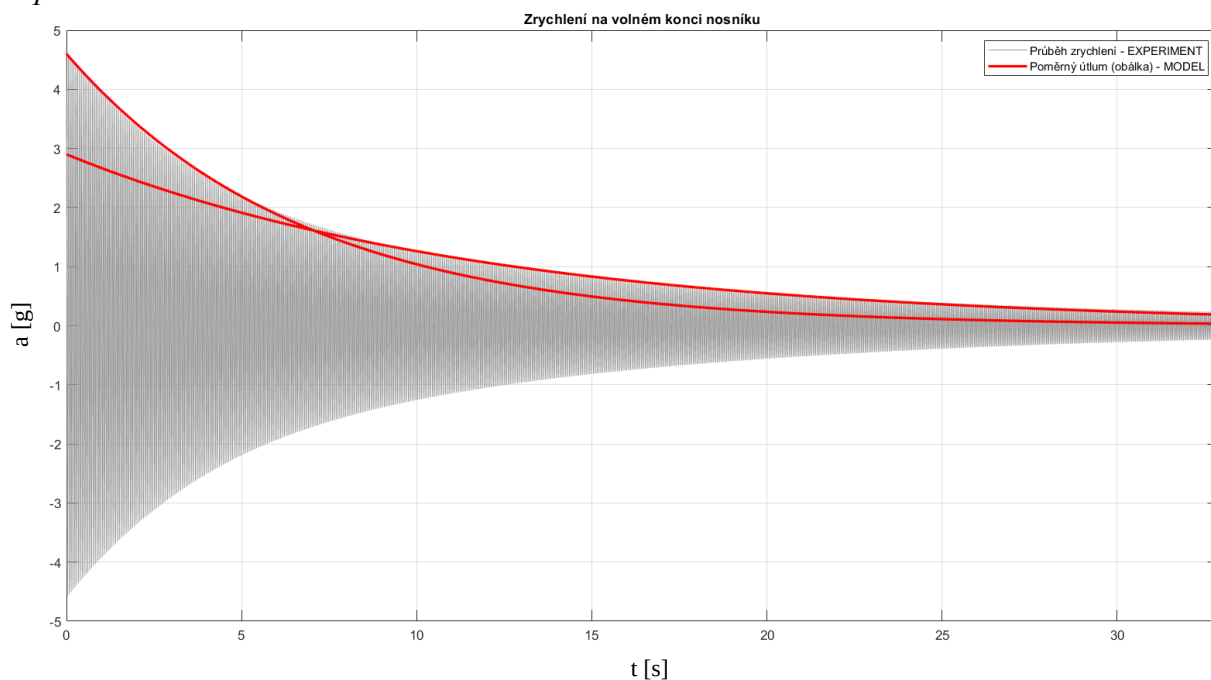


Obr. 15: Nosník č. 1: Časová závislost zrychlení – neúspěšné měření

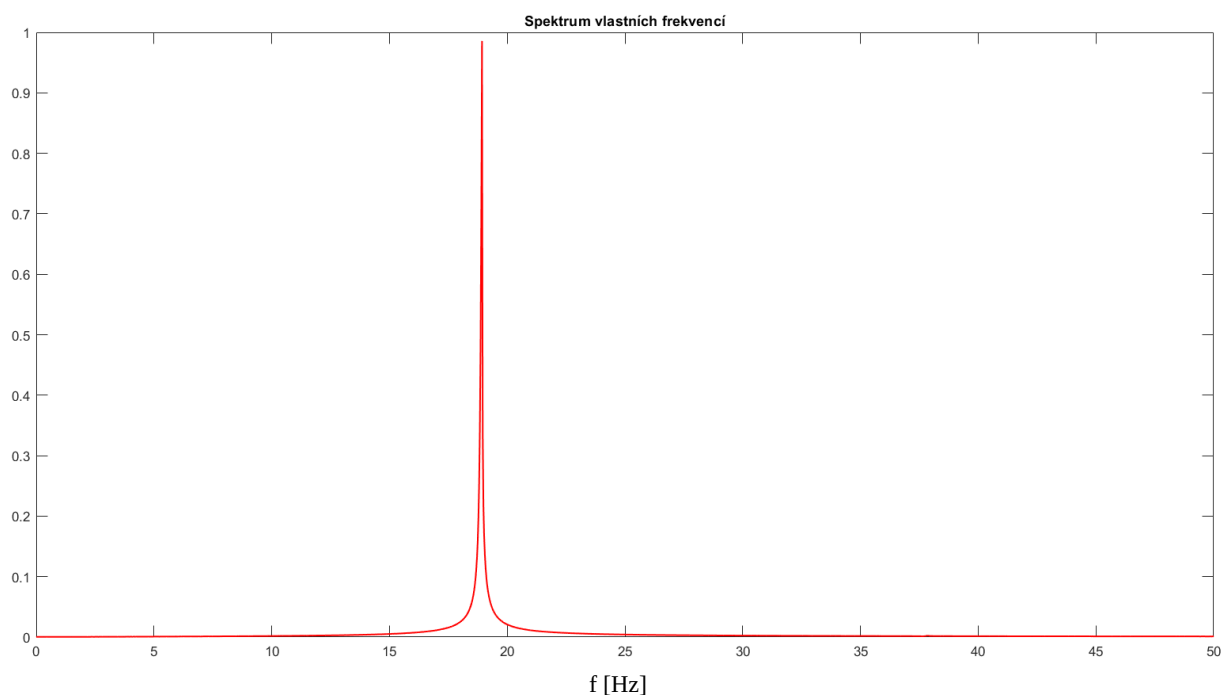


Obr. 16: Nosník č. 1: Detail vlivu druhé vlastní frekvence

Správné měření bez zkreslení



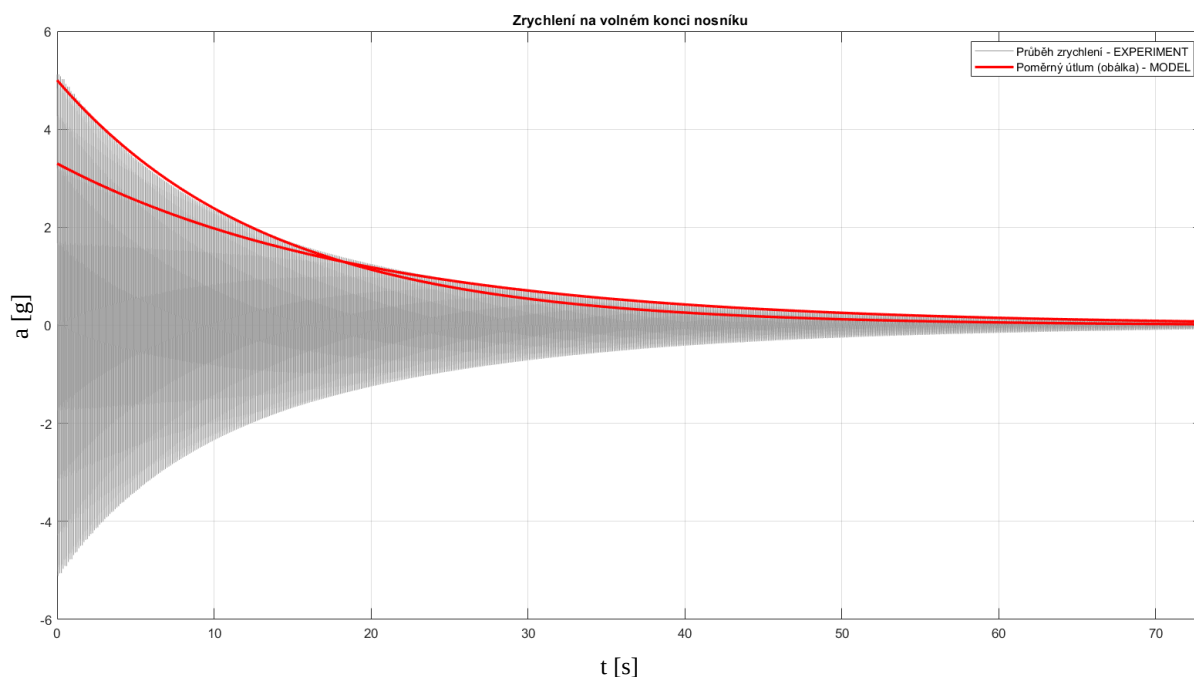
Obr. 17: Nosník č. 1: Časová závislost zrychlení



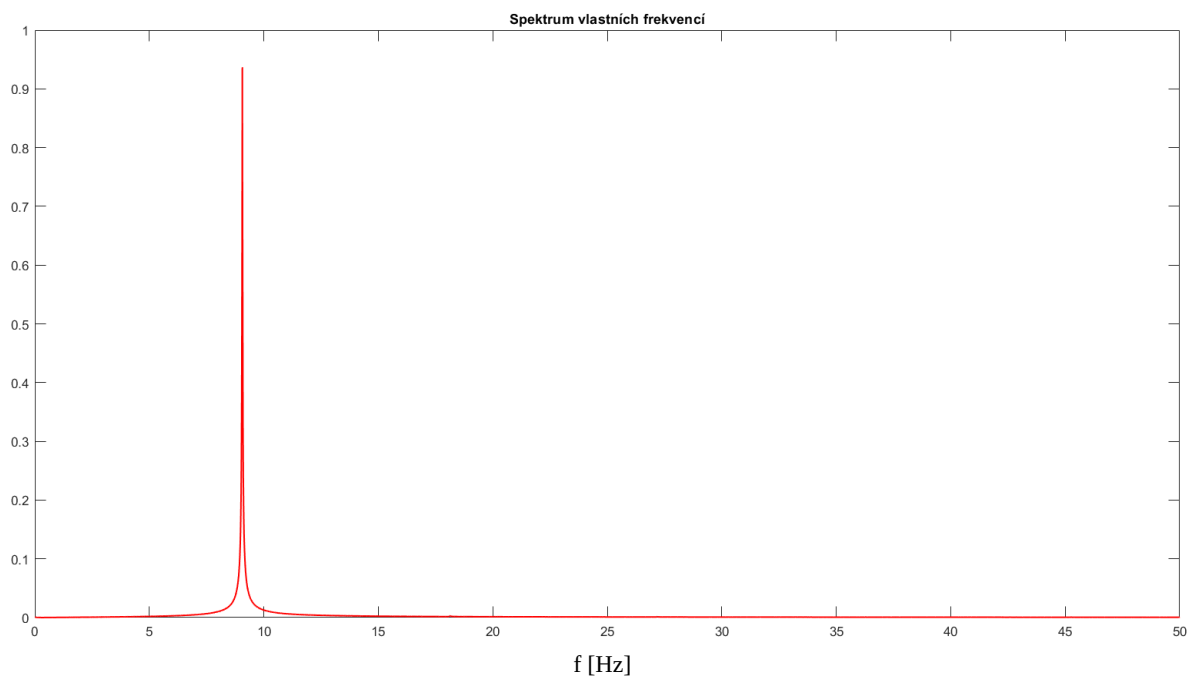
Obr. 18: Nosník č. 1: První vlastní frekvence zjištěná pomocí funkce FFT

Pro aproximaci obálky nosníku $40 \times 6-500$ v časovém intervalu $t_1 \in \langle 0; 7,0 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max1} = 4,6 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r1} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_1 = 148,7 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$. V časovém intervalu $t_2 \in \langle 7,0; 32,9 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max2} = 2,9 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r2} = 0,7 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_2 = 83,3 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$.

7.3.2 Nosník číslo 2



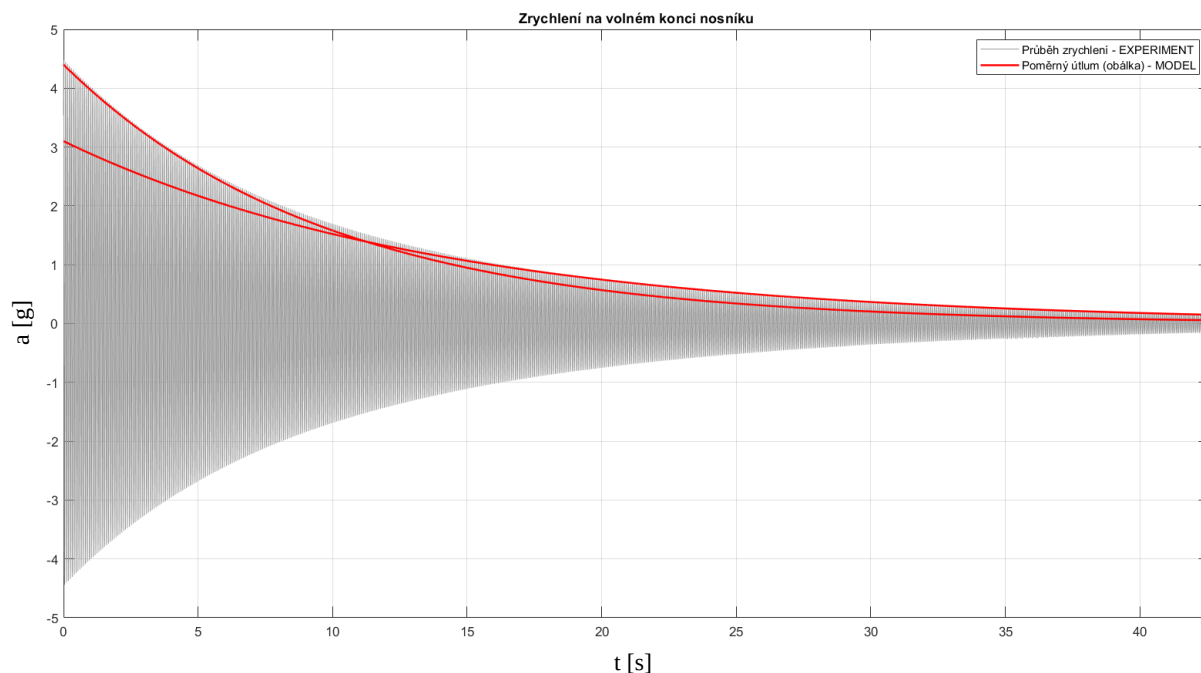
Obr. 19: Nosník č. 2: Časová závislost zrychlení



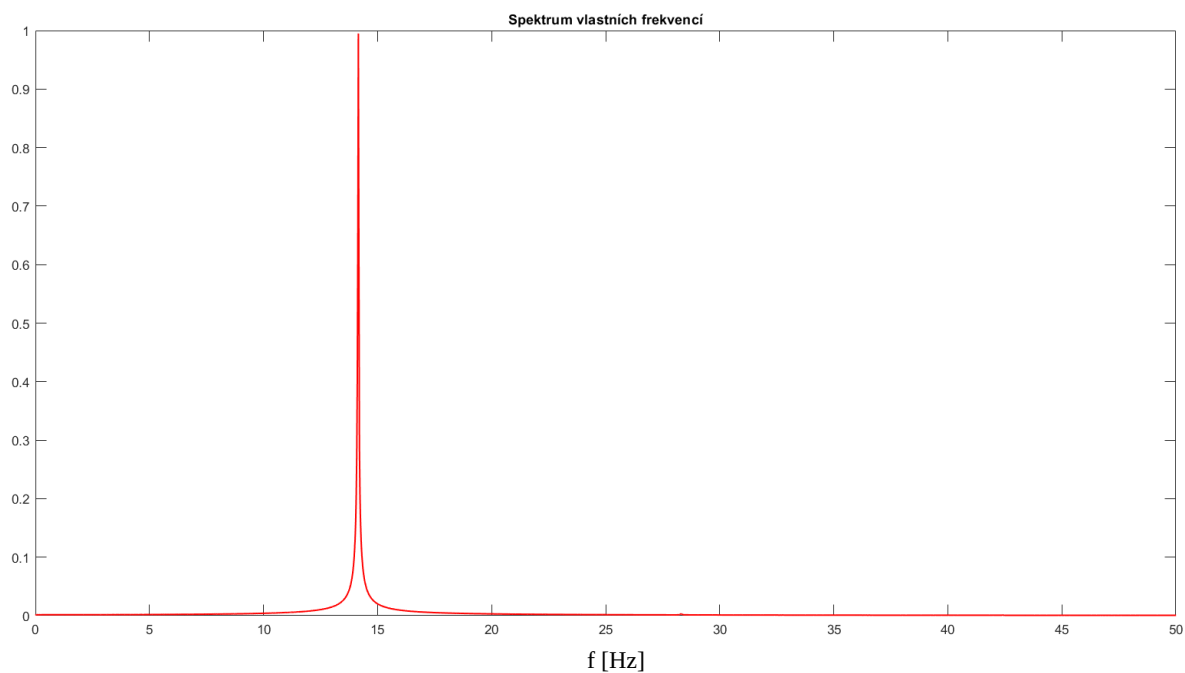
Obr. 20: Nosník č. 2: První vlastní frekvence

Pro aproximaci obálky nosníku 30x3-500 v časovém intervalu $t_1 \in \langle 0; 18,2 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max1} = 5,0 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r1} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_1 = 74 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$. V časovém intervalu $t_2 \in (18,2; 73,1)$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max2} = 3,3 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r2} = 0,9 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_2 = 51,2 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$.

7.3.3 Nosník číslo 3



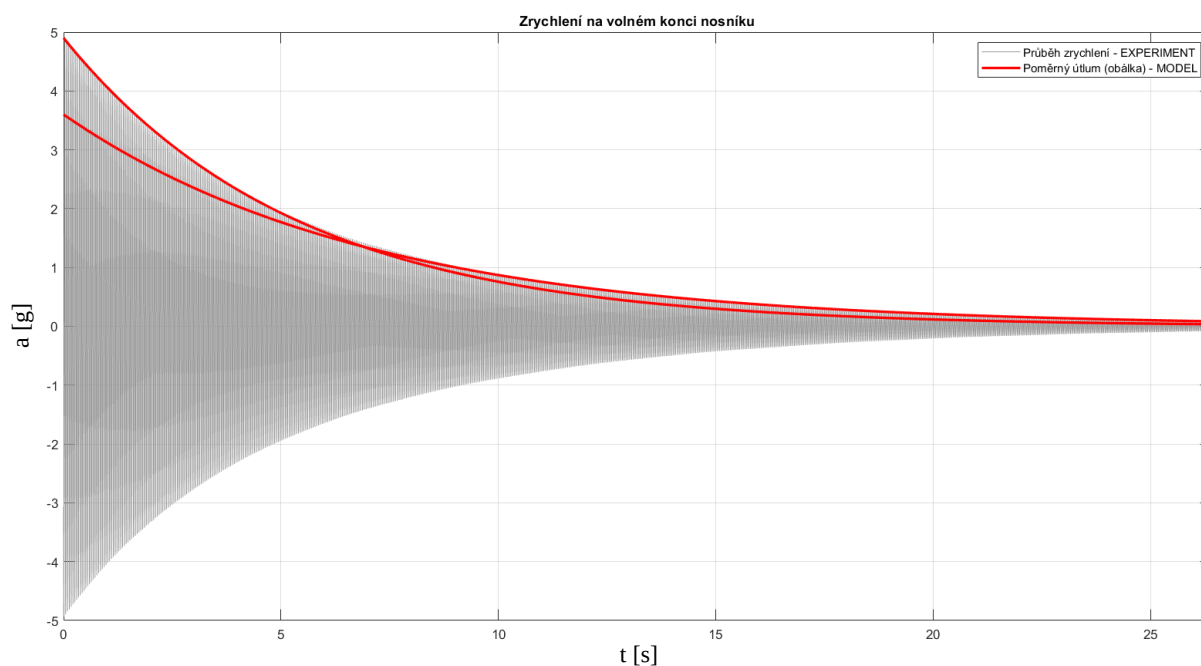
Obr. 21: Nosník č. 3: Časová závislost zrychlení



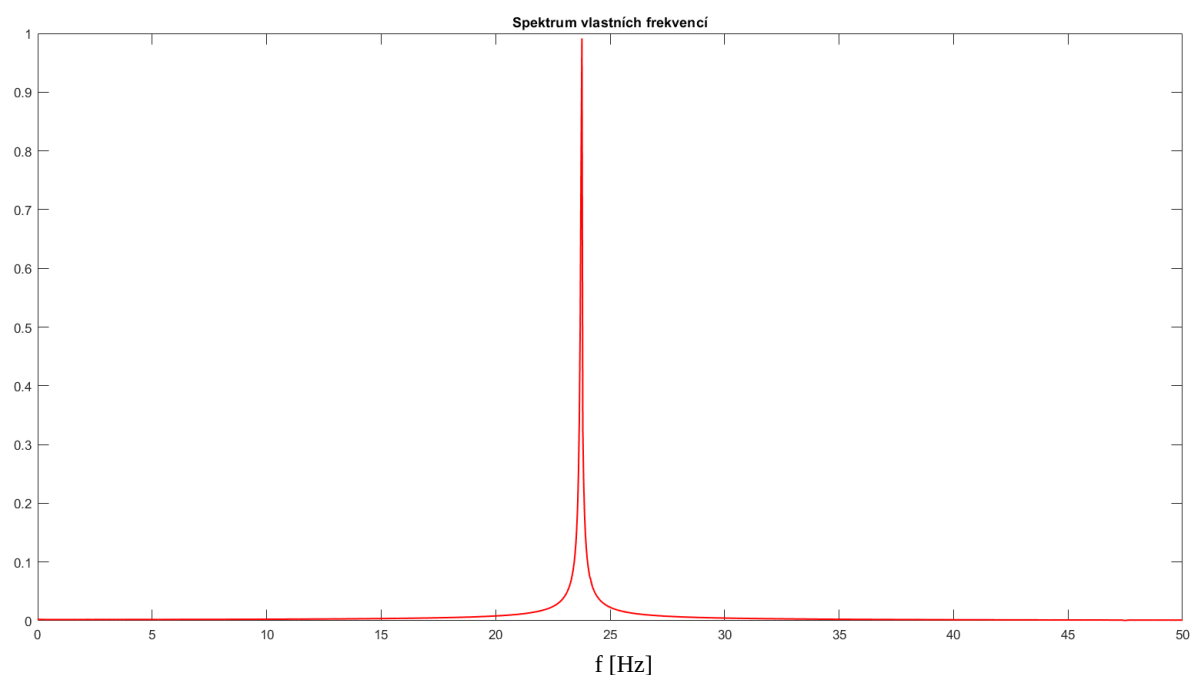
Obr. 22: Nosník č. 3: První vlastní frekvence

Pro aproximaci obálky nosníku 30x3-400 v časovém intervalu $t_1 \in \langle 0; 11,2 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max1} = 4,4 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r1} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_1 = 102,3 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$. V časovém intervalu $t_2 \in (11,2; 42,6)$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max2} = 3,1 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r2} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_2 = 71,2 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$.

7.3.4 Nosník číslo 4



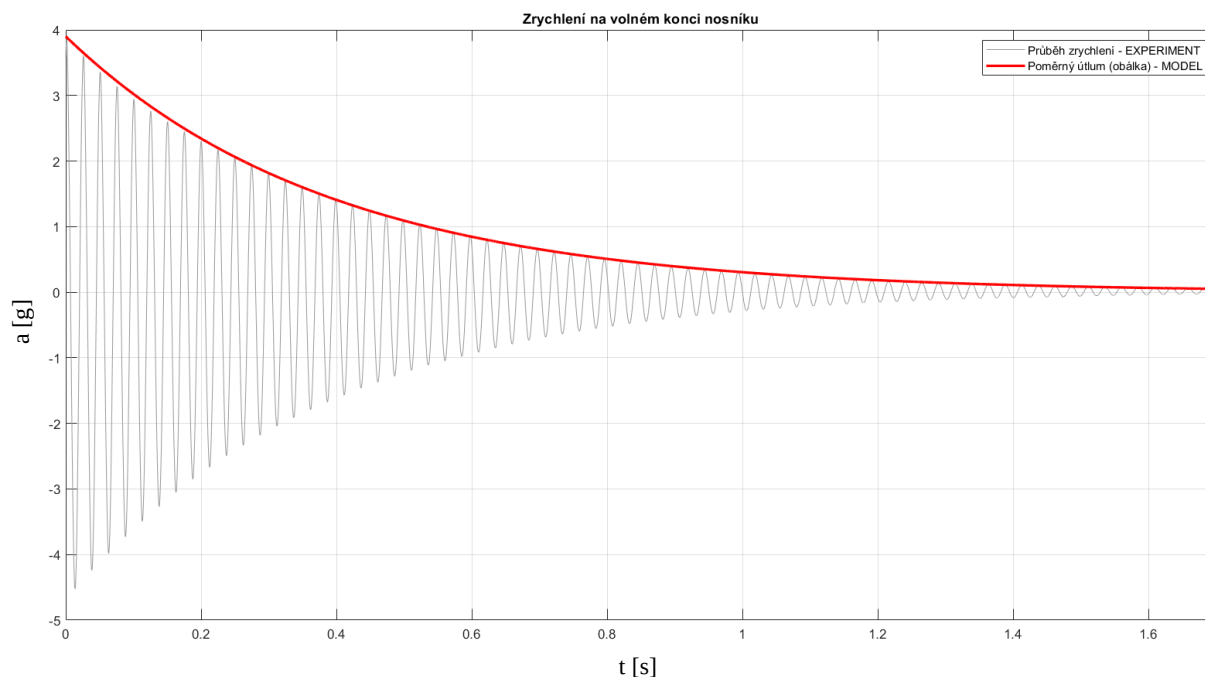
Obr. 23: Nosník č. 4: Časová závislost zrychlení



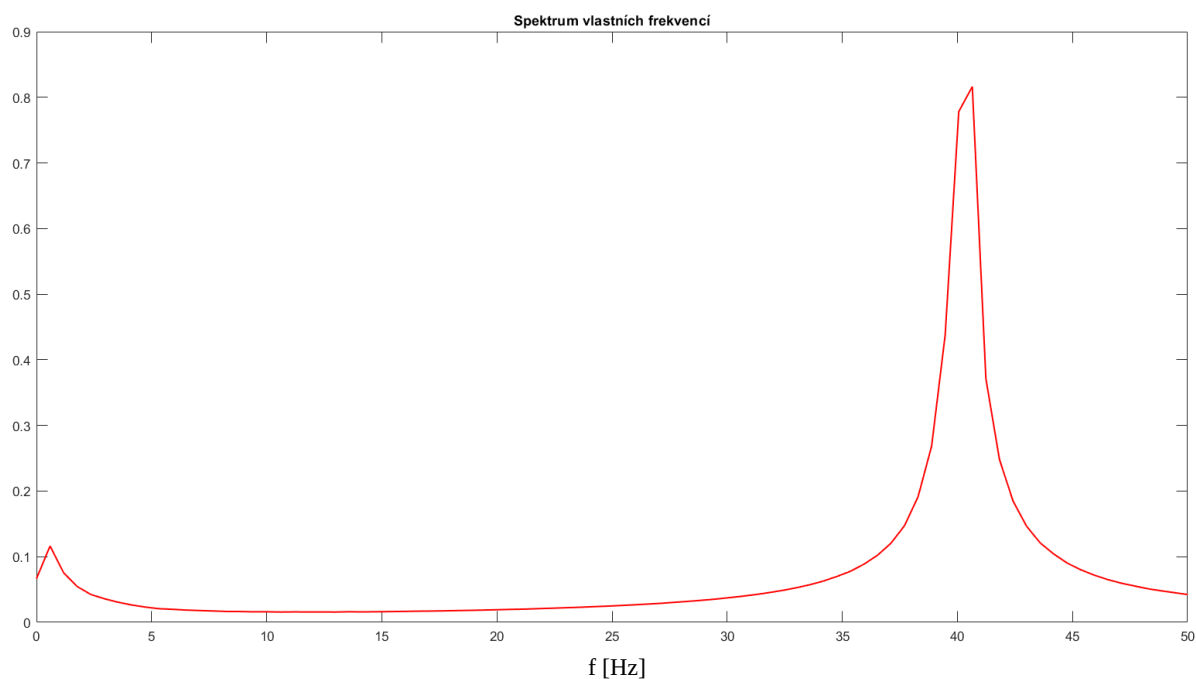
Obr. 24: Nosník č. 4: První vlastní frekvence

Pro aproximaci obálky nosníku 30x3-300 v časovém intervalu $t_1 \in \langle 0; 6,9 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max1} = 4,9 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r1} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ a součinitel dozívání vyšel $\delta_1 = 186,7 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$. V časovém intervalu $t_2 \in (6,9; 26,4)$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max2} = 3,6 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r2} = 0,95 \cdot 10^{-3}$ a součinitel dozívání vyšel $\delta_2 = 141,9 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$.

7.3.5 Nosník číslo 5



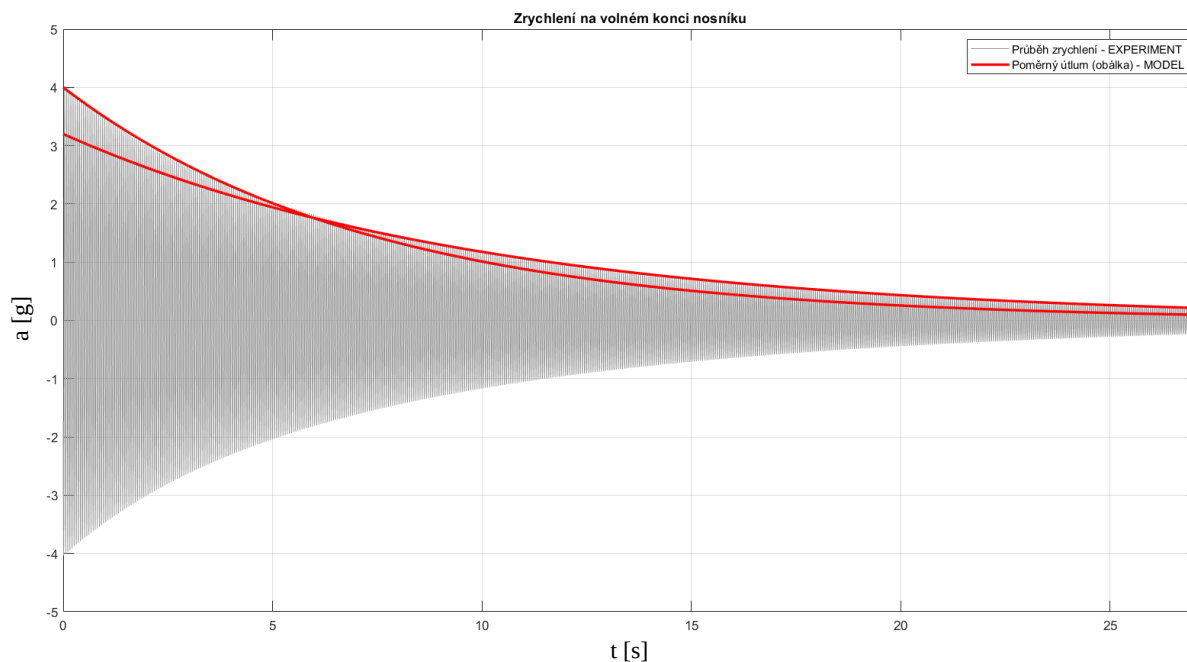
Obr. 25: Nosník č. 5: Časová závislost zrychlení



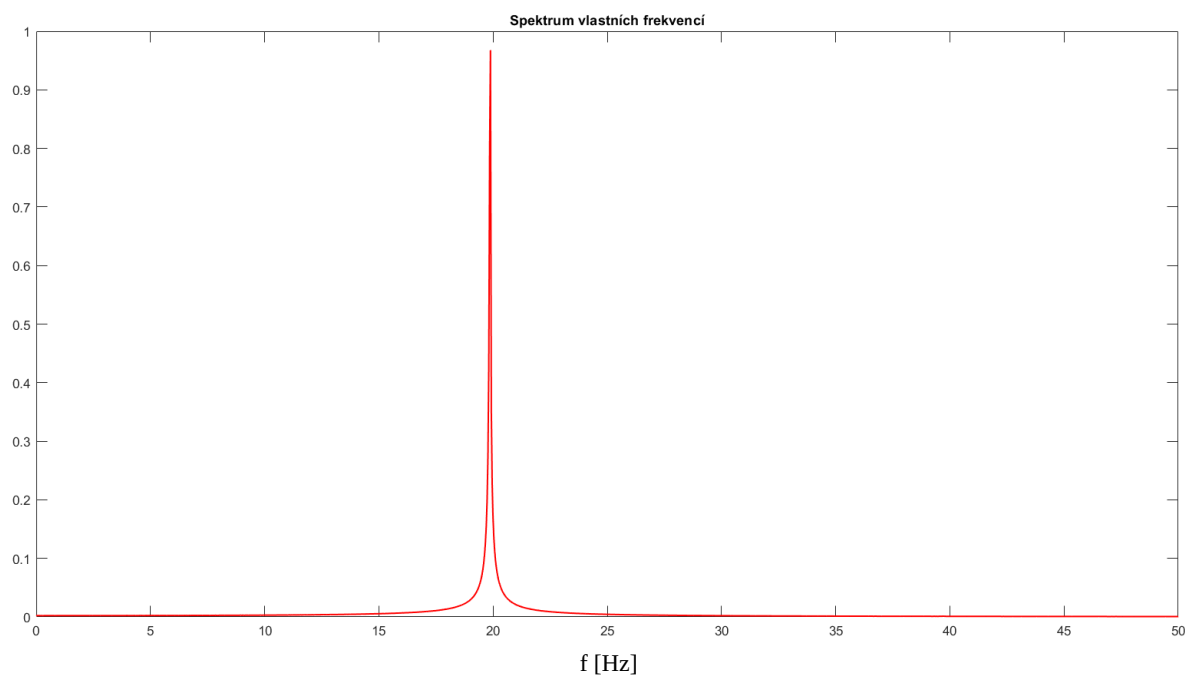
Obr. 26: Nosník č. 5: První vlastní frekvence

Pro aproximaci obálky nosníku 30x3-200 v celém časovém intervalu $t \in \langle 0; 1,7 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max} = 3,9 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_r = 10 \cdot 10^{-3}$ a součinitel dozívání vyšel $\delta = 254,83 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$.

7.3.6 Nosník číslo 6



Obr. 27: Nosník č. 6: Časová závislost zrychlení



Obr. 28: Nosník č. 6: První vlastní frekvence

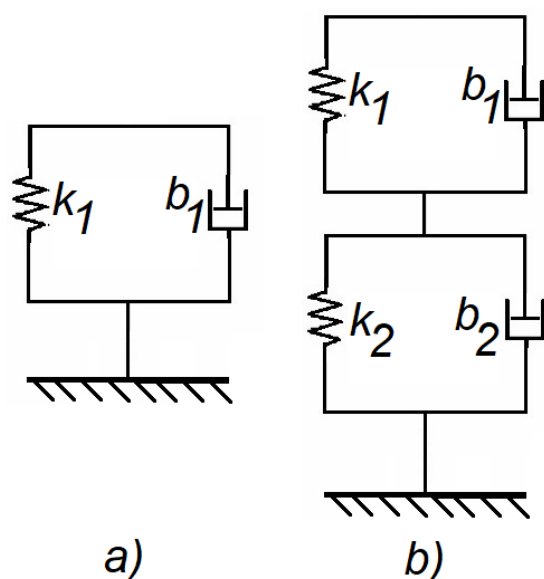
Pro aproximaci obálky nosníku 50x10-500 v časovém intervalu $t_1 \in \langle 0; 6,0 \rangle$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max1} = 4,0 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r1} = 1,1 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_1 = 137,5 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$. V časovém intervalu $t_2 \in (6,0; 27,1)$ s a s počáteční amplitudou zrychlení $a_{max2} = 3,2 \cdot g$ byl odhadnut poměrný útlum $b_{r2} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ a součinitel doznívání vyšel $\delta_2 = 100 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$.

Tab. 2: Výsledky experimentu při zjišťování tlumících vlastností jednotlivých nosníků

	Rozměry TxW-L [mm]	1. vlastní frekvence (analyticky) [Hz]	1. vlastní frekvence (fft) [Hz]	b_{r1} [$\cdot 10^{-3}$]	b_{r2} [$\cdot 10^{-3}$]	δ_1 [$\cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$]	δ_2 [$\cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$]
1	40x6-500	20,35	18,93	1,30	0,70	148,70	83,30
2	30x3-500	10,17	9,06	1,30	0,90	74,00	51,20
3	30x3-400	15,90	14,16	1,20	0,80	102,30	71,20
4	30x3-300	28,26	23,77	1,30	0,95	186,70	141,90
5	30x3-200	63,58	40,56	10,00	-	254,83	-
6	50x10-500	19,34	19,89	1,10	0,80	137,50	100,00

Z Tab. 2 vyplývá, že rozdíly mezi analyticky a experimentálně zjištěnými vlastními frekvencemi se zvyšují s klesající délkou nosníku. Při kratších délkách jsou výsledky experimentu (vlastní frekvence, poměrný útlum) ovlivněny tuhostí základního tělesa. Za základní těleso je považována měřicí soustava, tj. stojan, držák se šrouby.

Pro názornost je soustava nosník – stojan modelována na Obr. 29b), kde k_1 a b_1 jsou tuhost a tlumení samotného nosníku a k_2 a b_2 jsou tuhost a tlumení měřicí soustavy. Tento model je sériovým řazením dvou Kelvinových modelů nebo také čtyřprvkovým modelem třídy B typu „a“.



Obr. 29: Model soustavy nosník – stojan: a) konfigurace uvažovaná v matematickém modelu; b) konfigurace reálné soustavy

8 Závěr

Prvním cílem této bakalářské práce bylo provést rešerši způsobů určení vlastního tlumení kovových materiálů. Materiály byly rozděleny do základních skupin podle viskoelastických vlastností. Dále byly shrnuty možnosti určení vlastního tlumení a nastíněny způsoby analytického modelování viskoelastického chování materiálů.

V další části byl proveden experiment s různými konfiguracemi nosníků rozdílných délek a materiálů. Byly vytvořeny matematické modely jednotlivých konfigurací nosníků v softwaru MatLAB. Rovněž pomocí MatLABu byly vykresleny časové závislosti zrychlení získané při experimentu. Na základě výsledků experimentu byly odhadnuty poměrné útlumy, pomocí kterých byly do grafů vykresleny obálky, které aproximují vlastní tlumení v příslušných časových intervalech.

U ocelových nosníků č. 1, 2, 3 a 4 byly odhadnuté poměrné útlumy v prvním intervalu téměř totožné. Nejvyšší relativní odchylka od průměrné hodnoty u nosníku č. 3 nepřesáhla 6 %. V druhém intervalu byly relativní odchylky již znatelně vyšší. Nejvyšší relativní odchylka byla 16 % u nosníku č. 1.

Co se týče hodnoty poměrného útlumu hliníkového nosníku, byla oproti ocelovým nosníkům nižší. Z toho vyplývá, že hliník má nižší materiálové tlumení než ocel. Nicméně pro získání přesnější hodnoty poměrného útlumu hliníku by bylo nutné provést větší počet měření a rovněž použít nosník vyrobený pouze z hliníku.

U nosníku č. 5 byla hodnota poměrného útlumu od ostatních odlišná o jeden řád. Z tohoto důvodu také nebyl uvažován při zjišťování relativních odchylek. Značná odchylka od ostatních měřených konfigurací byla pravděpodobně způsobena tím, že tuhost a tlumení základního tělesa v tomto případě měly na výsledky velký vliv. Rovněž lze předpokládat, že akcelerometr umístěný na volném konci nosníku měl na výsledky výrazně větší vliv než u ostatních delších nosníků. V případě použití vhodné metody by bylo možné určit tuhost a tlumení základního tělesa. Po následném odečtení těchto parametrů od naměřených hodnot by bylo možné získat poměrný útlum samotného nosníku. Tento by pak lépe odpovídal realitě a jeho hodnota by byla přibližně stejná jako u ostatních ocelových nosníků.

Pro popis materiálového tlumení nosníků č. 1, 2, 3, 4 a 6 bylo nutné časové závislosti zrychlení proložit nejméně dvěma obálkami. Materiálové tlumení těchto konfigurací nosníků je nelineární.

Seznam použitých zdrojů

[1] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. Učební texty vysokých škol. ISBN 978-80-214-3446-2.

[2] ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. *Kmitání mechanických soustav*. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-337-X.

[3] VAŠINA, Martin. *Studium tlumících vlastností materiálů*. [online]. [cit. 2019-05-16]. Brno: VUTIUUM, 2009. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně. Habilitační a inaugurační spisy. ISBN 978-80-214-3848-4. Dostupné z: <http://www.vutium.vutbr.cz/tituly/pdf/ukazka/978-80-214-3848-4.pdf>

[4] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-2592-X.

[5] *Viskoelastická materiálů*. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně [online]. [cit. 2019-05-16]. Dostupné z: http://ufmi.ft.utb.cz/texty/env_fyzika/EF_06.pdf

[6] STUTTS, Daniel S. *Equivalent Viscous Damping* [online]. 2013. [cit. 2019-05-16]. Dostupné z: <http://web.mst.edu/~stutts/SupplementalNotes/EquivalentViscousDamping.pdf>

[7] ORBAN, F. *Damping of materials and members in structures* [online]. 2011. [cit. 2019-05-16]. Journal of Physics: Conference Series (Vol. 268). Institute of Physics Publishing. ISBN 1742-6596 Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/268/1/012022/pdf>

[8] ĎOUBAL, Stanislav. *Viskoelastická*. [online]. [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: <https://www.viskoelastica.cz/>

[9] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Pomocné knihy pro žáky. ISBN 80-85849-84-4.

[10] *Effective Mass*. Serendi-CDI [online]. [cit. 2019-03-18]. Dostupné z: http://www.serendi-cdi.org/serendipedia/index.php?title=Effective_Mass

Seznam použitých symbolů, veličin a zkratek

$a_{\max}$	amplituda zrychlení	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
b	koeficient tlumení	$[\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}]$
b_{eq}	ekvivalentní koeficient tlumení	$[\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}]$
b_r	součinitel tlumení	$[-]$
E	Youngův modul pružnosti v tahu	$[\text{Pa}]$
E'	reálná složka komplexního modulu pružnosti	$[\text{Pa}]$
E''	imaginární složka komplexního modulu pružnosti	$[\text{Pa}]$
E^*	komplexní modul pružnosti	$[\text{Pa}]$
E_d	energie disipovaná	$[\text{J}]$
E_k	energie kinetická	$[\text{J}]$
E_p	energie potenciální	$[\text{J}]$
f	vlastní frekvence	$[\text{Hz}]$
F, Q	vnější síla	$[\text{N}]$
F_d	tlumící síla	$[\text{N}]$
f_m	modální frekvence	$[\text{Hz}]$
g	gravitační zrychlení	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
i	imaginární jednotka	$[-]$
J	kvadratický moment průřezu	$[\text{m}^4]$
k	ohybová tuhost nosníku	$[\text{N} \cdot \text{m}^{-1}]$
L	délka nosníku	$[\text{m}]$
m	hmotnost	$[\text{kg}]$
m_{ef}	efektivní hmotnost	$[\text{kg}]$
P	výkon	$[\text{W}]$
q	zobecněná souřadnice polohy	$[\text{m}]$
$\ddot{q}$	zobecněná souřadnice zrychlení	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
$\dot{q}$	zobecněná souřadnice rychlosti	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$
q_h	homogenní řešení	$[\text{m}]$
q_p	partikulární řešení	$[\text{m}]$
R	Rayleighova disipativní funkce	$[\text{W}]$
t	čas	$[\text{s}]$
T	šířka nosníku	$[\text{m}]$
T_s	perioda	$[\text{s}]$
V	objem	$[\text{m}^3]$
W	tloušťka	$[\text{m}]$
δ	součinitel doznívání	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$
$\varepsilon, \varepsilon_0$	přetvoření	$[-]$
η_T	činitel vnitřního tlumení	$[-]$
η	koeficient Newtonovské viskozity	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$
ν	logaritmický dekrement útlumu	$[-]$
ρ	hustota	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$
σ, σ_0	mechanické napětí	$[\text{Pa}]$
φ	fázový posun mezi přetvořením a napětím	$[\text{rad}]$ nebo $[\circ]$
ω	úhlová rychlost	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$
Ω_0	vlastní úhlová frekvence (experimentálně)	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$
ω_0	vlastní úhlová frekvence (analyticky)	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$

Seznam obrázků

- Obr. 1: Lineární kmitání s jedním stupněm volnosti [1]
Obr. 2: Časová závislost mechanického napětí a přetvoření na čase u ideálně elastických materiálů [3]
Obr. 3: Časová závislost mechanického napětí a přetvoření na čase u ideálně viskózních materiálů [3]
Obr. 4: Časová závislost mechanického napětí a přetvoření na čase u viskoelastických materiálů [3]
Obr. 5: Hysterezní smyčka a) lineárního tlumení; b) nelineárního tlumení [7]
Obr. 6: Amplitudo-frekvenční charakteristika výchylky [3]
Obr. 7: Časový průběh volných tlumených kmitů [3]
Obr. 8: Sériové a paralelní řazení pružného a viskózního prvku v dvouprvkovém modelu [3]
Obr. 9: Časový průběh napětí při konstantní deformaci u Maxwellova modelu [3]
Obr. 10: Tříprvkové modely třídy C [3]
Obr. 11: Tříprvkové modely třídy D [3]
Obr. 12: Čtyřprvkové modely třídy A [3]
Obr. 13: Čtyřprvkové modely třídy B [3]
Obr. 14: a) Ilustrace nosníků č. 1 – 5; b) ilustrace nosníku č. 6
Obr. 15: Nosník č. 1: Časová závislost zrychlení – neúspěšné měření
Obr. 16: Nosník č. 1: Detail vlivu druhé vlastní frekvence
Obr. 17: Nosník č. 1: Časová závislost zrychlení
Obr. 18: Nosník č. 1: První vlastní frekvence zjištěná pomocí funkce FFT
Obr. 19: Nosník č. 2: Časová závislost zrychlení
Obr. 20: Nosník č. 2: První vlastní frekvence
Obr. 21: Nosník č. 3: Časová závislost zrychlení
Obr. 22: Nosník č. 3: První vlastní frekvence
Obr. 23: Nosník č. 4: Časová závislost zrychlení
Obr. 24: Nosník č. 4: První vlastní frekvence
Obr. 25: Nosník č. 5: Časová závislost zrychlení
Obr. 26: Nosník č. 5: První vlastní frekvence
Obr. 27: Nosník č. 6: Časová závislost zrychlení
Obr. 28: Nosník č. 6: První vlastní frekvence
Obr. 29: Model soustavy nosník – stojan: a) konfigurace uvažovaná v matematickém modelu; b) konfigurace reálné soustavy

Seznam tabulek

Tab. 1: Experimentálně zjišťované nosníky

Tab. 2: Výsledky experimentu při zjišťování tlumících vlastností jednotlivých nosníků

Seznam příloh

Přílohy jsou k dispozici v elektronické podobě na webu VUT.

Příloha 1	Skript v MatLABu pro ocelový nosník 40x6-500 mm
Příloha 2	Skript v MatLABu pro ocelový nosník 30x3-500 mm
Příloha 3	Skript v MatLABu pro ocelový nosník 30x3-400 mm
Příloha 4	Skript v MatLABu pro ocelový nosník 30x3-300 mm
Příloha 5	Skript v MatLABu pro ocelový nosník 30x3-200 mm
Příloha 6	Skript v MatLABu pro hliníkový nosník s ocelovou částí 50x10-500 mm