



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

FREKVENČNÍ METODY PRO VYŠETROVÁNÍ DISKRÉTNÍCH REGULACNÍCH SYSTÉMU

FREQUENCY METHODS USED TO DISCRETE CONTROL SYSTEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. JAKUB GREAR

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. IVAN ŠVARC, CSc.

BRNO 2009

Prohlašuji že jsem tuto práci vypracoval samostatně pouze za použití doporučené literatury a dle rad a pokynů vedoucího diplomové práce Doc. Ing. Ivana Švarce,CSc., kterému touto cestou děkuji.

V Brně dne 27.5. 2009

Jakub Grenar

ABSTRAKT

Tématem této diplomové práce je „Frekvenční metody pro vyšetřování diskrétních regulačních systémů“. Zabývá se konstrukcí hlavně frekvenčních charakteristik diskrétních systémů. Práce je rozdělena na dvě části. V první části je uvedena teorie a základní vztahy pro objasnění konstrukce frekvenčních charakteristik spojitých i diskrétních regulačních systémů. Druhá část obsahuje hlavní náplň práce zadanou vedoucím této diplomové práce. Ta se skládá z vytvoření katalogu některých základních frekvenčních charakteristik diskrétních regulačních systémů a s vytvoření programu pro výpočet a konstrukci těchto systémů.

ABSTRACT

The subject of this master's thesis is „Frequency method for investigation discrete regulation systems“. It's primary conversant of constructing frequency characteristics for discrete systems. The works has a two parts. The first part indicates provides theoretical information and the basic relations needed to clarify construction of frequency characteristics continuous and discrete systems too. The second part includes main job description given by the headman of this thesis. It's consisting of constructing catalogue of the frequency discrete characteristics for discrete systems and creation program for calculation and construction of this systems.

OBSAH:

	Zadání závěrečné práce	3
	Licenční smlouva	5
	Abstrakt	7
1	Úvod	11
2	Statické a dynamické vlastnosti regulačních členů	13
3	Frekvenční přenos spojitých systémů	15
4	Frekvenční charakteristiky spojitých systémů	19
4.1	Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině	19
4.2	Amplitudová a fázová charakteristika v lineárních souřadnicích	21
4.3	Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích	21
5	Frekvenční přenos diskrétních systémů	23
6	Frekvenční charakteristiky diskrétních systémů	25
6.1	Frekvenční charakteristiky v komplexní rovině	26
6.2	Amplitudová a fázová charakteristika v lineárních souřadnicích	26
6.3	Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích	25
7	Program pro konstrukci frekvenčních charakteristik	29
7.1	Popis programu CharDS	29
7.2	Schéma programu CharDS	30
7.3	Testování programu CharDS	30
8	Katalog frekvenčních charakteristik	35
9	Závěr	61
10	Seznam použité literatury	63

1 Úvod:

Tato diplomová práce se zabývá problematikou diskrétních regulačních obvodů, jejich popisem, konstrukcí frekvenčních charakteristik a stabilitou.

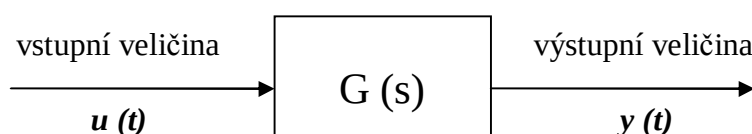
V teoretické části bude nejdříve vysvětlena teorie a uvedeny nejdůležitější vztahy pro popis spojitých regulačních systémů, následně i pro diskrétní regulační systémy. Dále bude vysvětlen význam a konstrukce frekvenčních charakteristik v komplexní rovině a také konstrukce amplitudové a fázové charakteristiky v lineárních a logaritmických souřadnicích.

V praktické části bude vytvořen katalog některých typových příkladů frekvenčních charakteristik diskrétních systémů. Katalog bude obsahovat 12 položek. Každá položka bude obsahovat příslušný odvozený vztah pro Frekvenční přenos, frekvenční charakteristiku v komplexní rovině a frekvenční-amplitudovou a frekvenční-fázovou charakteristiku v logaritmických souřadnicích.

Součástí diplomové práce je také program pro výpočet a vykreslení grafů frekvenčních charakteristik diskrétních systémů.

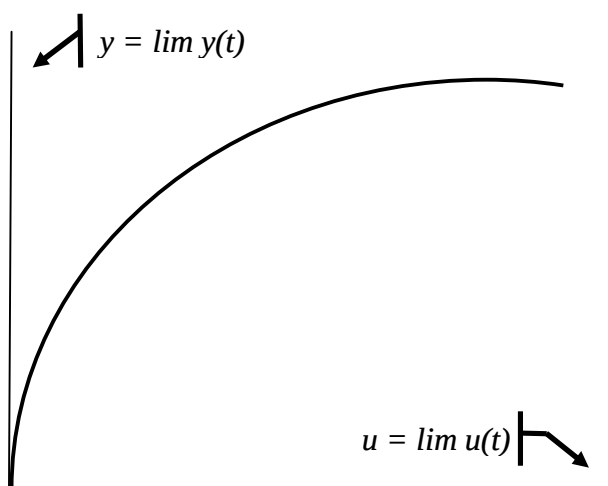
2 Statické a dynamické vlastnosti regulačních členů:

Pro posuzování vlastností regulačních obvodů i jednotlivých regulačních členů slouží dvě základní kritéria. Budeme se zabývat regulačními členy s přenosem $G(s)$ s jednou vstupní veličinou $u(t)$ a jednou výstupní veličinou $y(t)$. Pokud posuzujeme vlastnosti regulačních členů v ustáleném stavu, hovoříme o statických vlastnostech. Druhým způsobem je vyšetřování regulačních členů při změnách vstupních i výstupních veličin, pak hovoříme o dynamických vlastnostech.



Odr. 2.1 Schéma regulačního systému

Statické vlastnosti se nejčastěji vyjadřují statickou charakteristikou. Statická charakteristika vyjadřuje vztah mezi vstupní veličinou v ustáleném stavu a výstupní veličinou v ustáleném stavu. Při snímání statické charakteristiky musíme vždy počkat na ustálení, jak vstupní, tak výstupní veličiny, tzn. musí proběhnout tzv. přechodový děj. Teprve poté lze hodnoty vstupní a výstupní veličiny odečíst a vynést je do grafu. Znalost statických charakteristik systémů usnadňuje linearizaci a umožňuje posoudit použitelnost lineárního modelu [ŠVARC I, ŠEDA M, VÍTEČKOVÁ M. *Automatické řízení*. 2007].



Odr. 2.2 Příklad statické charakteristiky

V regulaci je však důležité chování regulačního členu v průběhu přechodového děje, proto se budeme dále zajímat o dynamické vlastnosti regulačních členů a regulačních systémů. Dynamické vlastnosti lze popsat dvěma různými způsoby:

- vnitřní popis systému
- vnější popis systému

Vnitřní popis systému je popis jeho stavově přechodové struktury. Vnitřní popis systému je vyjádření dynamických vlastností systému vztahy mezi vstupem, stavem systému a výstupem. Je známo, že výstupní veličina nezávisí pouze na vstupní veličině, ale také na stavu systému na počátku děje. Tyto počáteční podmínky tvoří přibližně počáteční stav děje systému. Pro zavedení vnitřního popisu systému musíme znát jeho strukturu a veškeré fyzikální děje, které v něm probíhají. Vnitřní popis systému se vyjadřuje stavovými rovnicemi ve stavovém prostoru, je to nejdokonalejší popis systému.

Vnější popis systému vyjadřuje dynamické vlastnosti systému závislostí mezi vstupní a výstupní veličinou. Při tomto popisu systému nás nezajímá ani struktura, ani děje uvnitř systému, systém zkoumáme pouze podle reakcí výstupní veličiny na vstupu. I přes jistou omezenost se používá vnější popis více než dokonalejší popis vnitřní a to hlavně proto, že vnější popis můžeme získat rozбором experimentálně naměřených průběhů vstupních a výstupních veličin. Dalšími výhodami jsou jednoduchost a názornost [ŠVARC Ivan, ŠEDA Miloš, VÍTEČKOVÁ Miluše. *Automatické řízení*. 2007].

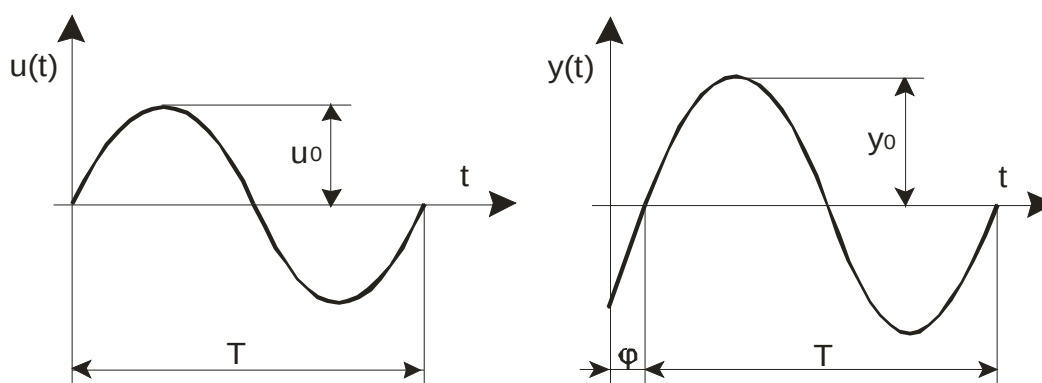
Způsobů vnějšího popisu systému je několik, všemi lze systém jednoznačně popsat a většinou lze z jednoho popisu odvodit další.

Způsoby vnějšího popisu systému:

- diferenciální rovnice systému
- přenos
- impulsní funkce a charakteristika
- přechodová funkce a charakteristika
- frekvenční přenos a charakteristiky
- poloha pólů a nul systému

3 Frekvenční přenos spojitých systémů:

Frekvenčním (nebo také kmitočtovým) přenosem a frekvenčními metodami analýzy rozumíme posuzování systémů na odezvy harmonického signálu přivedeného na vstup systému. Nejběžnějším typem takového harmonického signálu je sinusový signál. U stabilních lineárních systémů je po odeznění přechodových jevů, odezva na tento signál opět sinusová funkce. Tento výstupní signál má stejnou frekvenci jako vstupní signál, má však zpravidla větší amplitudu a je fázově posunut - viz obr. 3.1.



Obr. 3.1 Průběh vstupního a výstupního signálu

$$u = u_0 \cdot \sin(\omega t) \qquad y = y_0 \cdot \sin(\omega t + j) \quad (3.1)$$

Vzhledem k vlastnostem vstupních a výstupních funkcí se jako výhodnější jeví vyjádření těchto funkcí v komplexním tvaru:

$$u = u_0 \cdot e^{j\omega t} \qquad y = y_0 \cdot e^{j(\omega t + j)} \quad (3.2)$$

Vyjádřením poměru těchto dvou harmonických funkcí získáme první definici frekvenčního přenosu:

$$G(j\omega) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0 \cdot e^{j(\omega t + j)}}{u_0 \cdot e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{u_0} \cdot e^{jj} \quad (3.3)$$

Jak již bylo dříve zmíněno, jednotlivé typy přenosu mezi sebou úzce souvisí. Nyní si tedy vyjádříme souvislost mezi frekvenčním přenosem a diferenciální rovnicí systému, vyjdeme přitom z obecné diferenciální rovnice:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (3.4)$$

Za vstupní a výstupní veličiny dosadíme harmonické funkce v komplexním tvaru (3.2) i příslušnými derivacemi vstupní a výstupní funkce podle času

$$\begin{array}{ll}
u = u_0 \cdot e^{j\omega t} & y = y_0 \cdot e^{j(\omega t + j)} \\
u' = u_0 j\omega \cdot e^{j\omega t} & y' = y_0 j\omega \cdot e^{j(\omega t + j)} \\
u'' = u_0 (j\omega)^2 \cdot e^{j\omega t} & y'' = y_0 (j\omega)^2 \cdot e^{j(\omega t + j)} \\
\ldots & \ldots \\
u^m = u_0 (j\omega)^m \cdot e^{j\omega t} & y^n = y_0 (j\omega)^n \cdot e^{j(\omega t + j)}
\end{array} \quad (3.5)$$

Dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned}
& a_n y_0 (j\omega)^n \cdot e^{j(\omega t + j)} + \ldots + a_1 y_0 j\omega \cdot e^{j(\omega t + j)} + a_0 y_0 \cdot e^{j(\omega t + j)} = \\
& = b_m u_0 (j\omega)^m \cdot e^{j\omega t} + \ldots + b_1 u_0 j\omega \cdot e^{j\omega t} + b_0 u_0 \cdot e^{j\omega t}
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Po vytknutí harmonických funkcí $y_0 e^{j(\omega t + j)}$ a $u_0 e^{j\omega t}$ získáme tvar:

$$y_0 \cdot e^{j(\omega t + j)} [a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 j\omega + a_0] = u_0 \cdot e^{j\omega t} [b_m (j\omega)^m + \ldots + b_1 j\omega + b_0] \quad (3.7)$$

Vyjádřením podílu vstupní a výstupní funkce z rovnice (3.7) dostaneme další tvar frekvenčního přenosu, který umožňuje převod diferenciální rovnice na frekvenční přenos a naopak:

$$G(s) = \frac{b_m (j\omega)^m + \ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (3.8)$$

Tento vztah je formálně shodný se vztahem pro přenos $G(s)$:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \quad (3.9)$$

Jak je patrné ze vztahů (3.8) a (3.9) relace mezi přenosem systému a frekvenčním přenosem téhož systému je dána formální záměnou komplexní proměnné s za $j\omega$, nebo naopak.

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} \qquad G(s) = G(j\omega) \Big|_{j\omega=s} \quad (3.10)$$

Druhá definice frekvenčního přenosu je obecnější, nepředpokládá na vstupu ani výstupu harmonickou funkci. Vychází z Fourierovy transformace, kdy můžeme podobně jako při Laplaceově transformaci získat obraz požadované funkce. Vztah mezi Fourierovou a Laplaceovou transformací je dán takto:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.11)$$

Fourierova transformace přímá i zpětná se symbolicky zapisuje tímto způsobem:

$$F(j\omega) = F\{f(t)\} \quad f(t) = F^{-1}\{F(j\omega)\} \quad (3.12)$$

kde $f(t)$ je originál funkce v časové oblasti, $F(j\omega)$ je obraz této funkce ve frekvenční oblasti, F a F^{-1} jsou operátory přímé a zpětné Fourierovy transformace. Fourierův obraz získáme z Fourierova integrálu, který dostaneme ze vztahu pro Fourierův rozvoj periodické funkce v komplexním tvaru. Aby integrál existoval, musí být funkce $f(t)$ spojitá a v intervalu $(-\infty, +\infty)$ absolutně integrovatelná. Fourierův integrál má tvar:

Frekvenční přenos systému je dán podílem Fourierova obrazu vstupního a výstupního signálu při nulových počátečních podmínkách.

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (3.14)$$

Ze vztahu mezi Fourierovou a Laplaceovou transformací je patrné, že frekvenční přenos lze získáme z přenosu pouhou formální záměnou $j\omega$ za s . Lze jej však také získat Fourierovou transformací impulsní funkce.

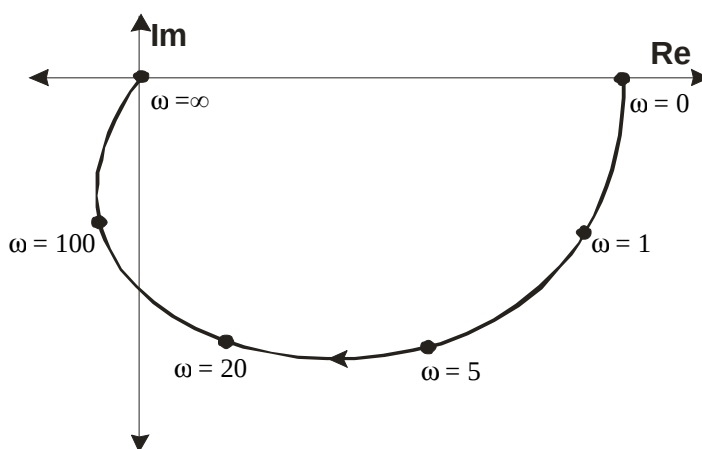
$$G(j\omega) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.15)$$

Zavedení frekvenčního přenosu má velký význam pro řešení regulačních problémů. Znázornění frekvenčního přenosu ve tvaru frekvenčních charakteristik umožňuje i pro obvody vysokých řádů řešit otázky stability a kvality regulace a používat explicitně zjištěných charakteristik [ŠVARC Ivan, ŠEDA Miloš, VÍTEČKOVÁ Miluše. *Automatické řízení*. 2007].

4 Frekvenční charakteristiky spojitých systémů

4.1 Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ v komplexní rovině, kdy za úhlovou frekvenci ω dosazujeme hodnoty 0 až ∞ . [ŠVARC Ivan, ŠEDA Miloš, VÍTEČKOVÁ Miluše. *Automatické řízení*. 2007]



4.1 Příklad frekvenční charakteristiky v komplexní rovině

Než je možné prakticky sestavit frekvenční charakteristiku je nutné upravit si frekvenční přenos $G(j\omega)$. Frekvenční přenos je možno upravit na složkový tvar komplexního čísla. Tato úprava frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ spočívá v následujícím dosazení:

$$s = j\omega = \cos j + j \sin j \quad (4.1)$$

Zpravidla je nutné přenos $G(j\omega)$ rozšířit číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. Složkový tvar komplexního čísla má pak tvar:

$$G(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + \text{Im}(j\omega) \quad (4.2)$$

Dále je možno a často se i používá vyjádření frekvenčního $G(j\omega)$ přenosu v exponenciálním tvaru komplexního čísla. Převod goniometrického tvaru na exponenciální je podle Eulerova vztahu:

$$e^{jj} = \cos j + j \sin j \quad (4.3)$$

Exponenciální tvar frekvenčního přenosu má pak tvar

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (4.4)$$

kde se k voleným hodnotám úhlového kmitočtu ω počítají příslušné hodnoty zesílení absolutního frekvenčního přenosu

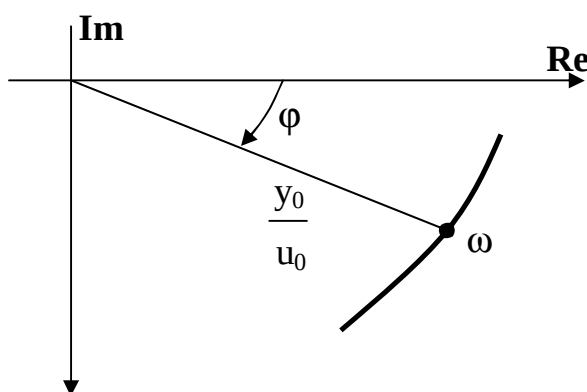
$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad (4.5)$$

a fázového posunutí

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \quad (4.6)$$

Frekvenční charakteristiku lze zkonstruovat ze známého frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ pro jakýkoliv systém. Velkou výhodou těchto charakteristik je také to, že je lze získat praktickým měřením na reálných systémech. Postup pro experimentální získávání frekvenčních charakteristik je následující:

- § Na vstup daného systému přivedeme sinusový signál $u = u_0 \sin(\omega t)$.
- § Zapisujeme výstupní signál tak dlouho, dokud se na výstupu neustálí sinusové kmit y $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$.
- § ze záznamu vstupního a výstupního signálu určíme poměr amplitud y_0/u_0 a fázový posun φ .
- § z definice frekvenčního přenosu (3.3) dostaneme bod frekvenční charakteristiky podle obr. 4.2 Vzdálenost příslušného bodu je dána poměrem y_0/u_0 a leží na přímce svírající s kladnou reálnou poloosou úhel φ .
- § Změníme hodnotu frekvence vstupního signálu a celý postup opakujeme [ŠVARC Ivan, ŠEDA Miloš, VÍTEČKOVÁ Miluše. *Automatické řízení*. 2007].

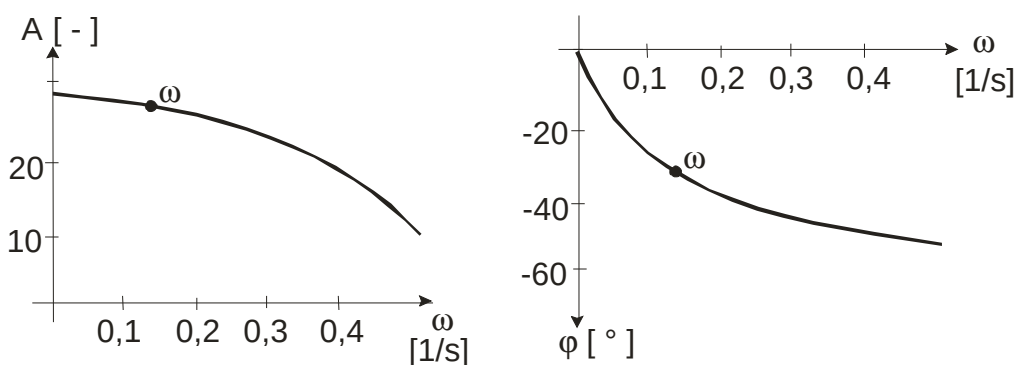


Obr. 4.2 Sestrojení bodu frekvenční charakteristiky v komplexní rovině

4.2 Amplitudová a fázová charakteristika v lineárních souřadnicích

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině je běžně označována jako amplitudovo-fázová frekvenční charakteristika. Tuto charakteristiku je možné rozdělit na dvě samostatné charakteristiky a to amplitudovou charakteristiku, která vyjadřuje závislost průběhu amplitudy $A(\omega)$ daného systému na frekvenci a fázovou charakteristiku, která udává závislost fázového posunu φ téhož systému na frekvenci ω . Danou amplitudu i fázový posun můžeme odečíst z exponenciálního tvaru rovnice (4.3) pro vyjádření frekvenčního přenosu $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{jj(\omega)}$$



Obr. 4.2 Amplitudová a fázová charakteristika v lineárních souřadnicích

Tyto charakteristiky se ale používají zřídka, protože znázorňují je úzké frekvenční pásmo. Toto pásmo by se dalo sice rozšířit, pak by ale došlo k nahuštění nejdůležitějších částí s podstatnými změnami do úzkého pásma frekvencí a odečítání by bylo značně zkresleno. Z těchto důvodů těchto omezení se začaly používat tyto charakteristiky v logaritmických souřadnicích.

4.3 Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích

Největší výhodou logaritmických frekvenčních charakteristik oproti lineárním je především jejich konstrukce, která je snadnější a poskytuje lepší přehled o průbězích amplitudy a fázového posunutí v širším pásmu frekvencí. V případě těchto charakteristik je na vodorovnou osu vynášena úhlová frekvence v logaritmickém měřítku, čímž je dosaženo zobrazení onoho většího pásma frekvencí ω .

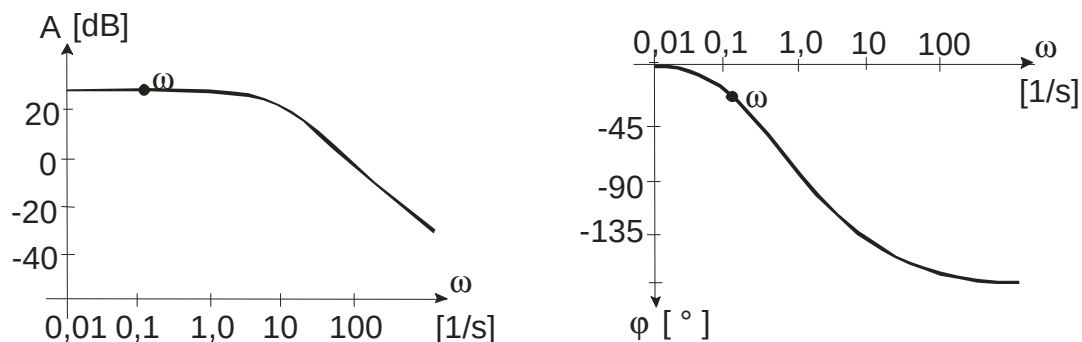
Na svislou osu se v případě amplitudové frekvenční charakteristiky vynáší amplituda frekvenčního přenosu $G(j\omega)$:

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{y_0}{u_0} e^{jj} \right| = \frac{y_0}{u_0} \quad (4.6)$$

nikoli však v bezrozměrných jednotkách, ale v poměrných jednotkách decibel [dB], což je dvacetinásobek dekadického logaritmu zesílení. Amplituda je v podstatě podíl amplitud vstupního a výstupního a vstupního signálu, zesílení je tedy:

$$A[\text{dB}] = 20 \cdot \log A[-] = 20 \cdot \log \frac{y_0}{u_0} \quad (4.7)$$

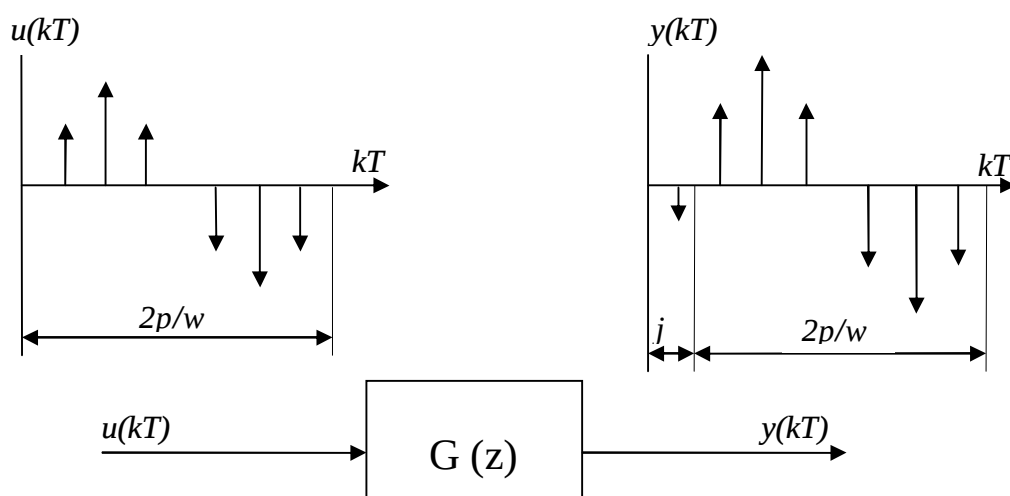
U fázových frekvenčních charakteristik se na svislou osu vynáší fázový posun ve stupních nebo v radiánech a to v lineárním měřítku [ŠVARC Ivan, ŠEDA Miloš, VÍTEČKOVÁ Miluše. *Automatické řízení*. 2007].



Obr. 4.3 Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích

5 Frekvenční přenos diskrétních systémů

Diskrétní systémy jsou takové systémy, u nichž alespoň jeden prvek pracuje v diskrétním režimu. Takové prvky nepracují se spojitými signály, ale ke své činnosti potřebují diskrétní hodnoty signálů. Původně spojitý signál je nutné „navzorkovat“ v určitých (nejlépe rovnoměrných) časových okamžicích, takto upravený signál má pak tvar posloupnosti diskrétních impulzů. Pak se tato posloupnost diskrétních hodnot může přivést na vstupy diskrétně pracujících prvků (např. číslicových počítačů).



Obr. 5.1 Průběh vstupního a výstupního diskrétního signálu u diskrétního prvku

Frekvenční přenos jednorozměrných diskrétních systémů je označován symbolicky $G(j\omega T)$ a je definován vztahem:

$$G(j\omega T) = \frac{Y(j\omega T)}{U(j\omega T)} \quad (5.1)$$

kde výraz $Y(j\omega T)$ a $U(j\omega T)$ představují symbolické zobrazení diskrétní harmonické vstupní a výstupní funkce systému. Diskrétní frekvenční přenos je komplexní funkce bezrozměrné frekvence $\omega T = \omega_t$, kde ωT představuje normovanou frekvenci. Diskrétní frekvenční přenos lze popsat následujícími vztahy:

$$G(j\omega T) = P(\omega T) + jQ(\omega T) \quad (5.2)$$

kde vystupuje sudá funkce:

$$P(\omega T) = P(-\omega T) = \text{Re}[G(j\omega T)] \quad (5.3)$$

a lichá funkce:

$$-Q(\omega T) = Q(-\omega T) = \text{Im}[G(j\omega T)] \quad (5.4)$$

Ze Z-přenosu $G(z)$ lze získat příslušný diskrétní frekvenční přenos $G(j\omega T)$ dosazením:

$$z = e^{j\omega T} \quad (5.5)$$

frekvenční přenos lze potom také vyjadřuje ve tvaru:

$$G(j\omega T) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} \quad (5.6)$$

Na rozdíl od přenosu spojitých systémů je diskrétní frekvenční přenos periodickou funkcí frekvence ωT s periodou 2π :

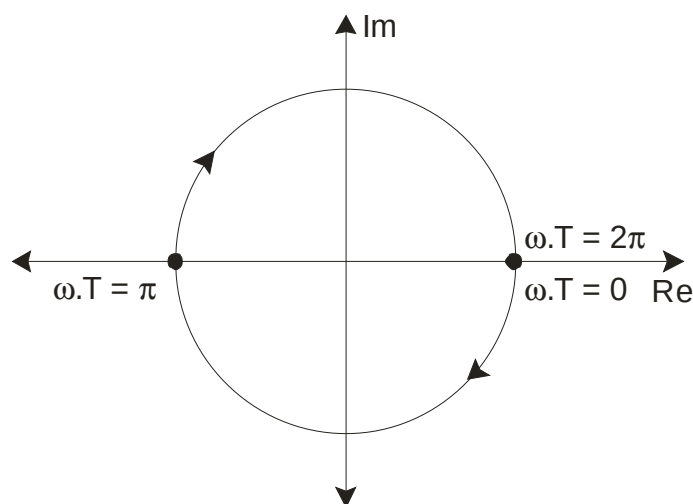
$$G(j\omega T) = G[j(\omega T + 2k\pi)] \quad (5.7)$$

6 Frekvenční charakteristiky diskrétních systémů

Frekvenční přenos diskrétních systémů je na rozdíl od spojitých systémů periodická funkce proměnné ωT s periodou 2π .

$$G(j\omega T) = G[(j\omega T + 2k\pi)] \quad (6.1)$$

takže dosazením $\omega T + 2k\pi$ místo ωT do $G(j\omega T)$ nutně dostaneme vždy totožné výsledky. Za proměnnou ωT dosazujeme tedy hodnoty v intervalu $\omega T = \langle 0, 2\pi \rangle$. Dále by se průběh frekvenční charakteristiky opakoval, neboť je to periodická funkce, frekvenční charakteristika je tedy souměrná podle reálné osy. Vzhledem k této souměrnosti a k periodičnosti $G(j\omega T)$ ji stačí počítat a znázorňovat charakteristiky v rozsahu $\omega T = \langle 0, \pi \rangle$ viz obrázek 6.1.



Obr. 6.1 Souměrnost frekvenční charakteristiky.

Důležitější však je si uvědomit, co vlastně znamenají hodnoty $\omega T = \pi$, 2π a eventuálně hodnoty vyšší. Při $\omega T = \pi$ má totiž vstupní sinusová funkce takovou frekvenci, že na její periodu připadají jen dva členy vstupní posloupnosti (obrázek 6.1). Při $\omega T = 2\pi$ už dokonce jen jediný. Frekvencím $\omega T > 2\pi$ odpovídá situace, kdy na periodu kmitů o této frekvenci připadá méně než jeden člen posloupnosti, takže tato posloupnost nemůže prakticky tyto kmity vůbec reprezentovat. Z toho plyne, že proměnnou ωT má smysl z praktického hlediska uvažovat pouze na intervalu $\omega T = \langle 0, \pi \rangle$, neboť pro $\omega T = \langle \pi, 2\pi \rangle$ je vyjádření kmitů posloupnosti pochybné pro přílišnou řídkost vzorků [KALVODA Petr. 2004].

6.1 Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině, též amplitudo-fázová frekvenční charakteristika $G(j\omega T)$ se využívá např. k návrhu číslicových korekčních členů – regulátorů frekvenčními metodami, známými ze spojitě regulace, jako je například dosažení požadované fázové nebo modulové bezpečnosti ve stabilitě.

Pro sestrojení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině vycházíme stejně jako v případě spojitých charakteristik buď z frekvenčního přenosu $G(j\omega T)$ vyjádřeného ve složkovém tvaru komplexního čísla

$$G(j\omega T) = \operatorname{Re}[G(j\omega T)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega T)] \quad (6.2)$$

kde k voleným hodnotám $\omega T = \langle 0, \pi \rangle$ počítáme reálnou a imaginární složku diskrétního frekvenčního přenosu.

Nebo můžeme rovněž využít exponenciální tvar komplexního čísla frekvenčního přenosu $G(j\omega T)$

$$G(j\omega T) = A(\omega T) \cdot e^{jj(\omega T)} \quad (6.3)$$

Zesílení $A(\omega T)$ pak získáme z frekvenčního přenosu $G(j\omega T)$ takto:

$$A(\omega T) = |G(j\omega T)| \quad (6.4)$$

a fázové posunutí $\varphi(\omega T)$

$$j(\omega T) = \arctg \frac{\operatorname{Im}[G(j\omega T)]}{\operatorname{Re}[G(j\omega T)]} \quad (6.5)$$

Hodnoty reálné a imaginární složky pro různé hodnoty ωT z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ vyneseme do grafu a získáme frekvenční charakteristiku v komplexní rovině pro daný diskretní systém.

6.2 Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika v lineárních souřadnicích

Stejně jako u spojitých systémů můžeme i diskretní amplitudovo-fázovou frekvenční charakteristiku rozdělit na dvě samostatné charakteristiky.

Amplitudová frekvenční charakteristika slouží k posuzování chování diskretního systému vzhledem k harmonickým složkám vstupního signálu, dále např. k návrhu číslicových filtrů. Sestrojení amplitudové charakteristiky lze provést ze vztahu (najít) pro výpočet amplitudy frekvenčního přenosu

$$A(wT) = |G(jwT)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \quad (6.6)$$

Fázovou frekvenční charakteristiku zkonstruujeme podle vztahu pro výpočet fázového posunutí frekvenčního přenosu (najít):

$$j(wT) = \arg G(jwT) = \arctg \frac{\text{Im}[G(jwT)]}{\text{Re}[G(jwT)]} \quad (6.7)$$

Hodnoty amplitudy zesílení a fázového posunutí v závislosti na dané frekvenci pak vynášíme do samostatných grafů s lineárním měřítkem na obou osách.

6.3 Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích

I u amplitudových a fázových charakteristik diskrétních systémů v lineárních souřadnicích se setkáváme se stejnými omezeními jako v případě spojitých systémů, jsou to hlavně problémy spojené se zobrazením jen velmi omezeného pásma frekvencí. Stejně jako u spojitých systémů by zobrazení širšího pásma frekvencí vedlo ke zkreslení výsledných charakteristik v důsledku příliš hustého měřítka. Proto se s výhodou používá častěji zobrazení amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky v logaritmických souřadnicích.

K sestrojení amplitudové a fázové charakteristiky v logaritmických souřadnicích se používá transformační vztah z bilineární transformace:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad w = \frac{z-1}{z+1} \quad (6.8)$$

Dosazením vztahu

$$z = e^{jwT} = \cos wT + j \sin wT \quad (6.9)$$

do rovnice (6.8) dostaneme vztah pro převod jednotkové kružnice z-roviny na celou levou komplexní polorovinu

$$w = \frac{e^{jwT} - 1}{e^{jwT} + 1} = jtg \frac{wT}{2} = j\Omega \quad (6.10)$$

což znamená, že jednotková kružnice z-roviny se zobrazí na imaginární osu w-roviny a vnitřek jednotkové kružnice se zobrazí do levé komplexní poloviny w-roviny. Proměnná Ω ve vztahu (6.10), je označována jako tzv. relativní transformovaná frekvence:

$$\Omega = tg \frac{wT}{2} \quad (6.11)$$

Současně se také frekvenční rozsah reálných frekvencí $\omega T = \langle 0, \pi \rangle$ transformuje na frekvenční rozsah transformovaných frekvencí $\Omega = \langle 0, \infty \rangle$.

Logaritmická amplitudová a fázová charakteristika se sestrojí na základě frekvenčního přenosu, který získáme ze z přenosu [KALVODA Petr. 2004]

$$G(j\Omega) = G(z) \bigg|_{z = \frac{1+j\Omega}{1-j\Omega}}. \quad (6.12)$$

Na vodorovnou osu amplitudové i fázové charakteristiky vynášíme hodnoty již zmiňované transformované frekvence Ω , logaritmickém měřítku. Na svislou osu amplitudové frekvenční charakteristiky vynášíme v lineárním měřítku absolutní hodnotu frekvenčního přenosu $G(j\Omega)$ v decibelech, což jsou jednotky definované jako dvacetinásobek dekadického logaritmu poměru obrazu vstupního a výstupního signálu:

$$|G(j\Omega)|_{dB} = 20 \log |G(j\Omega)| \quad (6.13)$$

Podobně jako u spojitých systémů je rovněž možné použít asymptot pro vyjádření logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky. Skutečný průběh se přímkám asymptoticky blíží. Postup sestrojení těchto asymptot je shodný jako v případě spojitých systémů, pouze místo úhlové frekvence ω se zde používá transformovaná frekvence Ω .

V Případě fázové frekvenční charakteristiky vynášíme na svislou osu hodnoty fázového posunutí $\varphi(\Omega)$ v lineárním měřítku.

7 Program pro konstrukci frekvenčních charakteristik

Součástí této diplomové práce je program pro výpočet a vykreslení frekvenčních charakteristik diskrétních systémů v komplexní rovině a amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky v lineárních souřadnicích. Pro výpočet hodnot frekvenčních charakteristik program využívá matematické teorie a algoritmy popsané v předchozích kapitolách.

Program je vytvořen v prostředí programovacího jazyka Delphi 7 od firmy Borlanda a je určen pro tvorbu aplikací na platformě MS Windows. Tento programovací jazyk umožňuje vizuální návrh grafického uživatelského rozhraní, na jehož základě je automaticky vytvářena kostra zdrojového kódu. Delphi jsou jazykem objektově orientovaným. Objekt je v tomto smyslu chápán jako soubor určitých vlastností (data), který je také schopen vykonávat určitou činnost. Je možné vytvářet instance těchto objektů a s těmi různě manipulovat.

Program vytvořený k této práci se nazývá CharDS a je umístěn na přiloženém CD-ROMu. Pro běh programu je nutný operační systém Windows 95/98/NT/XP nebo Linux.

7.1 Popis programu CharDS

Program CharDS slouží k výpočtu hodnot a modelování frekvenčních charakteristik diskrétních systémů. Výpočty jsou prováděny pro konstrukci frekvenčních charakteristik v komplexní rovině, nebo pro amplitudovou a fázovou frekvenční charakteristiku v lineárních souřadnicích. Zadání počítaného diskrétního systému se provádí ve tvaru z-přenosu s kladným posunutím podle vztahu (3.9)

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}.$$

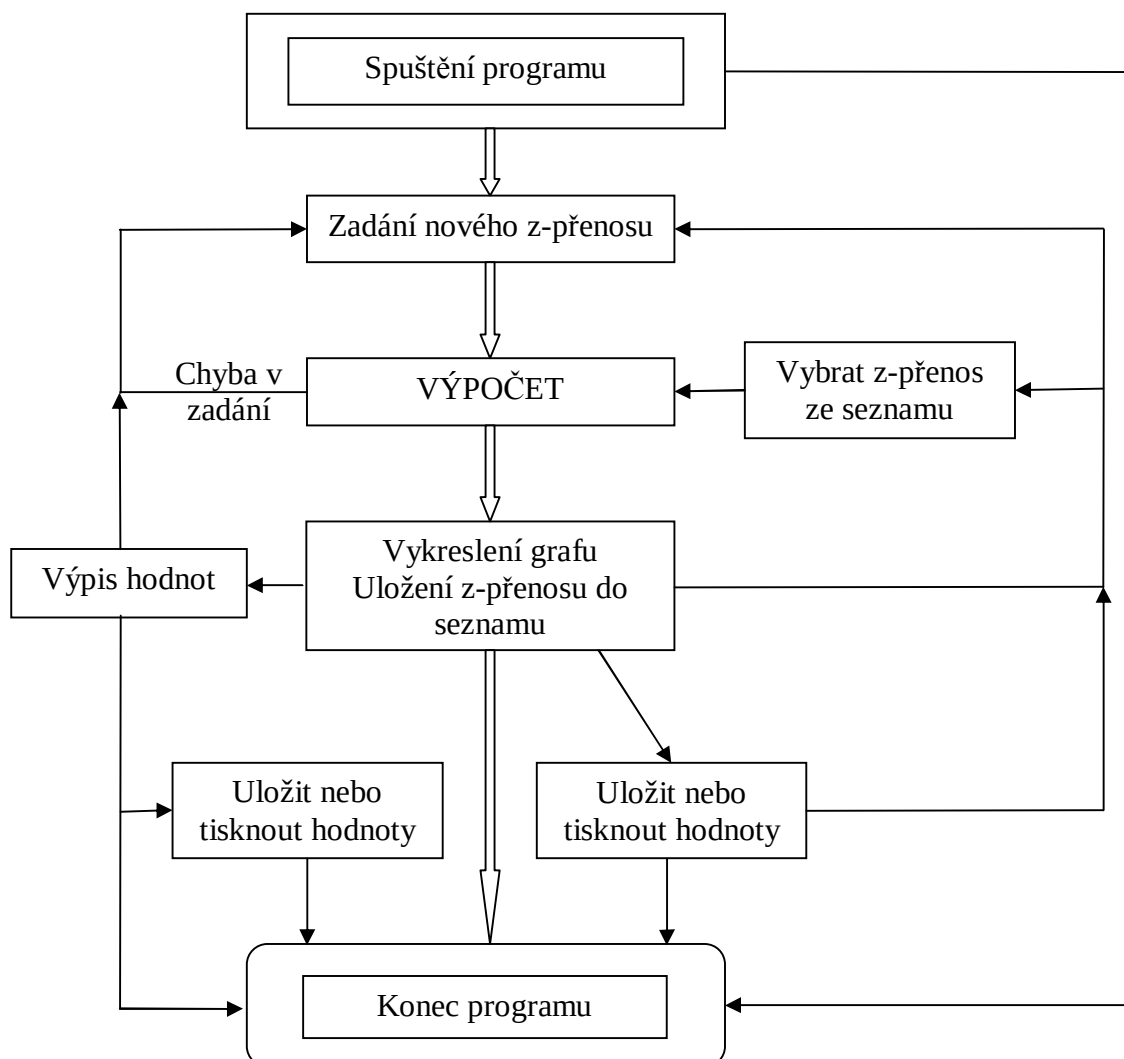
Konstrukce programu umožňuje zadávat polynomy v čitateli i jmenovateli maximálně 5. řádu. Vývojové prostředí Delphi totiž neumožňuje výpočty v oblasti komplexně sdružených čísel, jednotlivé výpočty jsou tedy prováděny pomocí naprogramovaných procedur obecných vzorců pro výpočet daného z-přenosu. Po zadání koeficientů program zkontroluje jeho fyzikální realizovatelnost, je-li přenos zadán správně, proběhne výpočet, jinak je uživatel upozorněn na chybu v zadání. Každý výpočet pro sestavení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině zde vychází z frekvenčního přenosu $G(j\omega T)$ vyjádřeného ve složkovém tvaru podle vztahu (6.2)

$$G(j\omega T) = \operatorname{Re}[G(j\omega T)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega T)].$$

Hodnoty reálných a imaginárních složek jsou počítány pro rozsah frekvencí 0 až π . Z těchto hodnot jsou také v požadovaných případech počítány hodnoty amplitudy a fázového posunutí. Každý nově zadáný z-přenos je uložen jako nová instance do seznamu z-přenosů, ze kterého

lze kdykoliv znovu vypočítat a např. porovnat s dalšími přenosy. Vykreslené grafy a vypočtené hodnoty lze ukládat do souborů a je možné je i tisknout.

7.2 Schéma programu CharDS



7.3 Testování programu CharDS

Příklad 1 ověření správné funkce a správnosti vypočtených hodnot programu CharDS na zadaném přenosu.

$$G(z) = \frac{1}{z^2 - 0,8z}$$

Řešení: nejprve si převedeme zadaný z-přenos na frekvenční přenos v goniometrickém tvaru:

$$G(j\omega T) = \frac{1}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T))^2 - 0,8(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T))}$$

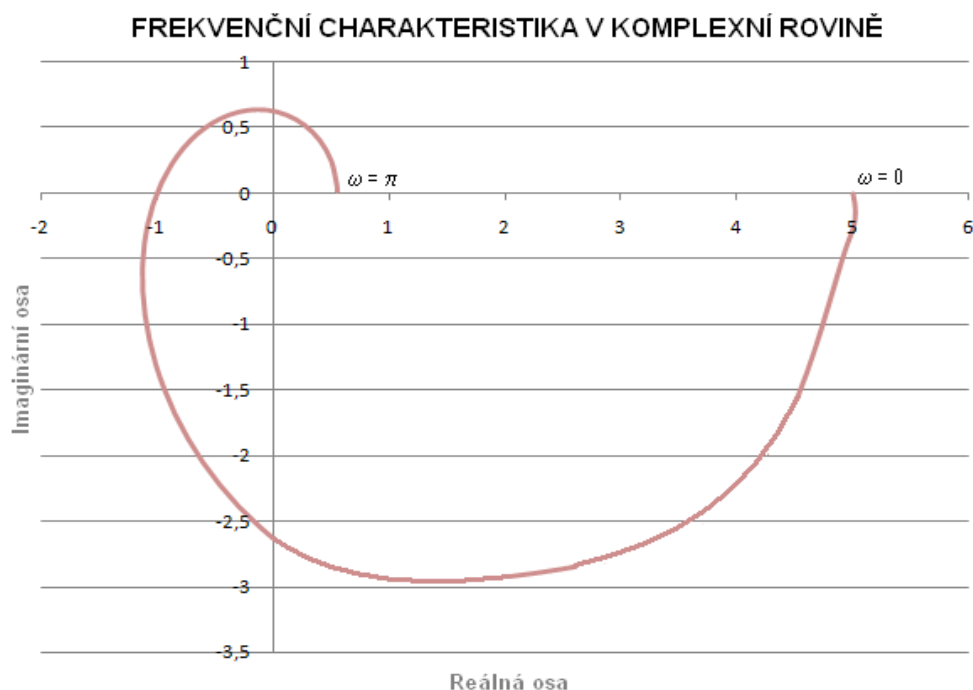
Po vynásobení frekvenčního přenosu číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli rozdělíme přenos na reálnou a imaginární část:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(2 \cdot \omega T) - 0,8 \cos(\omega T)}{1 - 1,6 \cos(\omega T) + 0,64}$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(2 \cdot \omega T) + 0,8 \sin(\omega T)}{1 - 1,6 \cos(\omega T) + 0,64}$$

Do takto upravených vzorců postupně dosadíme několik hodnot ω z intervalu $(0-\pi)$, pro které spočítáme hodnoty reálné a imaginární složky zadaného frekvenčního přenosu, ze kterých následně sestrojíme frekvenční charakteristiku.

ω	Re	Im
0	5	0
0,21	1,74	-3,21
0,46	-0,54	-2,13
0,71	-1,07	-1,10
0,96	-1,11	-0,39
1,21	-0,96	0,08
1,46	-0,73	0,39
1,71	-0,46	0,57
1,96	-0,18	0,64
2,21	0,07	0,61
2,46	0,29	0,51
2,71	0,45	0,35
2,96	0,54	0,16
3,14	0,56	0

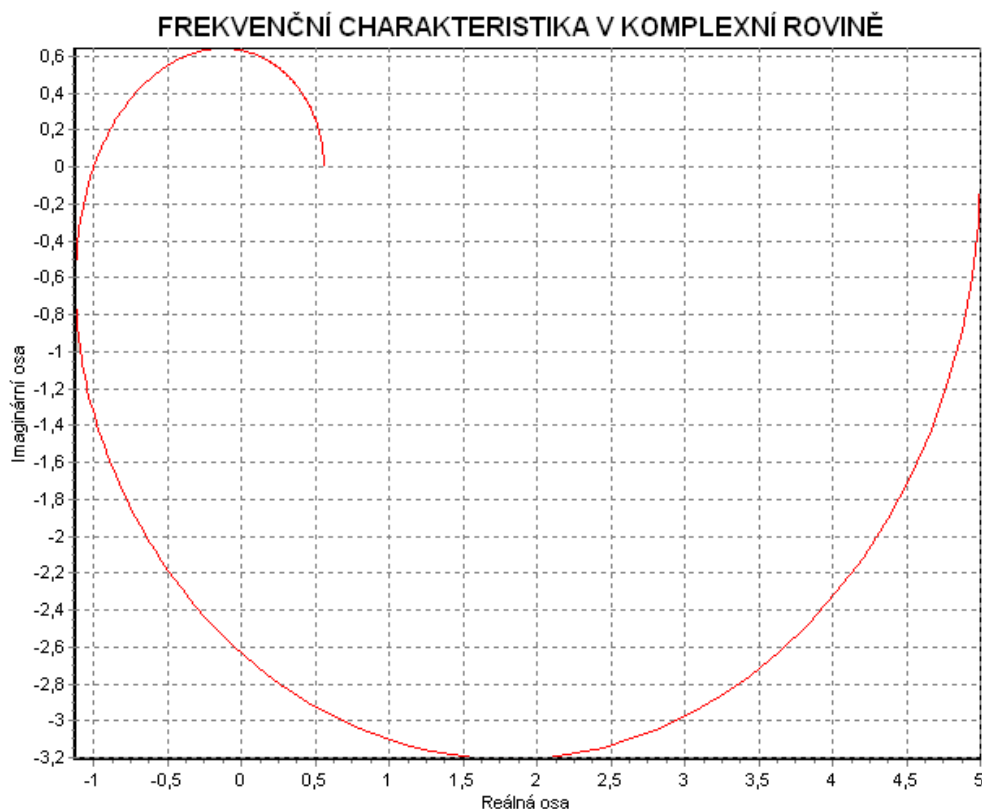


Nyní zadáme hodnoty koeficientů ze zadání příkladu do programu CharDS, provedeme výpočet a námi vypočítané hodnoty můžeme srovnat s hodnotami vypočtené programem.

$$G(z) = \frac{1}{-0,8z^{-1} + 1z^2}$$

frekvence = 0	Re = 5	Im = 0
frekvence = 0,21	Re = 1,7387	Im = -3,2067
frekvence = 0,46	Re = -0,538	Im = -2,1347
frekvence = 0,71	Re = -1,0699	Im = -1,095
frekvence = 0,96	Re = -1,1087	Im = -0,3935
frekvence = 1,21	Re = -0,9608	Im = 0,0818
frekvence = 1,46	Re = -0,7271	Im = 0,3932
frekvence = 1,71	Re = -0,4567	Im = 0,5731
frekvence = 1,96	Re = -0,1817	Im = 0,6418
frekvence = 2,21	Re = 0,0728	Im = 0,6165
frekvence = 2,46	Re = 0,287	Im = 0,5143
frekvence = 2,71	Re = 0,445	Im = 0,3539
frekvence = 2,96	Re = 0,5357	Im = 0,1555
frekvence = 3,14	Re = 0,5556	Im = 0,0014

Už z vypočtených hodnot je patrné, že i tvary frekvenční charakteristiky musí být shodné.



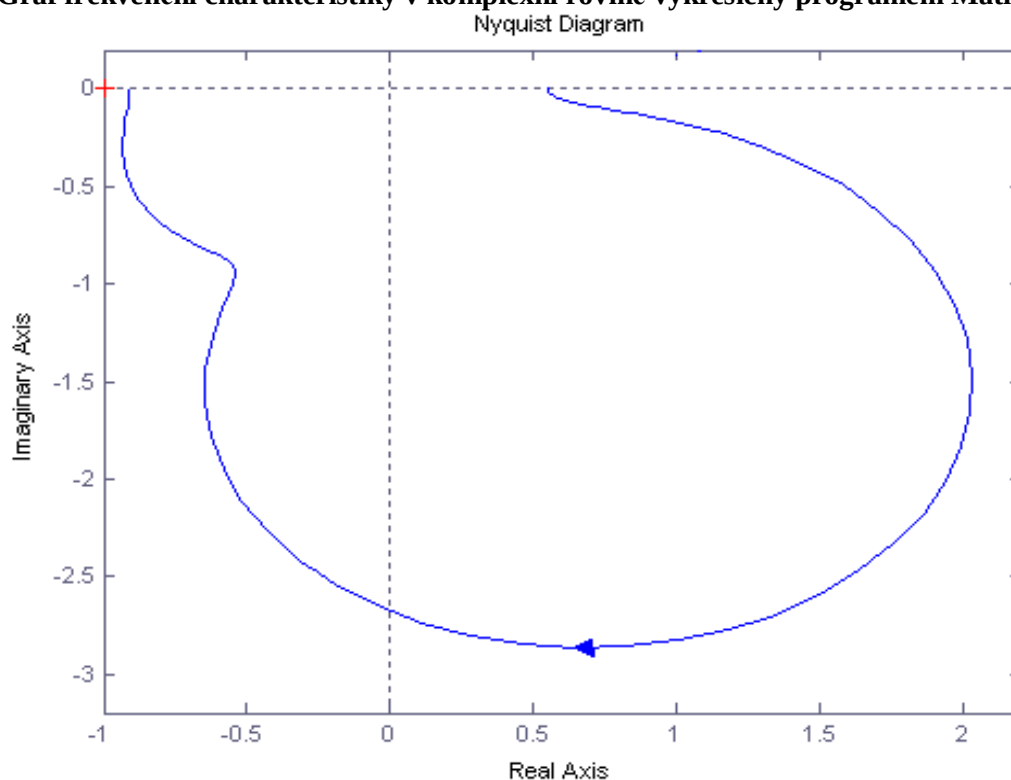
Příklad 2 porovnání výsledků vypočítaných programem Matlab s výsledky dosaženými programem CharDS pro zadaný z-přenos.

$$G(z) = \frac{z^3 + 0,2z^2 + 0,3z + 0,1}{z^4 + 0,4z^3 + 0,8z^2 + 0,5z + 0,2}$$

Hodnoty reálné a imaginární složky zadaného z-přenosu vypočítané programem Matlab:

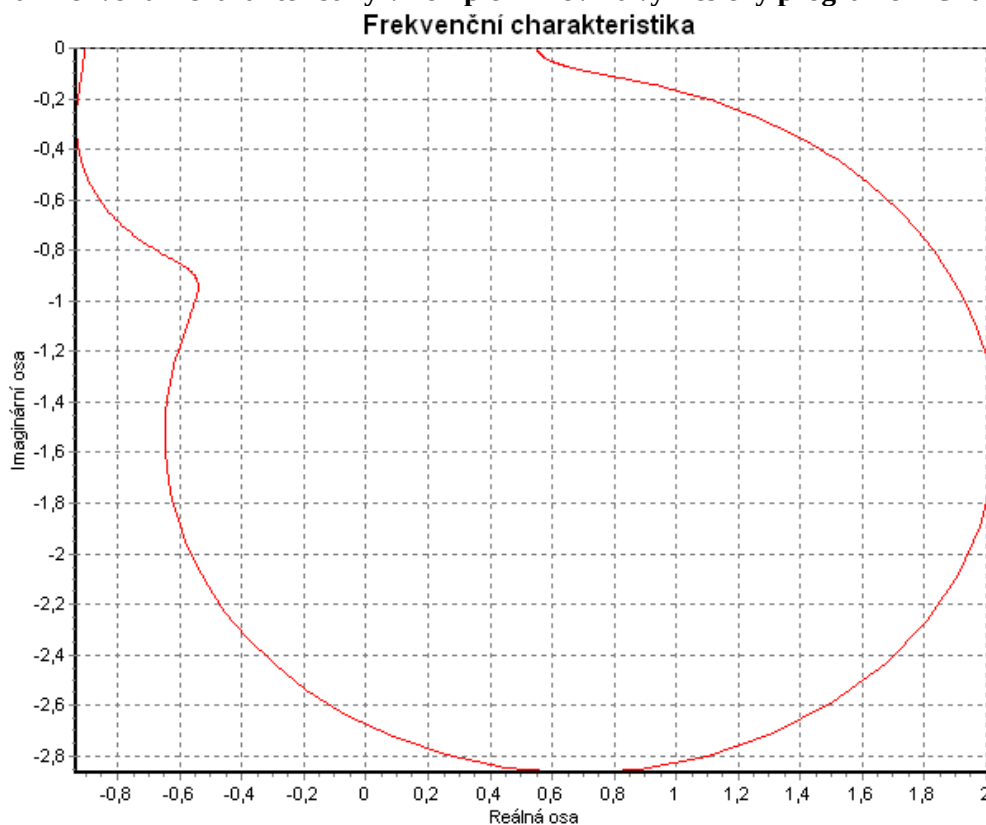
Frekvence	RE	IM
0.0000	0.5517	-0.0000
1.1215	0.5541	-0.0127
2.6343	0.5655	-0.0298
4.1972	0.5890	-0.0478
5.7256	0.6284	-0.0661
7.2272	0.6922	-0.0861
8.4411	0.7755	-0.1068
10.2501	1.0114	-0.1709
11.7086	1.4391	-0.3824
13.0552	2.0313	-1.4683
14.6005	-0.1927	-2.5385
15.6709	-0.6461	-1.6098
17.4814	-0.5659	-1.0552
19.0277	-0.5442	-0.9208
20.3940	-0.5884	-0.8622
22.0241	-0.6947	-0.7871
23.4837	-0.8045	-0.6808
25.8954	-0.9207	-0.4352
26.4165	-0.9298	-0.3807
29.5882	-0.9180	-0.1122
31.1703	-0.9093	-0.0144
31.4159	-0.9091	-0.0000

Graf frekvenční charakteristiky v komplexní rovině vykreslený programem Matlab



Hodnoty reálné a imaginární složky vypočítané programem CharDS:

frekvence = 0	Re = 0,5517	Im = 0
frekvence = 0,11	Re = 0,554	Im = -0,0123
frekvence = 0,26	Re = 0,5651	Im = -0,0294
frekvence = 0,41	Re = 0,5871	Im = -0,0466
frekvence = 0,56	Re = 0,6243	Im = -0,0644
frekvence = 0,71	Re = 0,6855	Im = -0,0841
frekvence = 0,86	Re = 0,7896	Im = -0,1101
frekvence = 1,01	Re = 0,9834	Im = -0,1619
frekvence = 1,16	Re = 1,3944	Im = -0,352
frekvence = 1,31	Re = 2,0319	Im = -1,5413
frekvence = 1,46	Re = -0,1921	Im = -2,5388
frekvence = 1,61	Re = -0,6407	Im = -1,3973
frekvence = 1,76	Re = -0,5611	Im = -1,0393
frekvence = 1,91	Re = -0,5451	Im = -0,9169
frekvence = 2,06	Re = -0,5992	Im = -0,8541
frekvence = 2,21	Re = -0,7003	Im = -0,7825
frekvence = 2,36	Re = -0,8125	Im = -0,6704
frekvence = 2,51	Re = -0,8958	Im = -0,5203
frekvence = 2,66	Re = -0,9317	Im = -0,3618
frekvence = 2,81	Re = -0,9313	Im = -0,223
frekvence = 2,96	Re = -0,9178	Im = -0,1113
frekvence = 3,11	Re = -0,9093	Im = -0,0185
frekvence = 3,14	Re = -0,909	Im = -0,0008

Graf frekvenční charakteristiky v komplexní rovině vykreslený programem CharDS

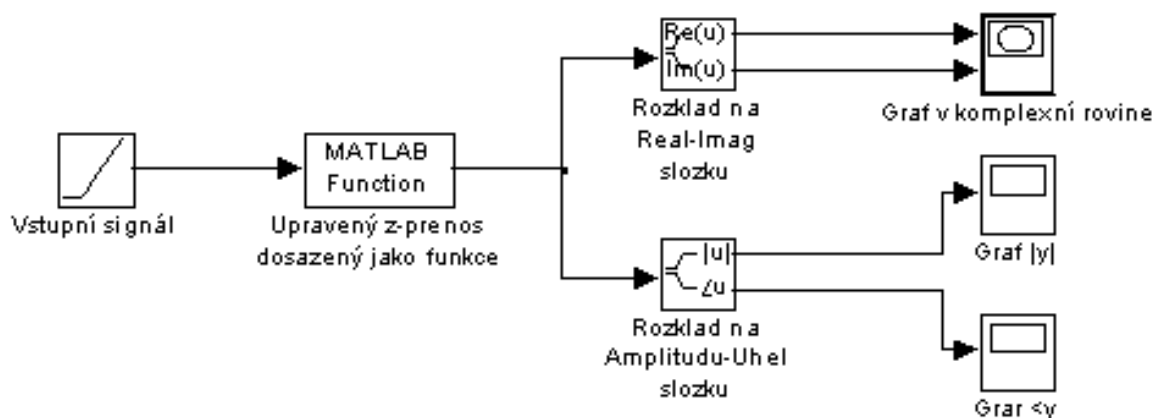
V předchozích příkladech jsme se přesvědčili o správné funkci programu CharDS. Výpočty souhlasí s teoretickými vztahy a výsledné hodnoty i grafické vyjádření grafů je srovnatelné s profesionálním nástrojem Matlab. Program CharDS lze tedy použít pro běžné konstrukce frekvenčních charakteristik.

8 Katalog frekvenčních charakteristik:

Pro konstrukci frekvenčních charakteristik byl použit program Matlab. Pro analýzu a návrh lineárních systémů jak spojitých tak diskrétních se využívá aplikační knihovna Control System Toolbox (využívají jak klasické přechodové charakteristiky, tak i popisy systémů ve stavovém prostoru). Ke konstrukci frekvenčních charakteristik byly použity následující funkce:

dnyquist	vykreslí frekvenční charakteristiku v komplexní rovině
dbode	vykreslí amplitudovou a fázovou charakteristiku jak v lineárních tak logaritmických souřadnicích

Další možností je využití nástavby Matlabu SIMULINK. Simulink je subsystém pro kompletní návrh, řešení a vizuální vyjádření výsledků dynamických systémů s dokonalým uživatelským rozhraním. Základem toolboxu Simulink jsou bloky, které reprezentují elementární dynamické systémy. Z jednotlivých elementárních bloků lze sestavit a simulovat libovolný regulační obvod. K výpočtům parametrů lze užít všech forem výrazů a volání funkcí, které Matlab umožňuje. Následující schéma znázorňuje zapojení bloků pro výpočet a vykreslení frekvenčních charakteristik diskrétních systémů.



Obr. 8.1 Schéma zapojení funkčních bloků v Simulinku

Katalog obsahuje 12 položek nejčastějších typových příkladů diskrétních systémů. Každá položka obsahuje odvozený Z-přenos, pro který je vždy namodelována frekvenční charakteristika v komplexní rovině a frekvenční-amplitudová a frekvenční-fázová charakteristika v komplexních souřadnicích. Kvůli názornosti je každá charakteristika vykreslena pro několik hodnot koeficientů.

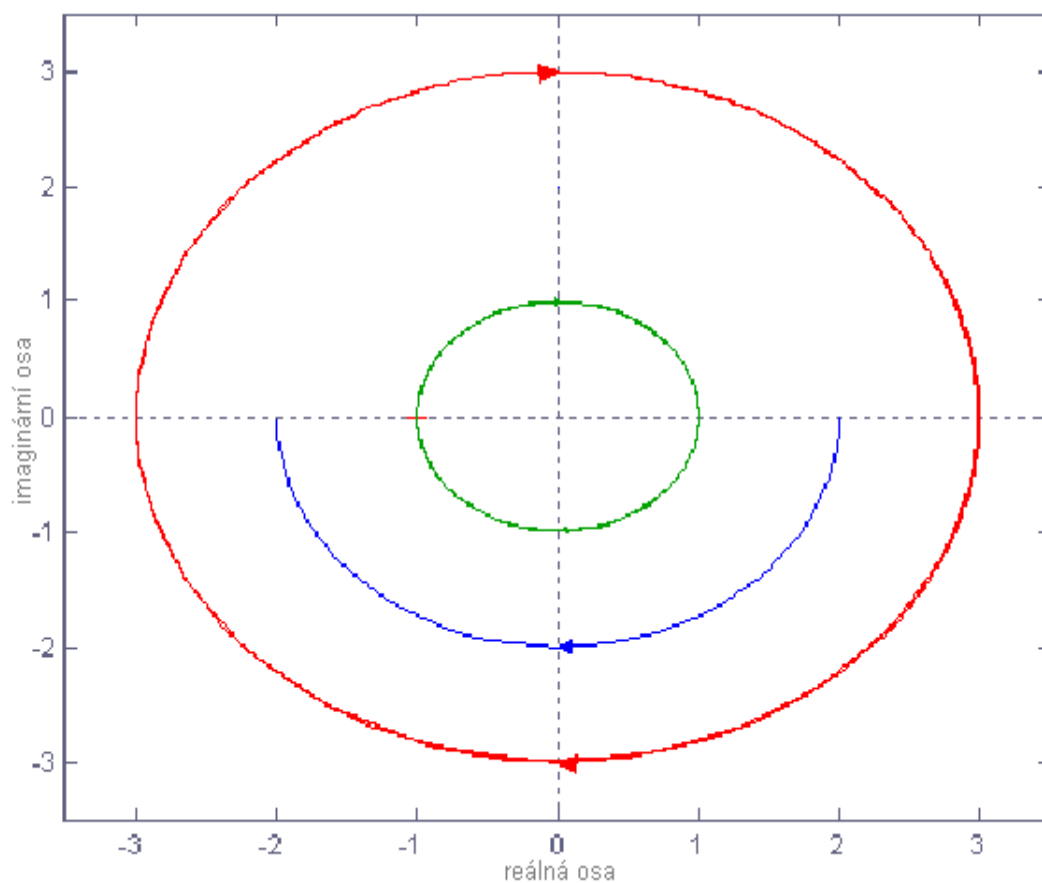
1. Přenos $G(z) = \frac{a}{z^n}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{a}{\cos(n \cdot \omega T) + j \sin(n \cdot \omega T)}$

Reálná část: $\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = a \cdot \cos(n \cdot \omega T)$

Imaginární část: $\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = -a \cdot \sin(n \cdot \omega T)$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



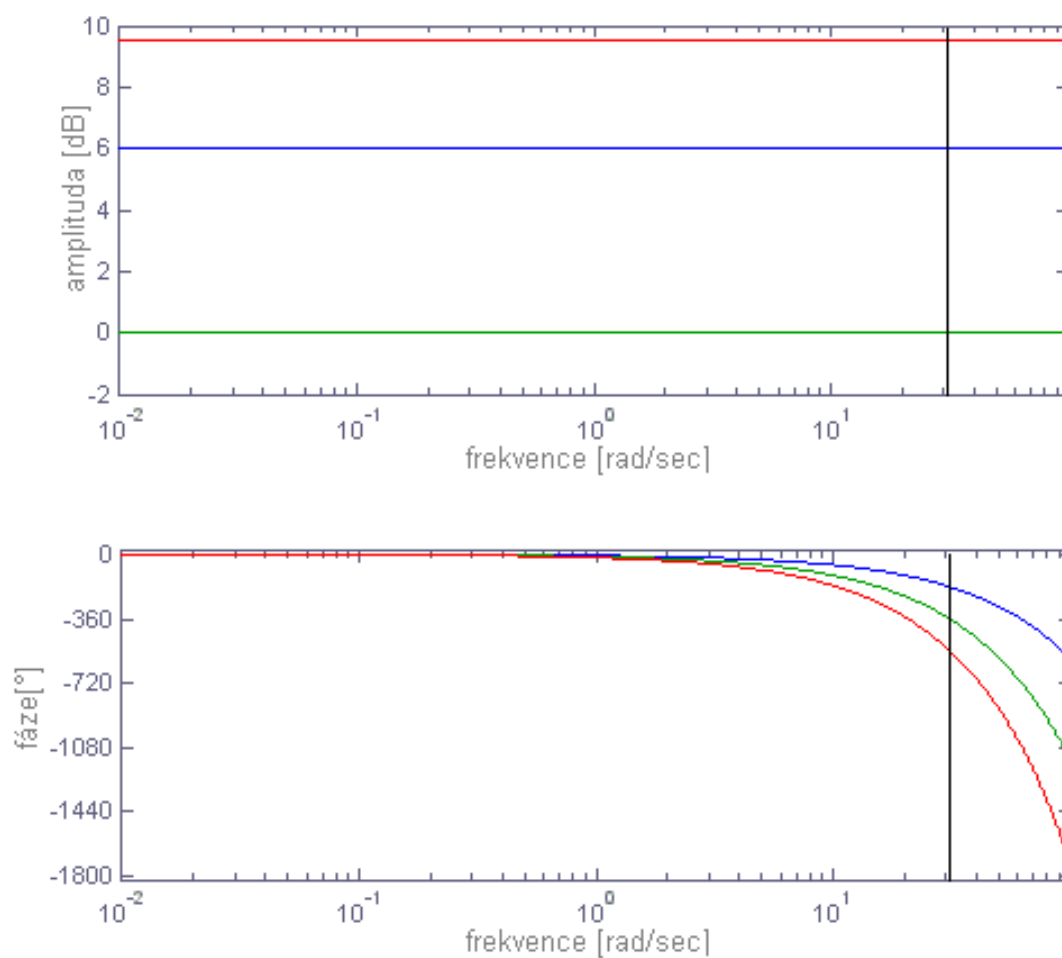
| $G(z) = \frac{2}{z}$

| $G(z) = \frac{1}{z^2}$

| $G(z) = \frac{3}{z^3}$

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :
$$G(j\Omega) = \frac{a \cdot (1 - j\Omega)^n}{(1 + j\Omega)^n}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích

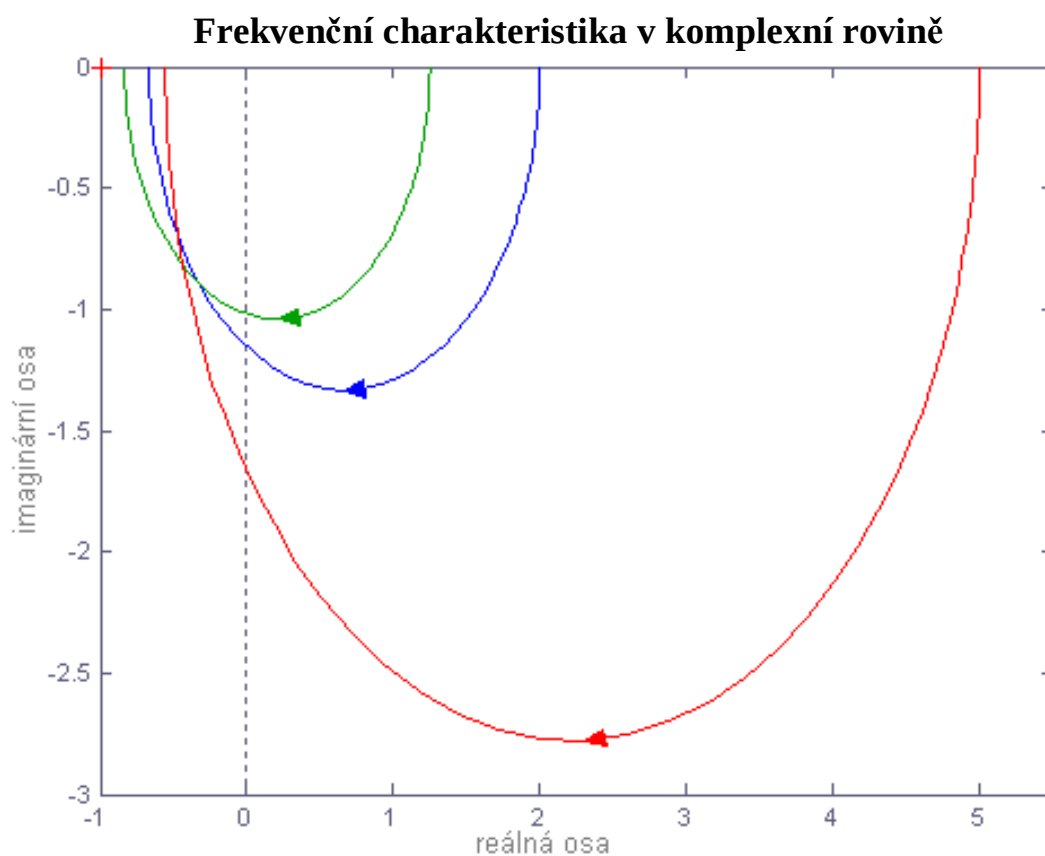


2. **Přenos** $G(z) = \frac{1}{z - a}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{1}{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a}$

Reálná část: $\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(\omega T) - a}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2}$

Imaginární část: $\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(\omega T)}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2}$



| $a = 0,5$

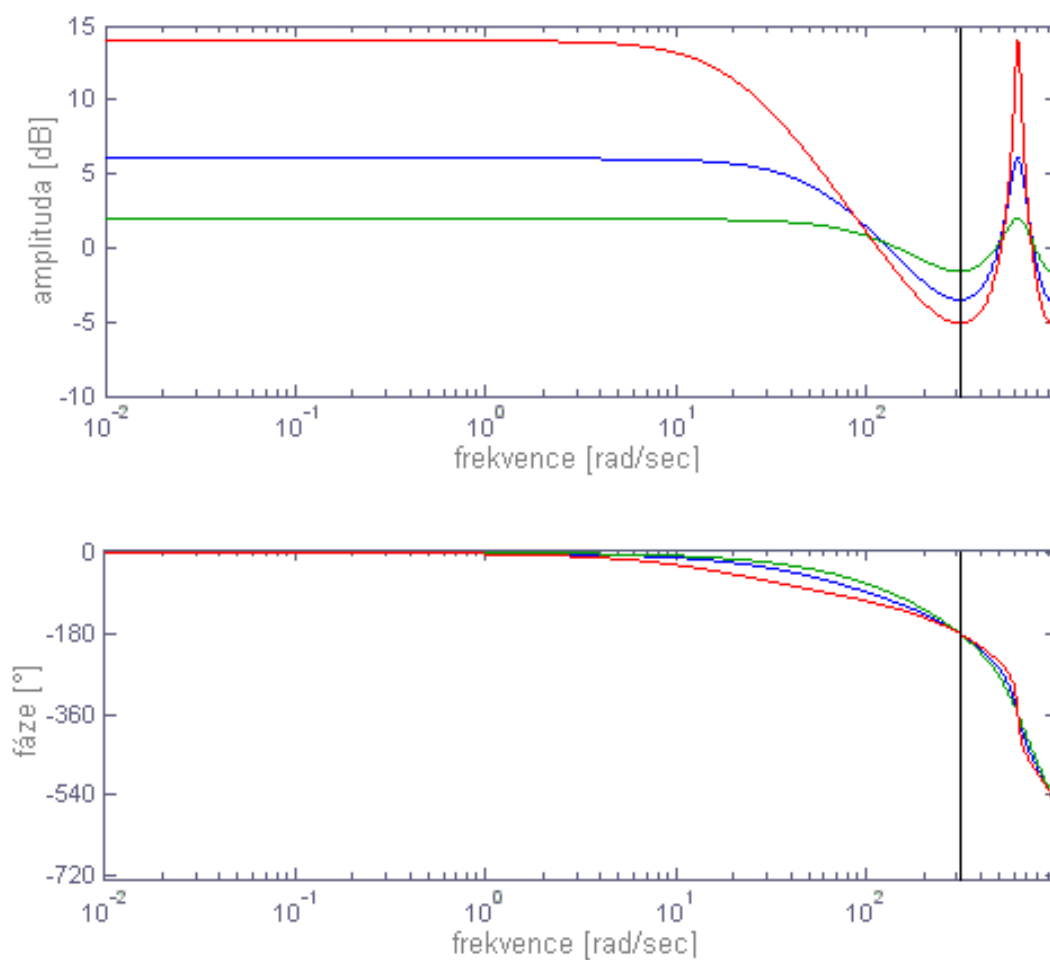
| $a = 0,8$

| $a = 0,2$

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1 - j\Omega)}{(1 - a) \cdot (1 + k \cdot j\Omega)} \quad k = \frac{1 + a}{1 - a}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



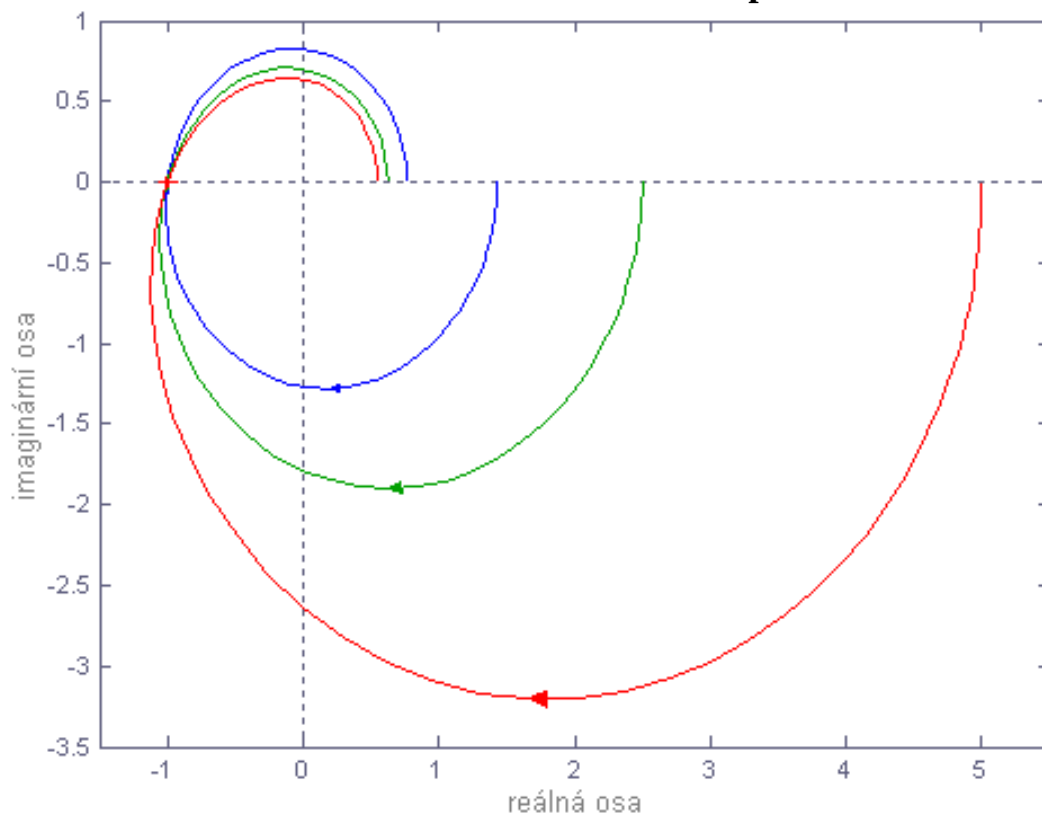
3. Přenos $G(z) = \frac{1}{z(z-a)}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{1}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a)}$

Reálná část: $\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(2 \cdot \omega T) - a \cdot \cos(\omega T)}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2}$

Imaginární část: $\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(2 \cdot \omega T) + a \cdot \sin(\omega T)}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2}$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



| $a = 0,8$

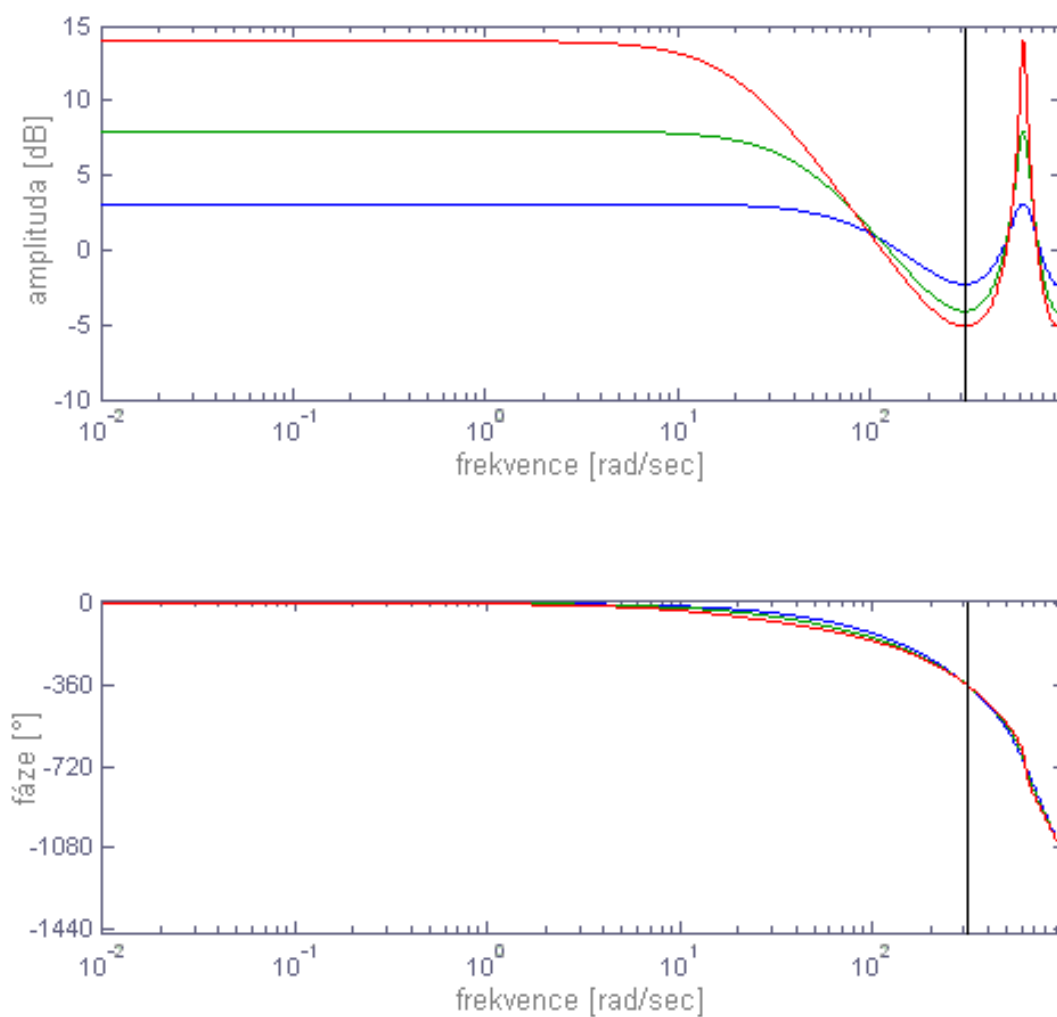
| $a = 0,3$

| $a = 0,6$

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1 - j\Omega) \cdot (1 - j\Omega)}{(1 - a) \cdot (1 + k \cdot j\Omega) \cdot (1 + j\Omega)} \quad k = \frac{1 + a}{1 - a}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



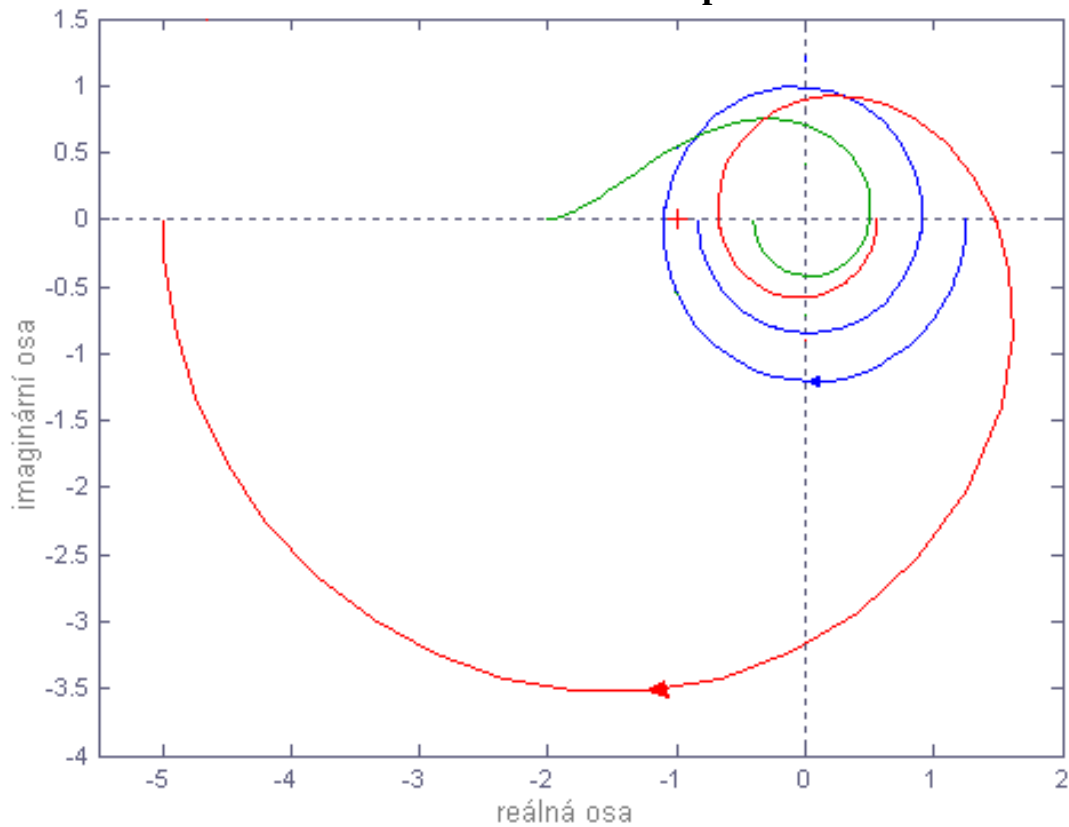
4. Přenos $G(z) = \frac{1}{z^2(z-a)}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{1}{(\cos(2 \cdot \omega T) + j \sin(2 \cdot \omega T)) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a)}$

Reálná část: $\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(3 \cdot \omega T) - a \cdot \cos(2 \cdot \omega T)}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2}$

Imaginární část: $\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(3 \cdot \omega T) + a \cdot \sin(2 \cdot \omega T)}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2}$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



| a = -0,8

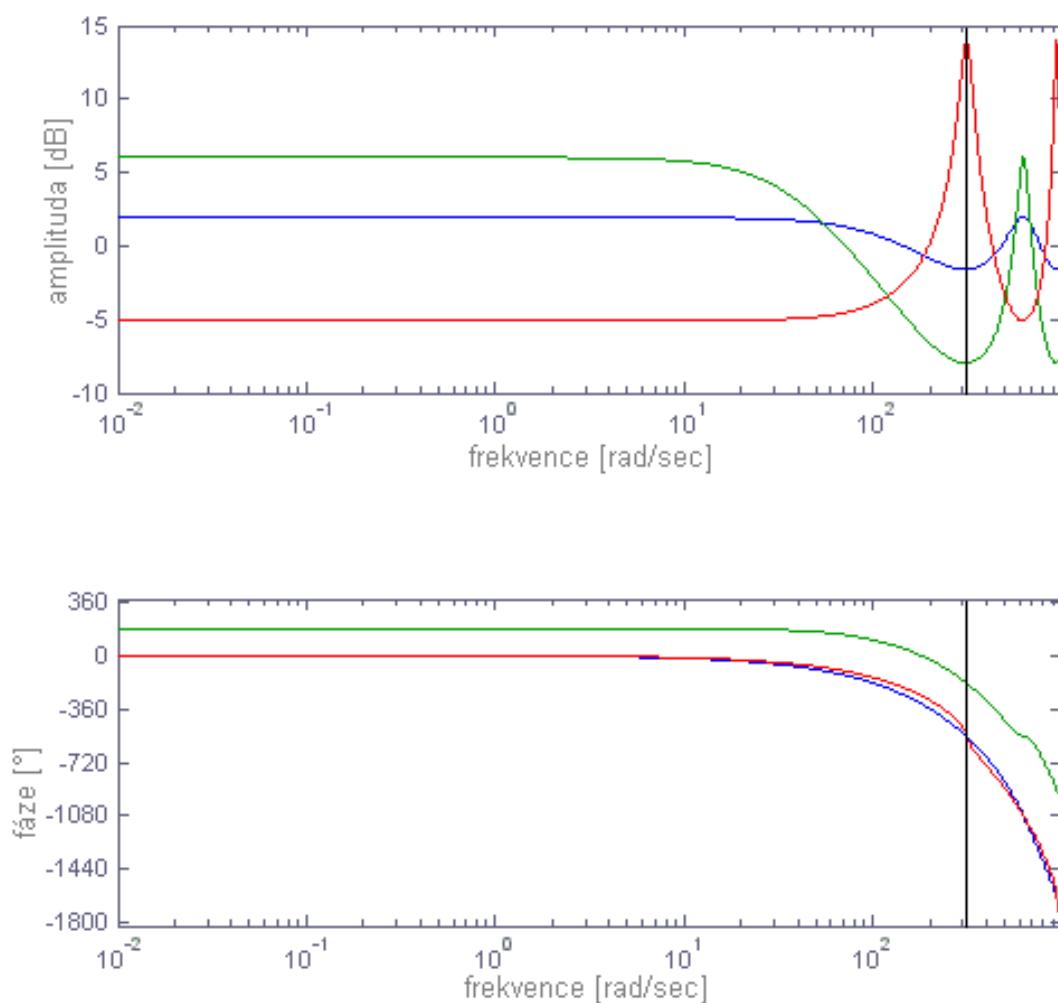
| a = 0,2

| a = 1,5

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1 - j\Omega) \cdot (1 - j\Omega) \cdot (1 - j\Omega)}{(1 - a) \cdot (1 + k \cdot j\Omega) \cdot (1 + j\Omega) \cdot (1 + j\Omega)} \quad k = \frac{1 + a}{1 - a}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



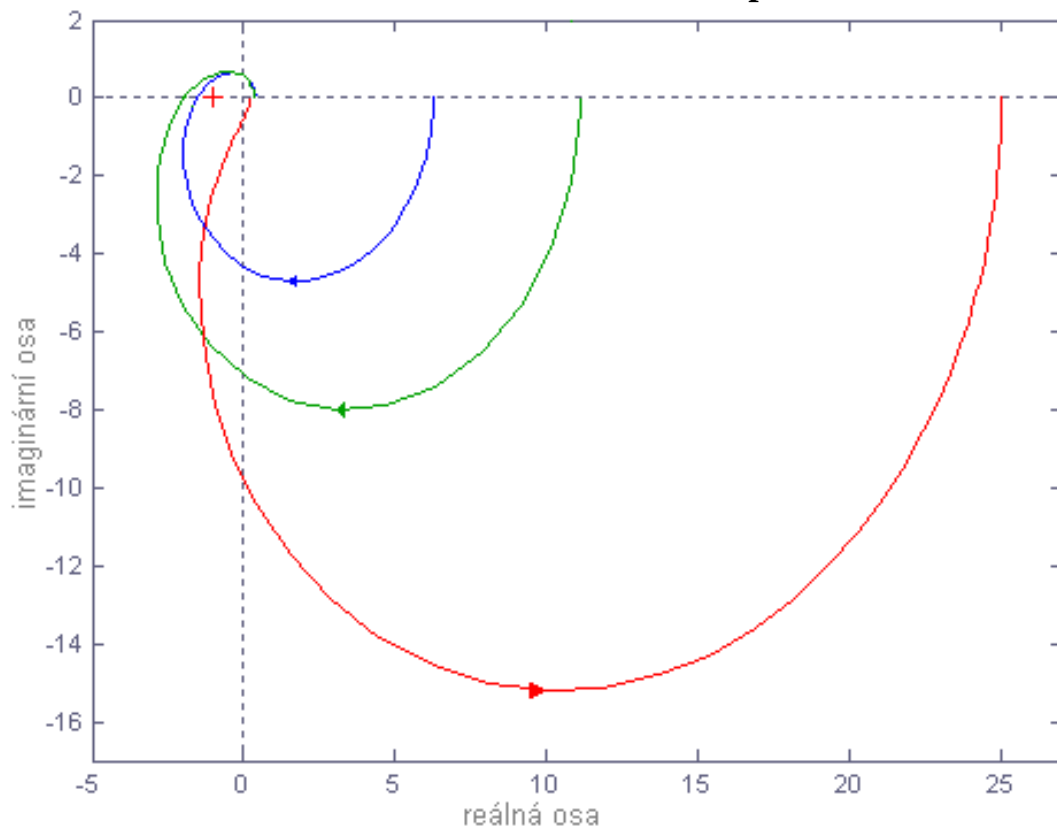
5. Přenos $G(z) = \frac{1}{(z-a)^2}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{1}{(\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - a)^2}$

Reálná část: $\text{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(2 \cdot \omega T) - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega T) + a^2}{(1 - 2a \cos(\omega T) + a^2)^2}$

Imaginární část: $\text{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(2 \cdot \omega T) + 2 \cdot a \cdot \sin(\omega T)}{(1 - 2a \cos(\omega T) + a^2)^2}$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



| $a = -1,2$

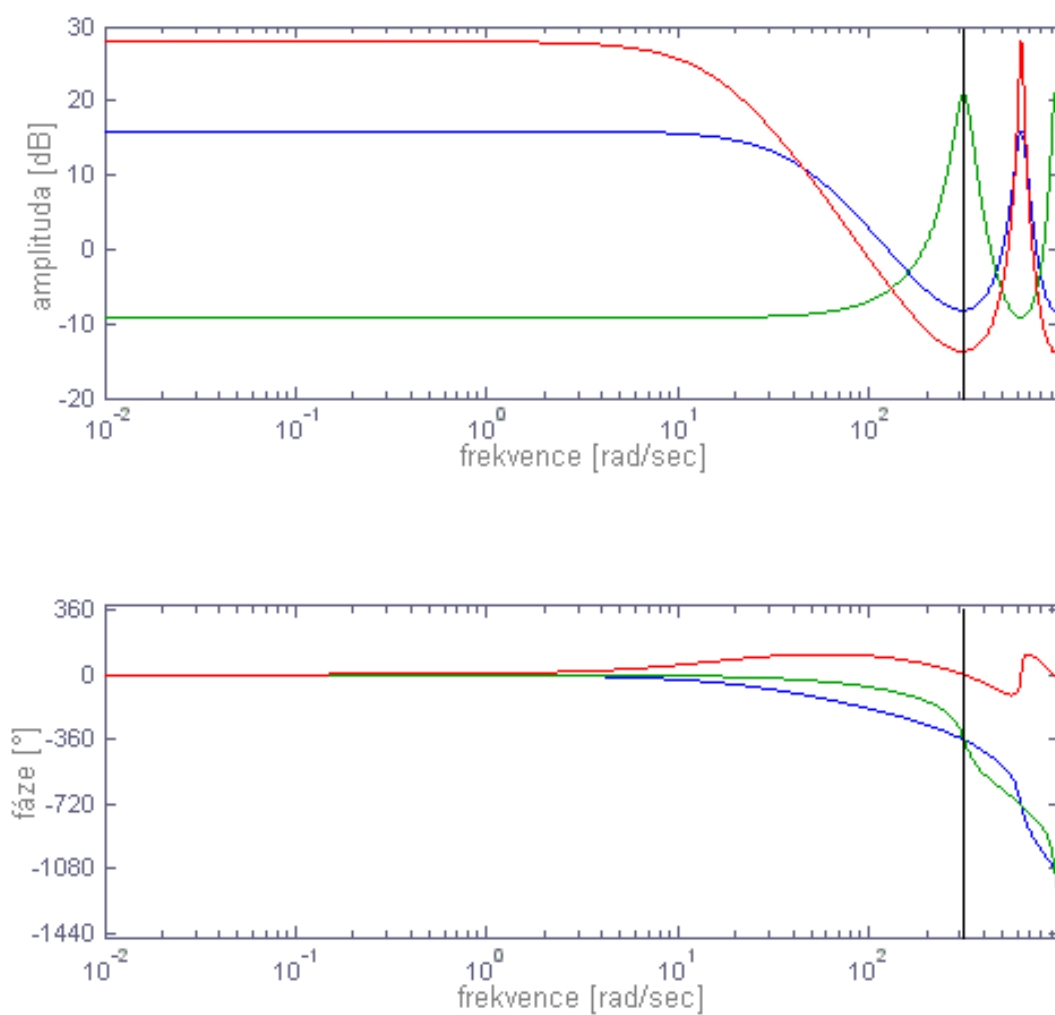
| $a = 0,6$

| $a = 0,7$

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1 - j\Omega) \cdot (1 - j\Omega)}{(1 - a)^2 \cdot (1 + k \cdot j\Omega) \cdot (1 + k \cdot j\Omega)} \quad k = \frac{1 + a}{1 - a}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích

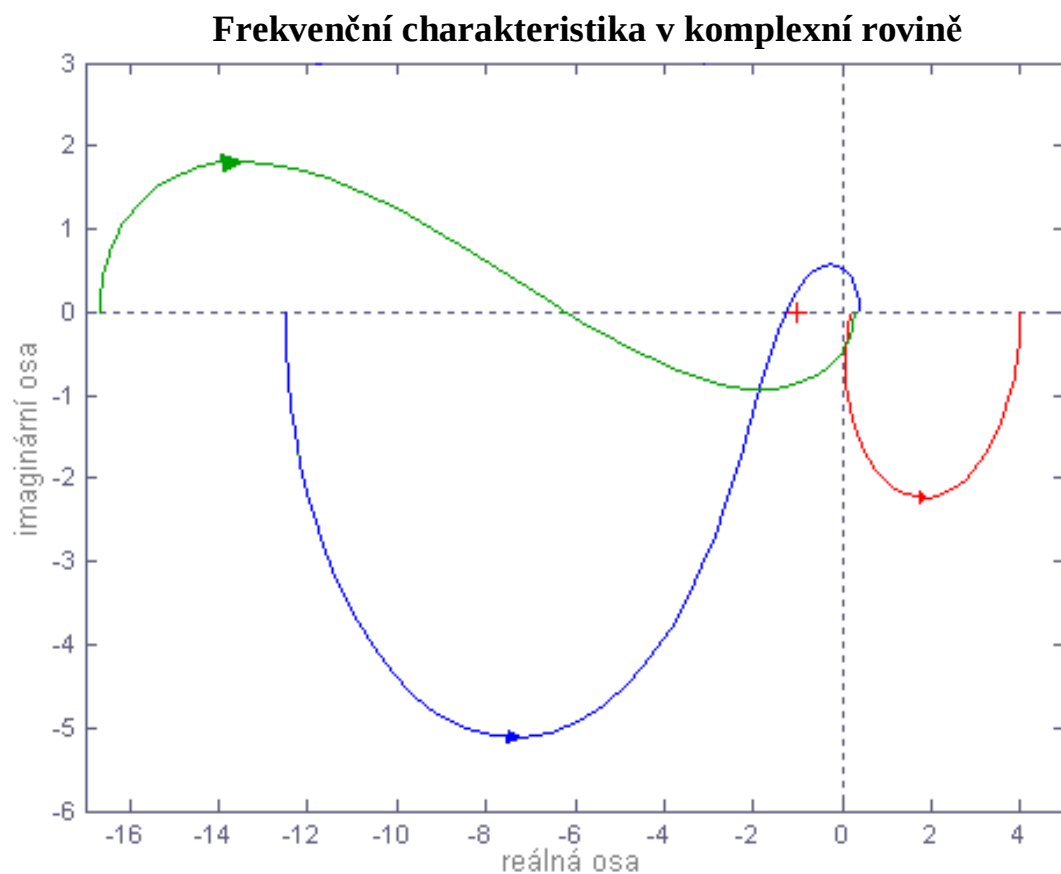


6. Přenos $G(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{1}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - b)}$

Reálná část: $\text{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(2 \cdot \omega T) - (a+b) \cdot \cos(\omega T) + a \cdot b}{(1 - 2a \cos(\omega T) + a^2) \cdot (1 - 2b \cos(\omega T) + b^2)}$

Imaginární část: $\text{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(2 \cdot \omega T) + (a+b) \cdot \sin(\omega T)}{(1 - 2a \cos(\omega T) + a^2) \cdot (1 - 2b \cos(\omega T) + b^2)}$



| $a = -1,5$
 $b = -1,5$

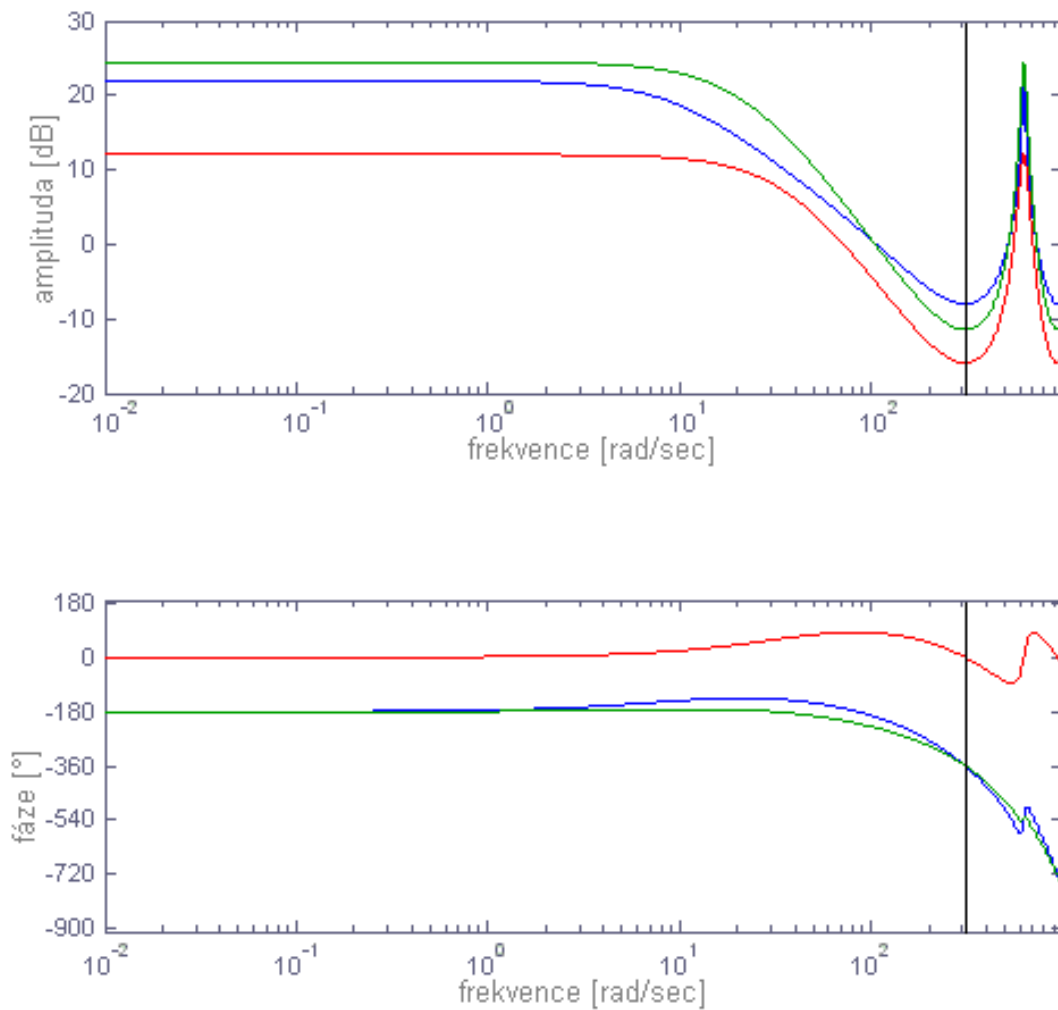
| $a = 0,2$
 $b = 1,1$

| $a = 1,1$
 $b = 0,2$

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1 - j\Omega) \cdot (1 - j\Omega)}{(1 - a) \cdot (1 - b) \cdot (1 + k \cdot j\Omega) \cdot (1 + l \cdot j\Omega)} \quad k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích

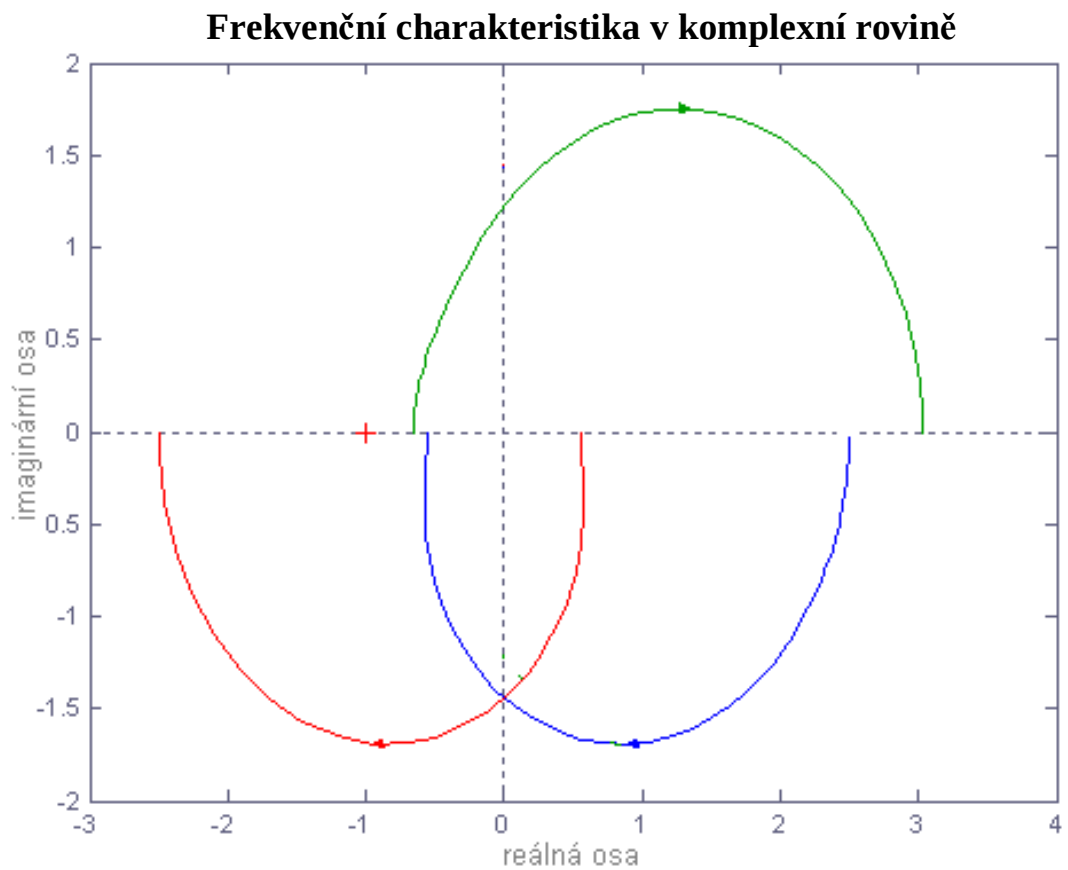


7. **Přenos**
$$G(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

Frekvenční přenos:
$$G(j\omega T) = \frac{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - b)}$$

Reálná část:
$$\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(\omega T) + a \cdot b \cdot \cos(\omega T) - a - b}{(1 - 2a \cos(\omega T) + a^2) \cdot (1 - 2b \cos(\omega T) + b^2)}$$

Imaginární část:
$$\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(\omega T) + a \cdot b \cdot \sin(\omega T)}{(1 - 2a \cos(\omega T) + a^2) \cdot (1 - 2b \cos(\omega T) + b^2)}$$



| a = -0,5
b = -0,2

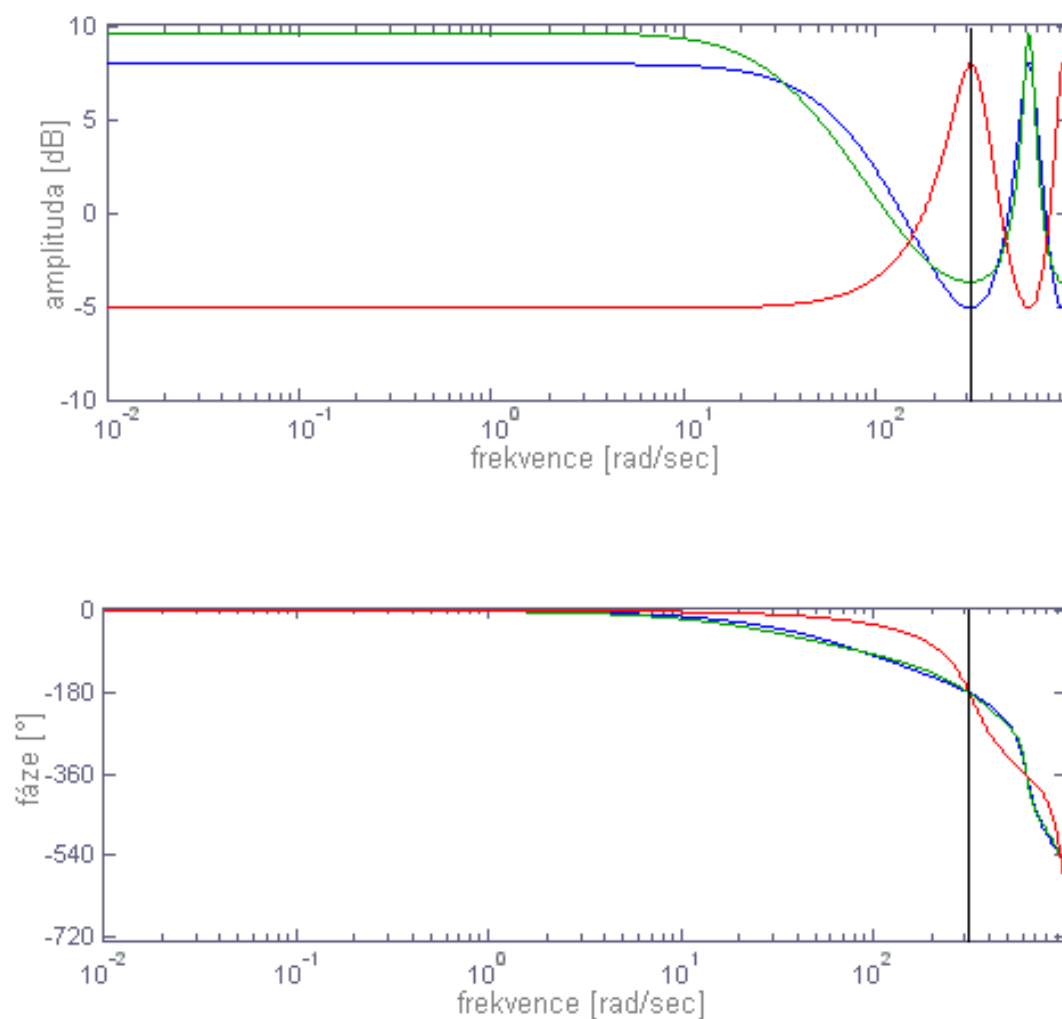
| a = 0,2
b = 0,5

| a = 0,7
b = -0,1

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1 + j\Omega) \cdot (1 - j\Omega)}{(1 - a) \cdot (1 - b) \cdot (1 + k \cdot j\Omega) \cdot (1 + l \cdot j\Omega)} \quad k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



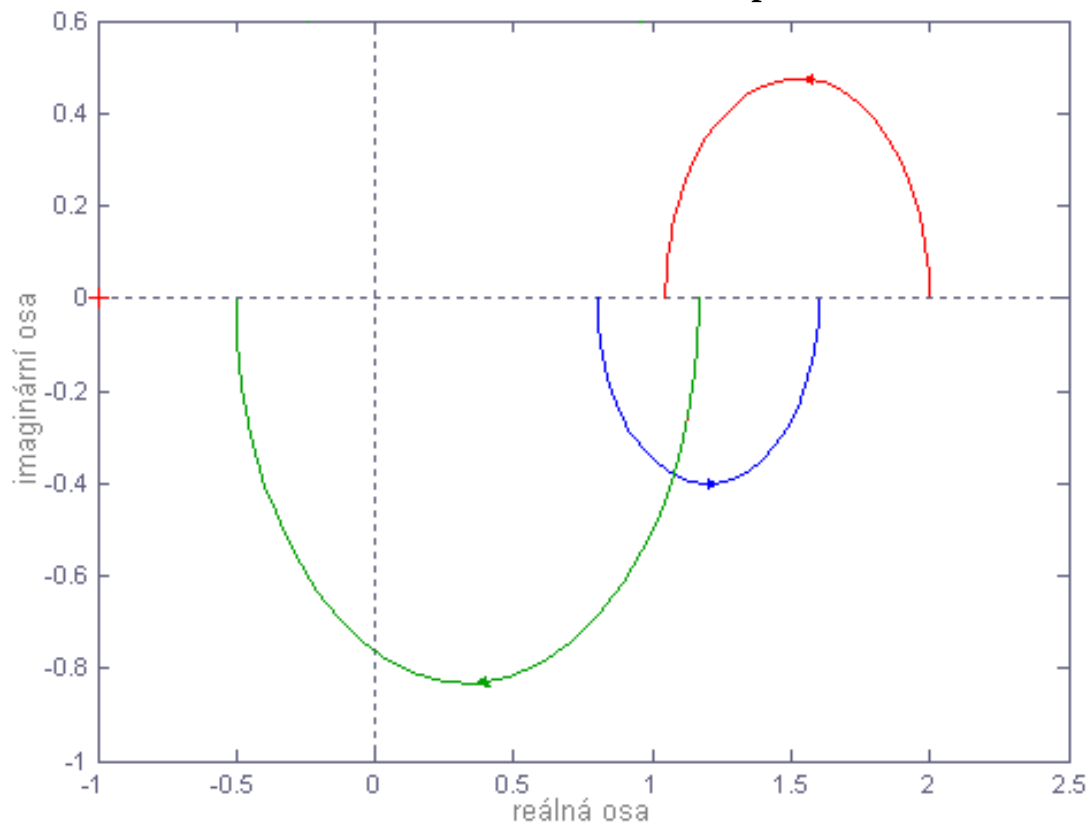
8. **Přenos** $G(z) = \frac{z-a}{z-b}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a}{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - b}$

Reálná část: $\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{1 - \cos(\omega T) \cdot (a+b) + a \cdot b}{1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2}$

Imaginární část: $\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(\omega T) \cdot (b-a)}{1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2}$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



| a = -1,2
b = -1,1

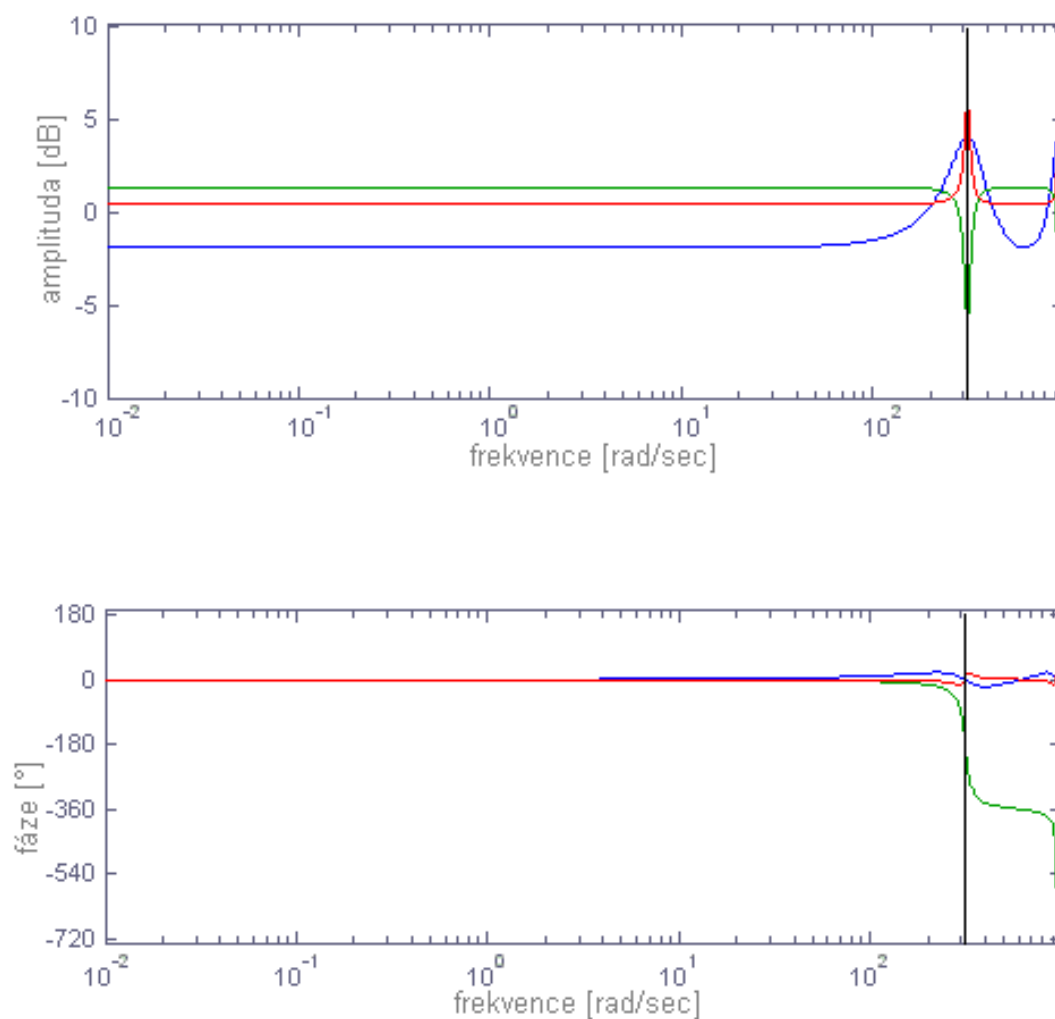
| a = 0,2
b = 0,5

| a = -1,1
b = -0,8

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1-a) \cdot (1+k \cdot j\Omega)}{(1-b) \cdot (1+l \cdot j\Omega)} \quad k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



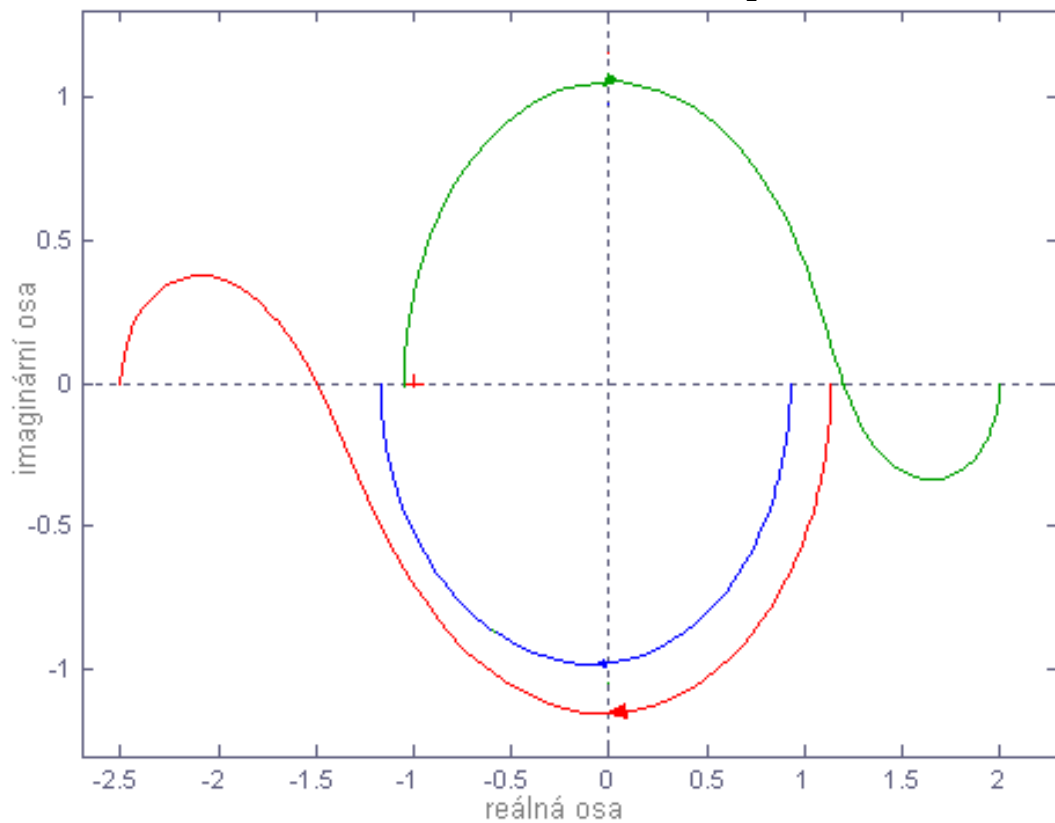
9. **Přenos** $G(z) = \frac{z-a}{z(z-b)}$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - b)}$

Reálná část: $\text{Re}[G(j\omega T)] = \frac{-a \cdot \cos(2 \cdot \omega T) + a \cdot b \cdot \cos(\omega T) + \cos(\omega T) - b}{1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2}$

Imaginární část: $\text{Im}[G(j\omega T)] = \frac{a \cdot \sin(2 \cdot \omega T) - a \cdot b \cdot \sin(\omega T) - \sin(\omega T)}{1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2}$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



| a = 1,5
b = 1,2

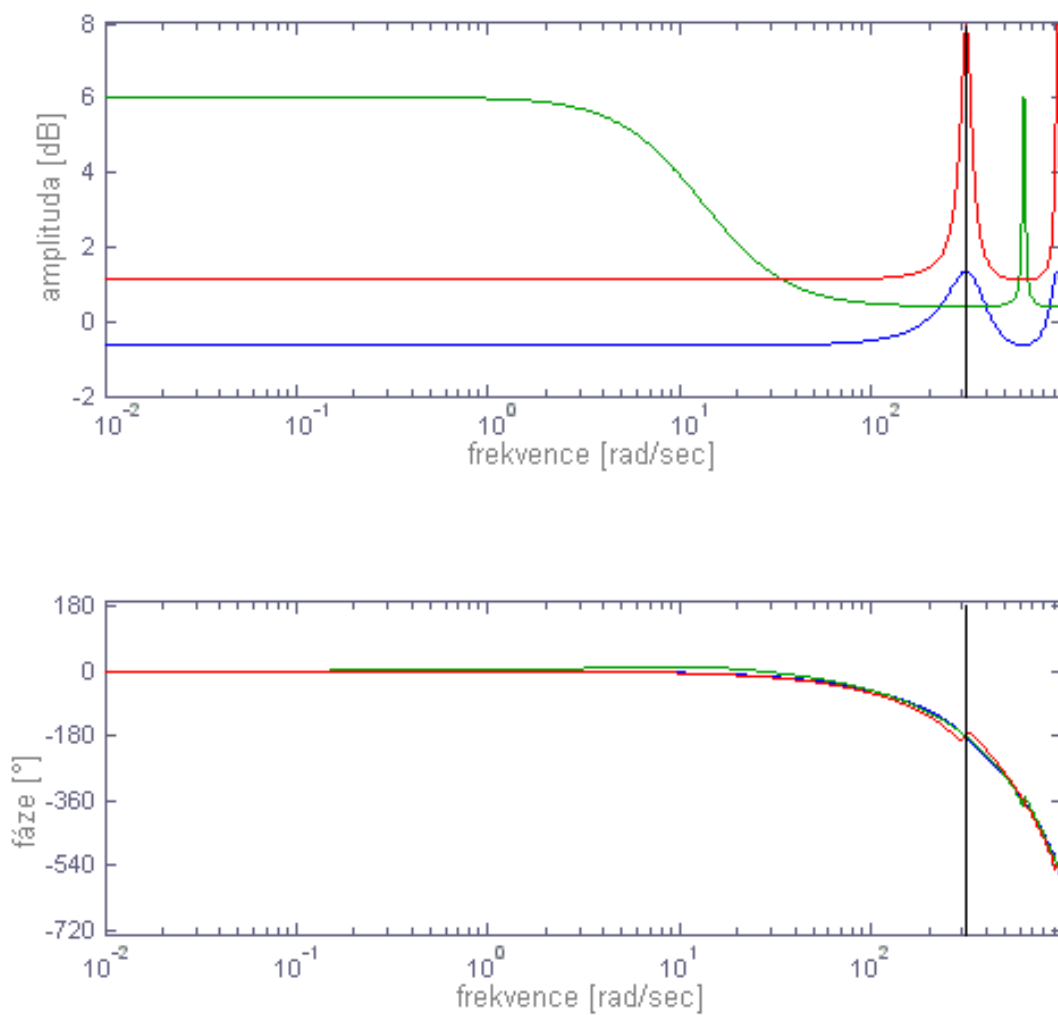
| a = 0,3
b = 0,4

| a = -1,2
b = -1,1

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1-a) \cdot (1+k \cdot j\Omega) \cdot (1-j\Omega)}{(1-b) \cdot (1+l \cdot j\Omega) \cdot (1+j\Omega)} \quad k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



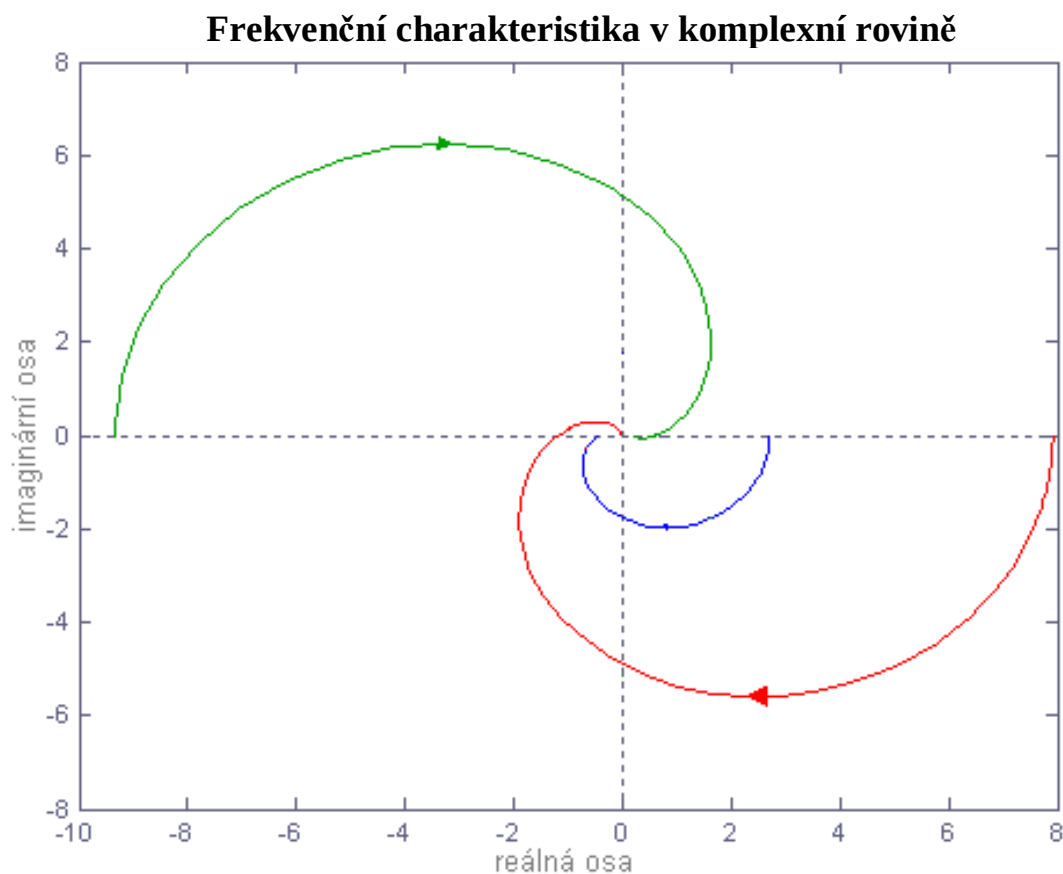
10. Přenos

$$G(z) = \frac{z - a}{(z - b)(z - c)}$$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - b) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - c)}$

Reálná část: $\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{-a \cos(2 \cdot \omega T) + \cos(\omega T) \cdot (1 + ac + ab + bc) - abc - b - c}{(1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2) \cdot (1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega T) + c^2)}$

Imaginární část: $\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{a \sin(2 \cdot \omega T) - \sin(\omega T) \cdot (1 + ab + ac - bc)}{(1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2) \cdot (1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega T) + c^2)}$



| a = 0,9
b = 0,6
c = 0,4

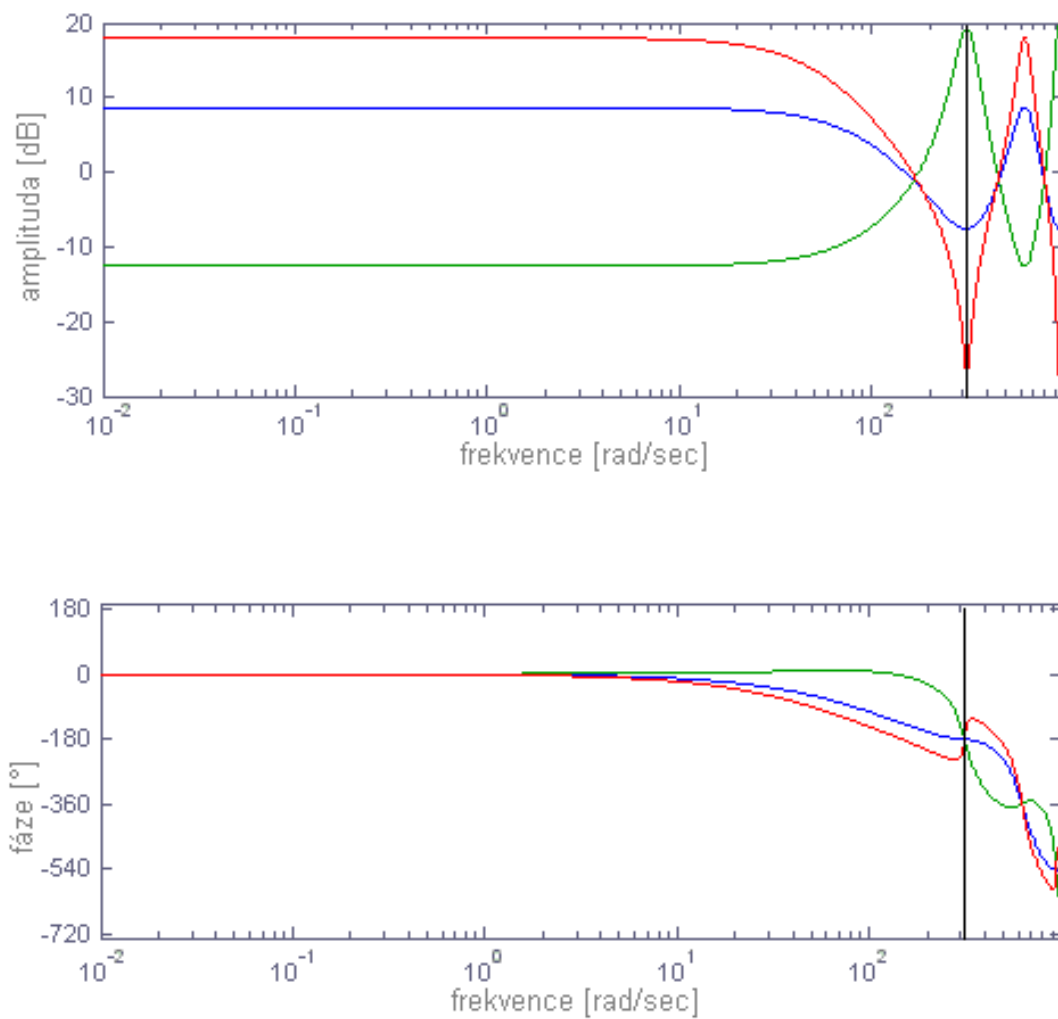
| a = 0,3
b = 0,4
c = 0,2

| a = -0,4
b = -0,7
c = -0,5

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1-a) \cdot (1+k \cdot j\Omega) \cdot (1-j\Omega)}{(1-b) \cdot (1-c) \cdot (1+l \cdot j\Omega) \cdot (1+m \cdot j\Omega)} \quad k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b} \quad m = \frac{1+c}{1-c}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



11. Přenos

$$G(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)(z-d)}$$

Frekvenční přenos: $G(j\omega T) = \frac{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - a) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - b)}{(\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - c) \cdot (\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) - d)}$

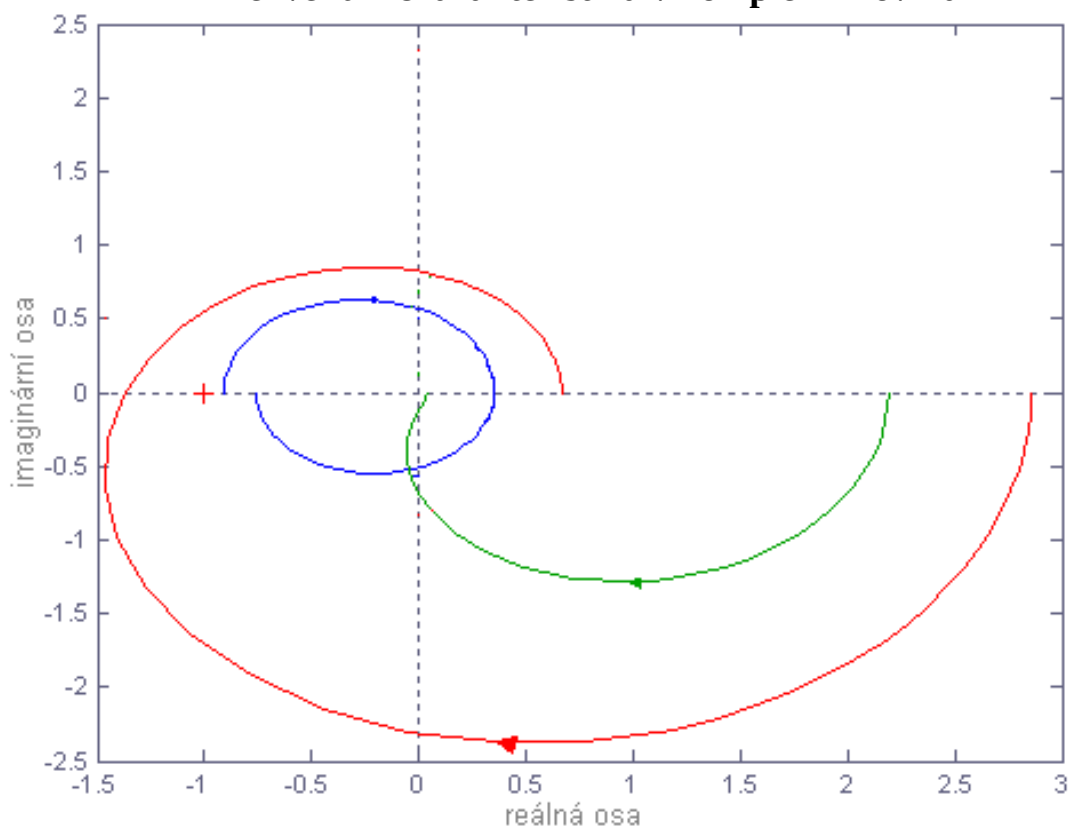
Reálná část:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(3\omega T)(-a-b-c-d) + 2\cos(\omega T)(abc+abd) + abcd}{(1-2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2) \cdot (1-2 \cdot c \cdot \cos(\omega T) + c^2)}$$

Imaginární část:

$$\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(3\omega T)(-a-b-c-d) + 2\sin(\omega T)(acd+bcd)}{(1-2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2) \cdot (1-2 \cdot c \cdot \cos(\omega T) + c^2)}$$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



a = -0,3
b = 0,3
c = -1,4
d = 1,5

a = 0,8
b = 0,9
c = 0,2
d = 0,3

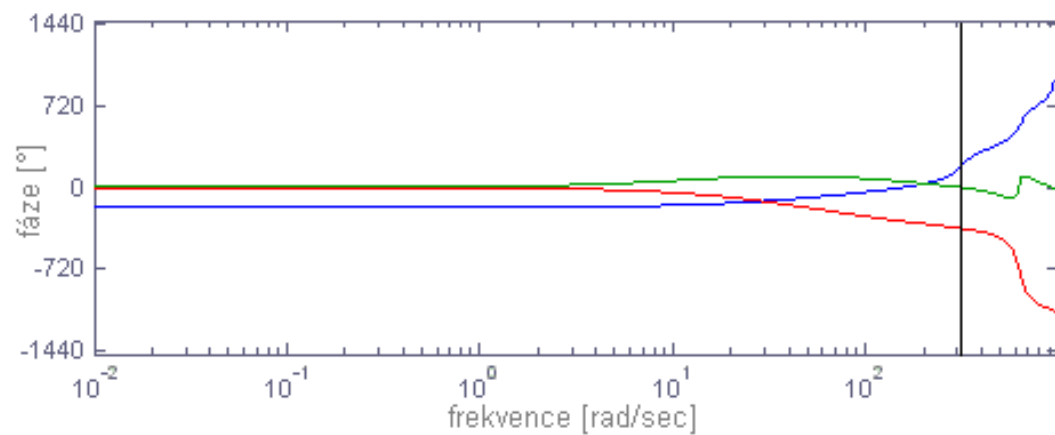
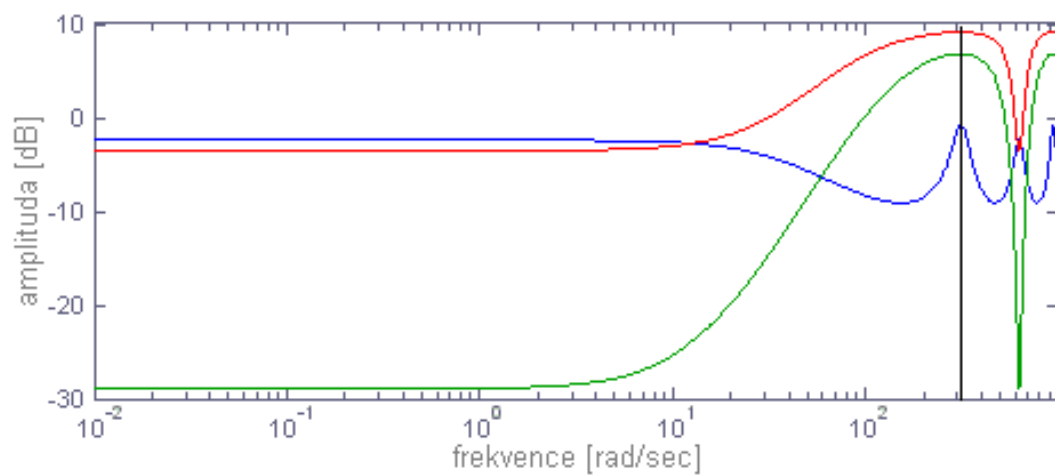
a = 1,4
b = 1,5
c = 0,4
d = 0,6

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1-a) \cdot (1-b) \cdot (1+k \cdot j\Omega) \cdot (1+l \cdot j\Omega)}{(1-c) \cdot (1-d) \cdot (1+m \cdot j\Omega) \cdot (1+n \cdot j\Omega)}$$

$$k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b} \quad m = \frac{1+c}{1-c} \quad n = \frac{1+d}{1-d}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



12. Přenos

$$G(z) = \frac{z(z-a)}{(z-b)(z-c)(z-d)}$$

Frekvenční přenos:

$$G(j\omega T) = \frac{(\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - a)(\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - b)}{(\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - b)(\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - c)(\cos(\omega T) + j\sin(\omega T) - d)}$$

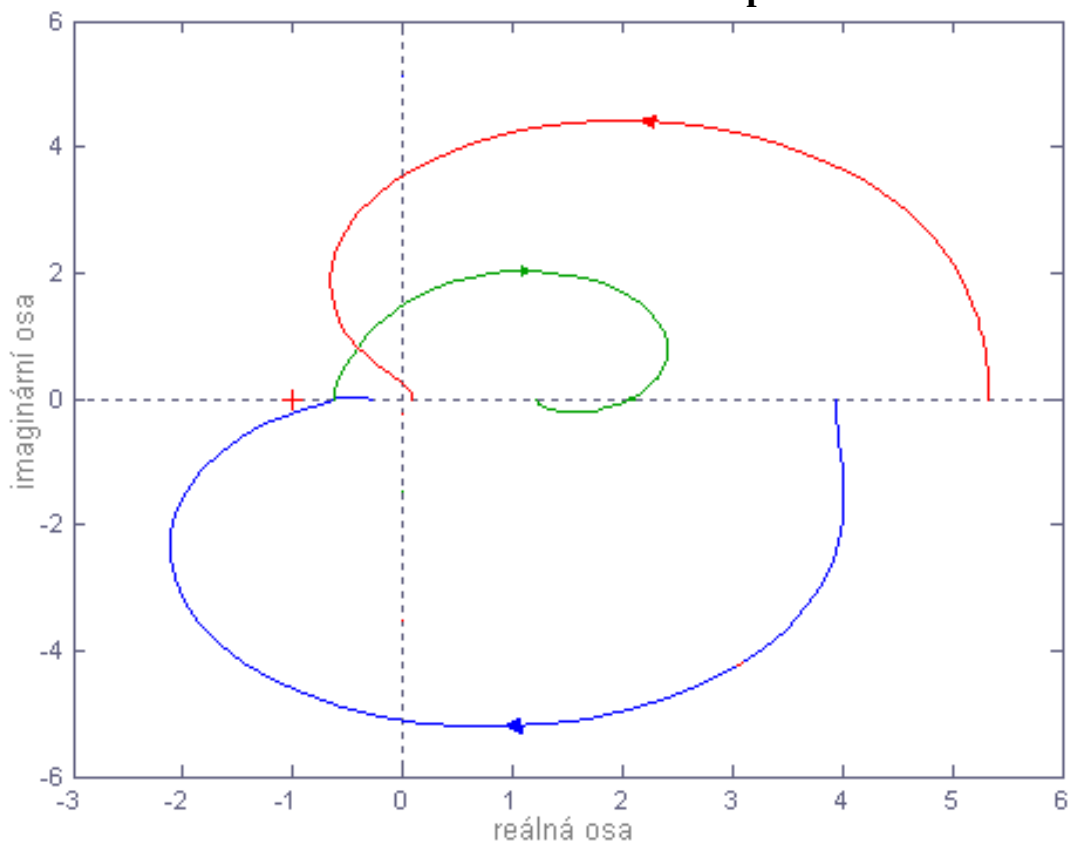
Reálná část:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega T)] = \frac{\cos(5\omega T) + \cos(2\omega T)(abc + abd + acd) - a}{(1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2) \cdot (1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega T) + c^2) \cdot (1 - 2 \cdot d \cdot \cos(\omega T) + d^2)}$$

Imaginární část:

$$\operatorname{Im}[G(j\omega T)] = \frac{-\sin(5\omega T) - \sin(3\omega T)(bc + bd + cd) + \sin(\omega T)(acd + abd + abc)}{(1 - 2 \cdot b \cdot \cos(\omega T) + b^2) \cdot (1 - 2 \cdot c \cdot \cos(\omega T) + c^2) \cdot (1 - 2 \cdot d \cdot \cos(\omega T) + d^2)}$$

Frekvenční charakteristika v komplexní rovině



a = 1,4
b = 1,5
c = 0,4
d = 0,5

a = 0,3
b = 0,3
c = 0,4

d = 0,5
a = -0,8
b = 0,9

$$c = 0,2$$

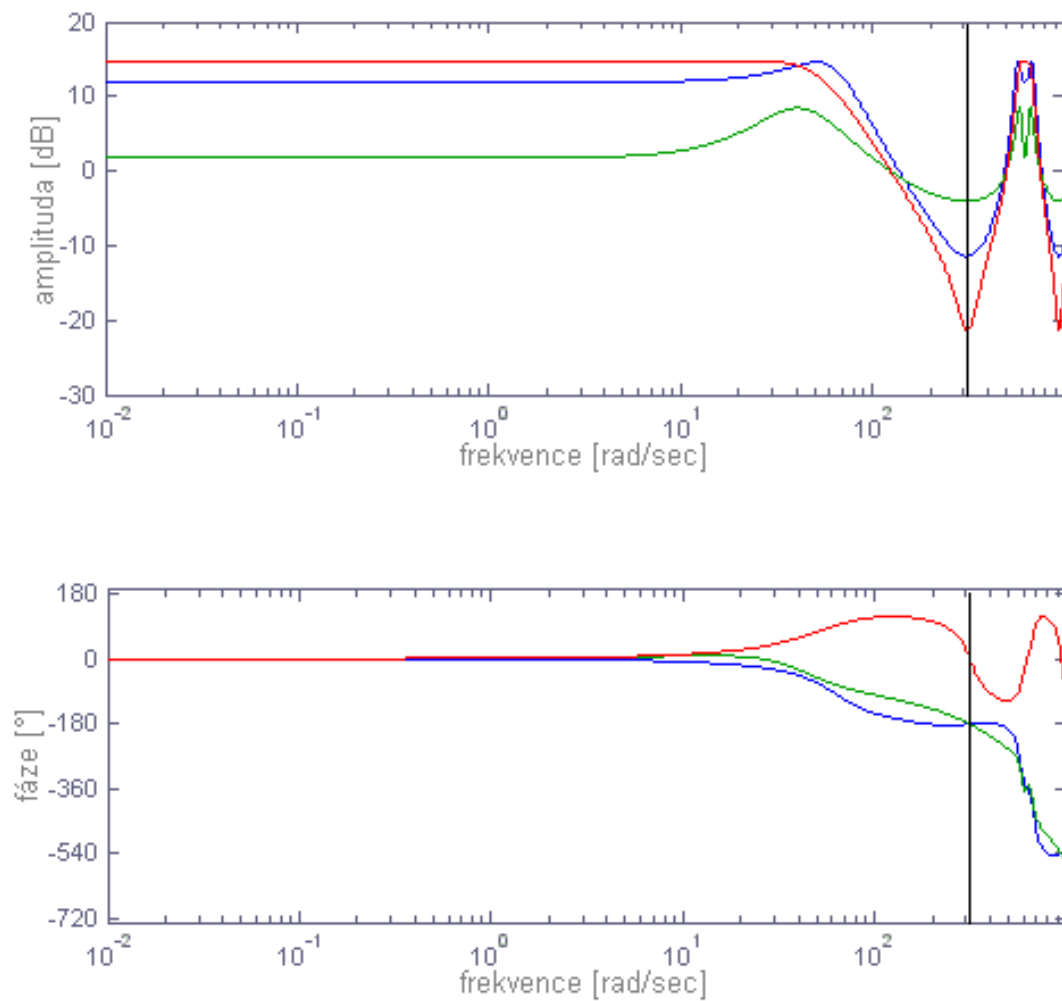
$$d = 0,3$$

Frekvenční přenos pro transformovanou frekvenci Ω :

$$G(j\Omega) = \frac{(1-a) \cdot (1+k \cdot j\Omega)(1+j\Omega)}{(1-b)(1-c) \cdot (1-d) \cdot (1+l \cdot j\Omega) \cdot (1+m \cdot j\Omega) \cdot (1+n \cdot j\Omega)}$$

$$k = \frac{1+a}{1-a} \quad l = \frac{1+b}{1-b} \quad m = \frac{1+c}{1-c} \quad n = \frac{1+d}{1-d}$$

Amplitudová a fázová charakteristika v logaritmických souřadnicích



Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámení s problematikou frekvenčních charakteristik diskrétních regulačních obvodů a dále seznámení se z jejich konstrukcí. Hlavním úkolem bylo sestavit katalog typových frekvenčních charakteristik některých základních diskrétních systémů.

Pro přiblížení problematiky diskrétních systémů se první část zabývá popisem spojitých systémů. Jsou uvedeny základní vztahy a teorie pro konstrukce frekvenčních charakteristik spojitých systémů, z nichž vycházíme také při konstrukci frekvenčních charakteristik diskrétních systémů.

Druhá část už je věnována popisu diskrétních systémů. Je zde opět přiblížena teorie a odvozeny základní výpočetní vztahy a jsou ukázány rozdíly mezi spojitými a diskrétními regulačními systémy. Dále je vysvětlen význam a postup při konstrukci frekvenčních charakteristik diskrétních systémů.

Teoretických znalostí je pak využito v hlavní části této diplomové práce, kterou je katalog frekvenčních charakteristik. Katalog se skládá z 12 položek typových přenosů diskrétních systémů. Pro každý zadaný z-přenos je zkonstruována frekvenční charakteristika v komplexní rovině a amplitudová a fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích. V grafu jsou vždy 3 průběhy charakteristik pro různé hodnoty koeficientů v daných z-přenosech. Ke každé položce v katalogu je také odvozen příslušný frekvenční přenos a vztahy pro výpočet reálné a imaginární složky pro konstrukci frekvenčních charakteristik v komplexní rovině. Pro konstrukci charakteristik byl použit program pro modelování regulačních obvodů MATLAB.

Součástí této diplomové práce je také program pro výpočet a konstrukci frekvenčních charakteristik diskrétních systémů, který jsem vytvořil a tím splnil jeden z bodů zadání. Program nese název CharDS a byl vytvořen ve vývojovém prostředí DELPHI 7 od firmy Borland. Experimentováním a srovnáváním s programem MARLAB jsem ověřil správnost a přesnost prováděných výpočtů a přesnost vykreslovaných frekvenčních charakteristik. MATLAB je profesionální matematický nástroj, který disponuje velkou řadou matematických funkcí a toolboxů pro kompletní návrh a řešení regulačních systémů. Má také nástavbu SIMULINK pro rychlou, jednoduchou a přehlednou simulaci všech řídicích systémů. Při porovnávání programu CharDS s programem MATLAB v oblasti frekvenčních charakteristik diskrétních systémů však bylo dosaženo srovnatelných, tím je tedy program CharDS v této oblasti regulačních systémů plně použitelný.

Domnívám se že tímto jsem vyčerpal všechny body zadání a tak splnil cíl této diplomové práce.

Seznam použité literatury

- [1] ŠVARC Ivan, ŠEDA Miloš, VÍTEČKOVÁ Miluše. *Automatické řízení*. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o., 2007. 324 s. ISBN 978-80-214-3491-2
- [2] BALÁTEĚ Jaroslav. *Automatické řízení*. 2. vyd. Praha: BEN – technická literatura, 2004. 664 s. ISBN 80-7300-148-9
- [3] ŠVARC Ivan. *Teorie automatického řízení : sbírka příkladů*. 1. vyd. Brno: Rektorát Vysokého učení technického, 1990. 134 s. ISBN 80-214-0225-3
- [4] DAVIDOVÁ Olga. *Využití frekvenčních metod při navrhování diskrétních systémů řízení*. 1. vyd. Brno: Edice PhD Thesis, 2004. 30 s. ISBN 80-214-2759-0
- [5] KALVODA Petr. *Frekvenční metody pro vyšetřování diskrétních regulačních systémů*. Brno, 2004. 73 s. Diplomová práce na Fakultě strojního inženýrství na VUT v Brně, Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí diplomové práce Doc.Ing. Ivan Švarc, CSc.
- [6] SKOUPÝ Pavel. *Matematické popisy diskrétních systémů a jejich aplikace na počítači*. Brno, 2000. 76 s. Diplomová práce na Fakultě strojního inženýrství na VUT v Brně, Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí diplomové práce Doc.Ing. Ivan Švarc, CSc.