VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

APLIKACE SYSTÉMU MAPLE PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH KINEMATIKY A DYNAMIKY

MAPLE APPLICATIN FOR PERFORMING NUMERICAL CALCULATIONS
OF EXAMPLES FROM KINEMATICS AND DYNAMI

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR ESSAY

AUTOR PRÁCE **Josef Dřímal**
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE **doc. RNDr. Karel Pellant, CSc.**
SUPERVISOR

BRNO 2008

ZADÁNÍ ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

(na místo tohoto listu vložte originál a nebo kopii zadání Vaš práce)

LICENČNÍ SMLOUVA

(na místo tohoto listu vložte vyplněný a podepsaný list formuláře licenčního ujednání)

ABSTRAKT

Účelem práce je ukázat na možnosti využití speciálních software, v tomto případě systému Maple, pro řešení příkladů mechaniky těles. Úlohy jsou z kinematiky a dynamiky, ale jejich případná souvislost s jinými obory FME (jako je i automatizace a informatika) je evidentní.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to provide the possibilities of the application of the mathematical software Maple for the solution of practical exercises from solid state mechanics. The examples from kinematics and dynamics are presented, but the relationship to the other subject fields at FME (with the inclusion of informatics) is evident.

KLÍČOVÁ SLOVA

Maple, kinematika, dynamika, amplitudová charakteristika, tlumení, řešení úloh, počítačová podprora

KEYWORDS

Maple, kinematics, dynamics, amplitude characteristics, damping, task handling, software support

OBSAH:

ZADÁNÍ ZÁVĚREČNÉ PRÁCE **3**

LICENČNÍ SMLOUVA **5**

ABSTRAKT **7**

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ **11**

1 ÚVOD **13**

2 SYSTÉM MAPLE **15**

2.1 CHARAKTERISTIKA SYSTÉMU MAPLE 15
2.2 POPIS SYSTÉMU MAPLE 15
2.3 SYMBOLICKÉ VÝPOČTY 16
2.4 UŽIVATELSKÉ PRACOVNÍ PROSTŘEDÍ 16
2.5 STRUKTURA SYSTÉMU MAPLE 17

3 STANOVENÍ ZÁVISLOSTÍ POOTOČENÍ **19**

3.1 PRAKTICKÝ PŘÍKLAD 19

4 STANOVENÍ AMPLITUDOVÉ CHARAKTERISTIKY **21**

4.1 ÚVOD DO KMITÁNÍ TĚLES A BODŮ 21
4.2 VOLNÉ KMITÁNÍ NETLUMENÉ 21
4.3 VOLNÉ KMITÁNÍ TLUMENÉ 22
4.4 VYNUCENÉ KMITY BUZENÉ HARMONICKOU SILOU 23
4.5 REÁLNĚ KMITAJÍCÍ TĚLESO 23

5 ZADANÁ DATA V SYSTÉMU MAPLE **29**

5.1 VYKRESLENÍ PŘEVODNÍ A DERIVACE PŘEVODNÍ FUNKCE 29
5.2 URČENÍ AMPLITUDOVÉ CHARAKTERICKY A - ω 30

6 ZÁVĚR **35**

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY **37**

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

m	$[kg]$	hmotnost
F	$[N]$	síla
k	$\left[\frac{N}{m}\right]$	tuhost pružiny
δ	$[\ ]$	součinitel doznívání
Ω_0	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	vlastní úhlová frekvence
φ_0	$[rad]$	počáteční fáze určující výchylku v čase $t = 0$.
f_0	$[Hz]$	počáteční frekvence
T_0	$[s]$	perioda harmonického kmitu
ω	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	úhlová frekvence
h	$[m]$	výška
s	$[m]$	délka
r	$[m]$	poloměr (rádius)
μ	$[-]$	převod
x	$[m]$	výchylka
b	$\left[\frac{N}{m}\right]$	součinitel lineárního tlumení
E_K	$[J]$	kinetická energie
E_p	$[J]$	potenciální energie

1 ÚVOD

Práce se zabývá využitím počítačového systému Maple, při nalézání výsledků praktických úloh, které nejsou jednoduchým způsobem řešitelné běžnými metodami. Použití je ukázáno na dvou praktických příkladech kinematiky a dynamiky. Úlohy jsou koncipovány, tak aby bylo možné jejich další využití ke studijním účelům.

2 SYSTÉM MAPLE

Systém Maple je počítačový software určený k řešení matematických funkcí, rovnic, nerovnic, derivací apod.. Systém umožňuje jednodušší řešení symbolických a algebraických výpočtů.

2.1 Charakteristika systému Maple

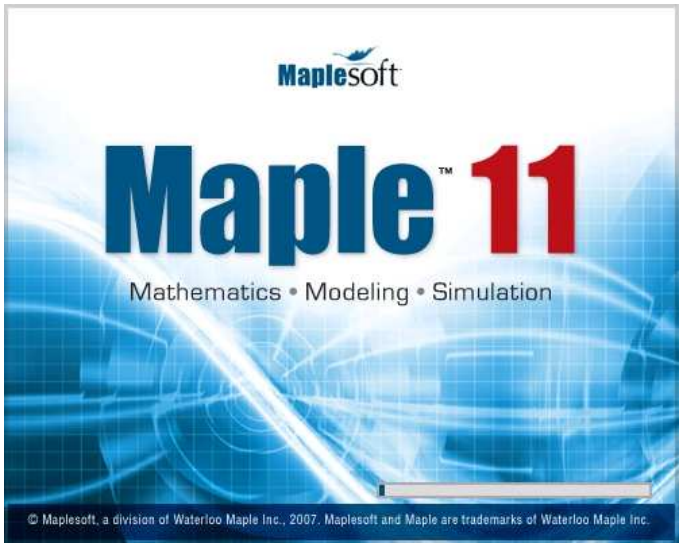
Maple je počítačové prostředí, které bylo vyvíjeno od konce 80. let na několika západních univerzitách. Vznikl především na základě požadavku specializovaných skupin, po uceleném materiálu podobného charakteru. Největší podíl na realizaci měla skupina vědců sdružená pod názvem „ Symbolic Computatiton Group“ na univerzitě Waterloo v Kanadě. Dále pak na federální technické univerzitě ve Švýcarsku, kam významná část této skupiny přešla v roce 1990. V současné době je Maple komercializován a jeho další vývoj řídí kanadská firma Maplesoft Inc., sídlící ve Waterloo ve státě Ontario.

Obr. 1 Logo firmy Maplesoft Inc.

Jméno Maple jako takové, je pravděpodobně odvozeno z anglického akronymu *Ma*thematics *ple*asure (Matematika potěšením). Během poslední doby, deseti až patnácti let, se stal Maple jedním z nejvíce se rozvíjejících systémů počítačové algebry ve světě.

2.2 Popis systému Maple

Systém Maple byl vytvořen pro symbolické výpočty v matematice. Jedná se o otevřený systém, do nějž může uživatel téměř libovolně zasahovat. Díky těmto schopnostem nabízí systém téměř neomezené možnosti řešení, ale i naopak spoustu komplikací při zpracování dat. Symbolické a algebraické výpočty lze charakterizovat jako výpočty se symboly reprezentujícími matematické objekty. V Maple se používá programovací jazyk velmi podobný Pascalu. Je zde předdefinováno mnoho procedur a funkcí. Tyto funkce pokrývají většinu matematiky. Zejména řešení diferenciálního a integrálního počtu, lineární algebry, řešení rovnic, diferenciálních a diferenčních rovnic, diferenciální geometrii až k logice.



Obr. 2 Aktuální verze systému Maple 11

2.3 Symbolické výpočty

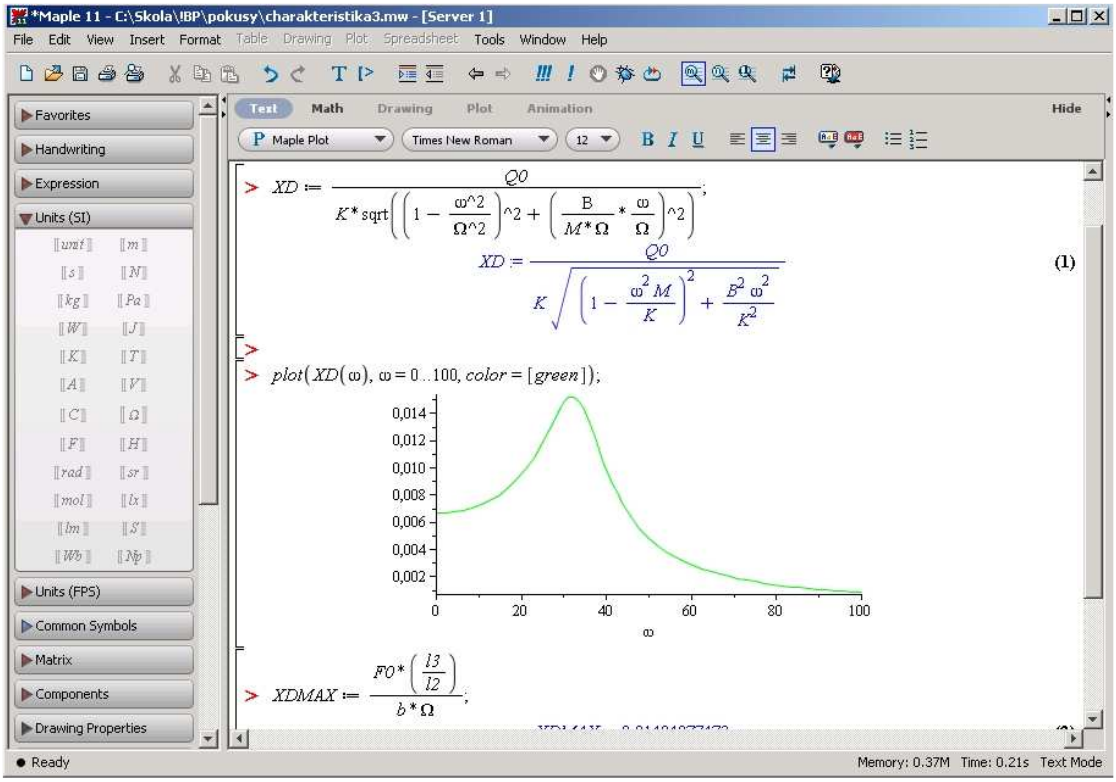
Symbolické a algebraické výpočty lze charakterizovat jako výpočty se symboly, jež reprezentují matematické objekty. Symboly mohou zastupovat jednak čísla (celá, racionální, reálná, komplexní a případně i algebraická), booleovské hodnoty (pravda, nepravda, neznámo) a znaky (písmena řecké abecedy a další symboly), také mohou být používány pro matematické objekty (proměnné, matematické výrazy, rovnice a identity, posloupnosti, množiny, vektory, matice, polynomy a funkce jedné a více proměnných a jejich derivace a integrály, grafy jedné a dvou proměnných a jejich animace, systémy rovnic, nerovnic a algebraické struktury jako grupy, okruhy a algebry a jejich prvky, orientované grafy, apod.), datové struktury (tabulky a datové soubory) a vykonavatelé procedury (funkce, grafy, algoritmy, atd.). [2]

Konečným symbolickým vyjádřením hledaného matematického problému je řešení v explicitním analytickém tvaru nebo jeho symbolická aproximace. Algebraickým řešením jsou výpočty přesně podle pravidel algebry, bez použití pohyblivé řádové čárky, jak je tomu u klasických výpočtů.

Zjednodušení a úpravy matematických výrazů, analytické řešení rovnic, rozklad polynomů, derivování, integrování funkcí a rozvoj funkcí v řady, analytické řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic a integrálních rovnic, exaktní řešení systémů rovnic i nerovností atd. lze charakterizovat jako příklady symbolických a algebraických výpočtů.

2.4 Uživatelské pracovní prostředí

Uživatelské pracovní prostředí programu Maple 11.0 odpovídá pracovním prostředím v operačních systémech Windows NT/2000/XP a Linux.



Obr. 3 Okno programu

2.5 Struktura systému Maple

Při spuštění programu je inicializováno pouze základní jádro *kernel*, které má tři základní části:

- interpretr jazyka systému Maple - převádí příkazy do strojového kódu
- algoritmy pro numerické výpočty
- funkce a procedury pro zobrazení výsledků a výstupní operace

Kernel je napsán v programovacím jazyce C, jehož zdrojový kód je vysoce optimalizován. Tato optimalizace zapříčiňuje vysokou rychlost operací i při malé velikosti jádra. Implementuje nejfrekventovanější funkce pro výpočty aritmetických a jednoduchých polynomiálních výrazů v oboru celých a racionálních čísel.

Téměř všechny matematické operace jsou psány přímo v Maple. Ty jsou pak soustředěny do knihoven, jež dělíme na 3 základní skupiny:

- *hlavní*: obsahuje nejčastější příkazy, které nejsou přímo v jádře, tak aby je nebylo nutno nahrávat
- *uživatelské*: méně frekventované příkazy, které je nutné nahrát pomocí příkazů
- *packages* : (balíčky) každý packages obsahuje skupinu výrazů (pro určitou oblast matematiky), je nutné ji nahrát do paměti, před použitím těchto příkazů

První inicializace se volá v místě potřeby. Druhá na začátku dokumentu. [1]

3 STANOVENÍ ZÁVISLOSTÍ POOTOČENÍ

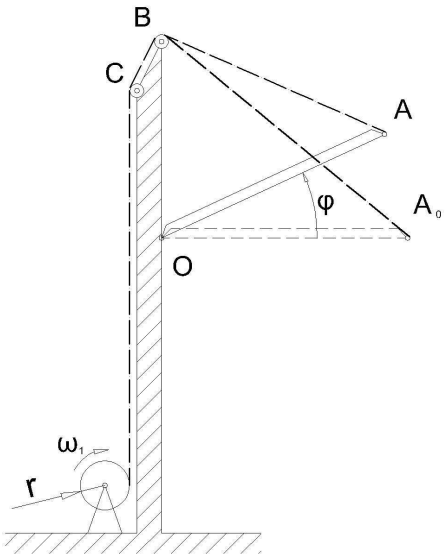
V praktickém použití snímačů úhlu polohy se velmi často setkáváme s případy kdy je možno, a mnohem lepší, úlohu vyřešit i teoretiky než pouze na základě naměřených hodnot. Naměřené hodnoty je lépe použít pouze jako kontrolního nástroje k ověření správnosti.

3.1 Praktický příklad

Ramenem jeřábu se pootáčí ve svislé rovině kolem bodu O lanem, které je navíjeno na rovnoměrně se otáčející buben. V počáteční poloze je rameno vodorovné.

Úkolem je určení závislosti úhlu pootočení φ a úhlové rychlosti ω ramene na čase.

Dáno: BO = h = 4 m , AO = l = 5 m, r = 0,2 m, $\omega_1 = 5\ s^{-1}$.



Obr. 4 Grafické zadání úlohy

Určení zdvihové závislosti $\psi = \lambda(\varphi)$ a převodní funkce (derivace zdvihové závislosti podle souřadnice hnacího členu)

$$\mu = \frac{d\varphi}{d\varphi_1} \tag{1}$$

a derivaci převodu

$$\nu = \frac{d\mu}{d\varphi_1} = \frac{d^2\lambda}{d\varphi_1^{\,2}} \tag{2}$$

Za čas *t* se navine na buben úsek lana o délce

$$s(t) = \varphi_1 r = \omega_1 t\, r \tag{3}$$

O tento úsek se zkrátí lano spojující bod A a B tj. platí

$$s(t) = \overline{BA_0} - \overline{BA} = \sqrt{h^2 + l^2} - \sqrt{h^2 + l^2 - 2hl\cos(90 - \varphi)} \tag{4}$$

Platí tedy

$$\omega_1 rt = \sqrt{h^2 + l^2} - \sqrt{h^2 + l^2 - 2hl\sin\varphi} \Rightarrow \varphi = arcsin\left[u(t)\right] \tag{5}$$

kde

$$u(t) = \frac{r\omega_1 t}{2hl}\left(2\sqrt{h^2 + l^2 - r\omega_1 t}\right) \tag{6}$$

Poderivováním podle času dostáváme pro závislost úhlové rychlosti zvedání ramene jeřábu na čase vztah

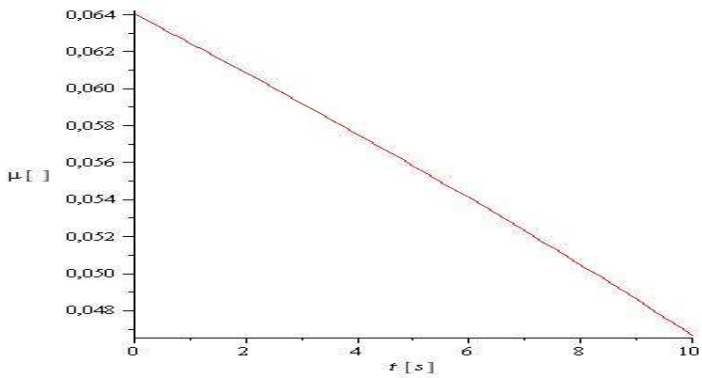
$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r\omega_1\left(\sqrt{h^2 + l^2} - r\omega_1 t\right)}{hl\sqrt{1 - u^2(t)}} \tag{7}$$

Pro zdvihovou závislost tedy platí

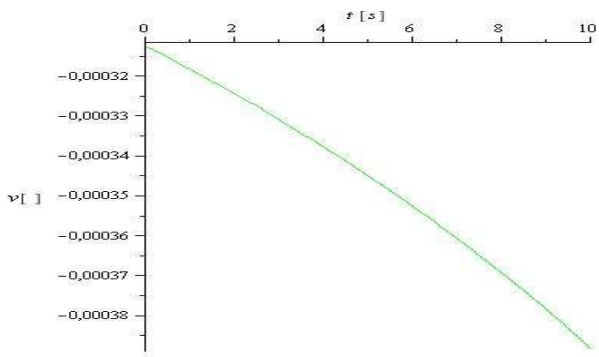
$$\varphi = arcsin\left[u(\varphi_1)\right] = \frac{r\varphi_1}{2hl}\left(2\sqrt{h^2 + l^2 - r\varphi_1}\right) \tag{8}$$

Vstupní parametry a zadání do systému Maple jsou uvedeny v kapitole 5.1. Výsledným grafickým řešením je amplitudová charakteristika a derivace amplitudové charakteristiky.

```
> plot([μ(t)], t = 0..10, labels = ['t [s]','[ ]']);
```



Obr. 5 Převodní funkce



Obr. 6 Derivace převodní funkce

4 STANOVENÍ AMPLITUDOVÉ CHARAKTERISTIKY

Žádný stroj nelze vyrobit s nulovou tolerancí, takže jeho provoz je vždy doplněn mechanickými kmity. Tyto vibrace stojí často za vznikem poruch a poškození strojů. Samostatnou metodou zjišťování těchto stavů strojů je *vibrační diagnostika.*

Druhý praktický úkol, je z oblasti dynamiky. V nezanedbatelném množství případů jde o stanovení kmitů poměrně malých součástí, kde při použití běžných senzorů výchylky, rychlosti nebo zrychlení – akcelerometrů, dojde díky nezanedbatelné hmotnosti senzorů ke změně mechanických vlastností celkové soustavy. Tato situace většinou vybízí k teoretickému řešení, bez vlivů, které by mohly výsledky zkreslit.

4.1 Úvod do kmitání těles a bodů

V technické praxi se setkáváme téměř jen s tělesy, která nejsou dokonale tuhá. Reálně se tudíž chovají pružně a to dost často tak, že je toto pružení nezanedbatelné. Reálná tělesa (soustavy těles) proto modelujeme jako mechanickou soustavu tvořenou tuhými hmotnými členy spojených nehmotnými pružinami. Díky působení vnějších sil, vznikají mezi členy v pružinách direkční síly.

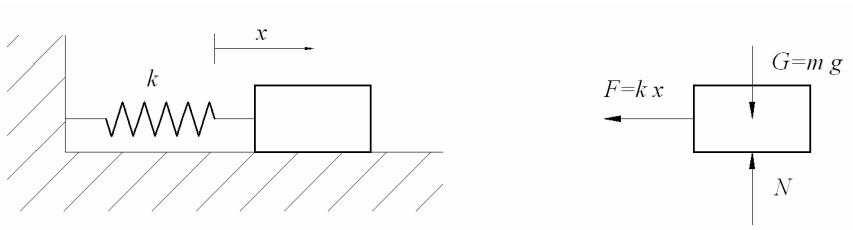
Většina kmitů je v technické praxi nežádoucí. Díky kmitům dochází k většímu namáhání, opotřebení, hlučnosti atd.. Jen v některých případech dochází k umělému vyvolávání kmitů, kterých je využito (např.: vibroseisry, zhutňovače, vibrační pily, kmity bubínku, atd.)

Základní dělení kmitů je na volné a vynucené. Volné kmitání je díky působení elastických sil, které vrací těleso po vychýlení zpátky do původní rovnovážné polohy. Vynucené kmity vznikají působením časově proměnných vnějších sil.

Oba typy kmitů mohou být tlumené i netlumené.

4.2 Volné kmitání netlumené

Analýza pohybu tělesa v jednom směru. Hmotný bod se pohybuje ve směru *y*.



Obr. 7 Působení pružiny na těleso, uvolnění tělesa

Síla působící od pružiny je rovna:

$$F_x = -k.x \tag{9}$$

, kde *x* je výchylka hmotného bodu z rovnovážné polohy a *k* je tuhost pružiny. Pak má pohybová rovnice tvar :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{10}$$

můžeme také použít tvar :

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \tag{11}$$

kde

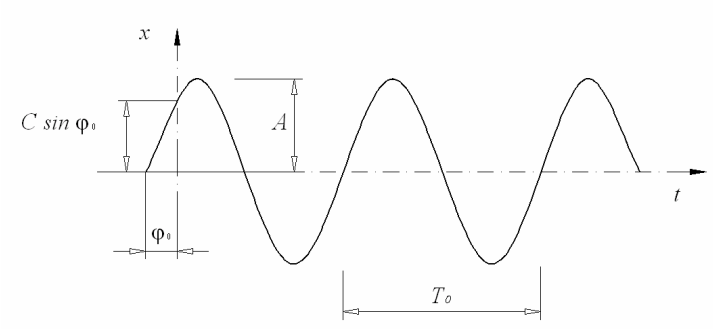
$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{12}$$

Ω_0 je vlastní úhlová frekvence.

Řešení soustavy je na bázi harmonických funkcí, např. :

$$x = x(t) = C\sin\left(\Omega_0 t + \varphi_0\right) \tag{13}$$

kde C je amplituda. φ_0 je počáteční fáze určující výchylku v čase $t = 0$.



Obr. 8 Závislost amplitudy na čase

Perioda kmitu harmonického, nejkratší doba po které se děj opakuje, pohybu je :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{14}$$

Frekvence (převrácená hodnota periody):

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{15}$$

4.3 Volné kmitání tlumené

Vlastní kmity tlumené nastávají v případě, že kromě direkční síly *F=-kx* působí síly odporu prostředí F_o. Jedná se především o Stokesovo tlumení tj. síly viskózní v kapalinách. Tření Coulombovo je doprovázeno rychlým opotřebením pohybujících se součástí. Viskózní tlumení (odporová síla) je úměrné rychlosti $F_o = b\dot{x}$, kde *b* je součinitel lineárního tlumení**.** Pohybová rovnice má potom tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{16}$$

normovaný tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{17}$$

kde

$$\delta = \frac{b}{2m} \tag{18}$$

je součinitel doznívání.

4.4 Vynucené kmity buzené harmonickou silou

Pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^{\,2} x = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \tag{19}$$

Pohybová rovnice je nehomogenní diferenciální rovnicí 2.řádu. Řešení rovnice je $x = x_h + x_p$, kde partikulární řešení podle tvaru pravé strany hledáme na bázi harmonických funkcí. *Při podkritickém tlumení* (b_p<1) řešení homogenní x_h po čase zaniká, kmity se ustálí, průběh těchto ustálených vynucených kmitů je dán řešením partikulárním $x_p = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$. Amplituda ustálených vynucených kmitů s_0 závisí na frekvenci a je dána vztahem

$$s_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\Omega_0^{\,2} - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \tag{20}$$

kde fázový úhel φ mezi výchylkou a budící silou je

$$\varphi = -arctg \frac{2\delta\omega}{\Omega_0^2 - \omega^2}. \tag{21}$$

4.5 Reálně kmitající těleso

Je dána soustava těles dle obr. 9. Těleso *1* je považováno za tyč konstantní tuhosti, těleso *2* za kotouč.

Vlastní deformace tyče se zanedbá (uvažuje se pohyb celku). Na těleso *1* působí v bodě A časově proměnná síla $F(t) = F_0 . \sin \omega . t$ v pásmu frekvence $\omega = \{\omega_1 \le \omega \le \omega_2\}$.

U soustavy se předpokládá, že kmitá vynucenými ustálenými kmity s malými výchylkami.

Úkoly:

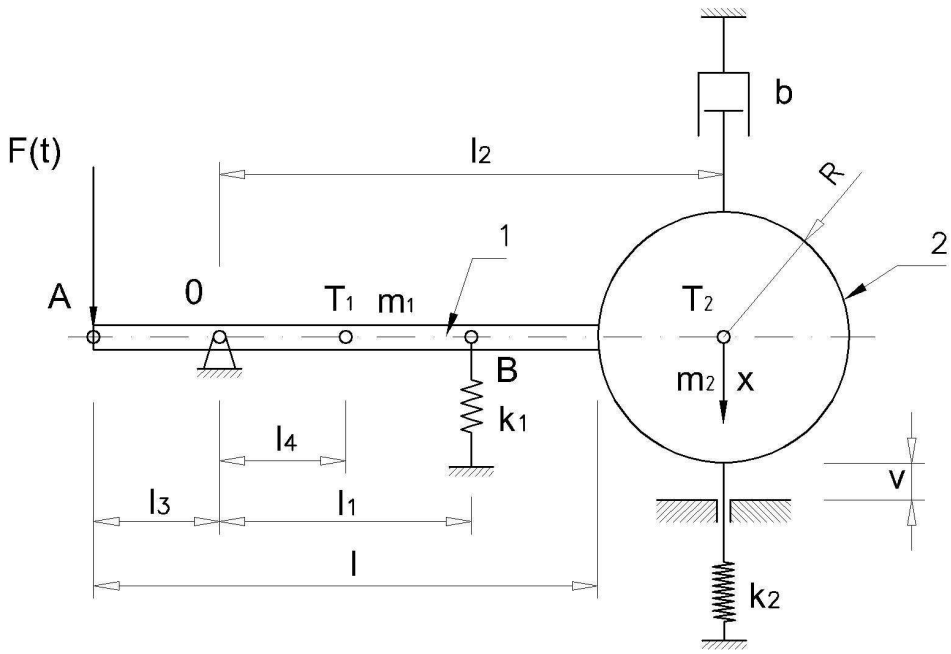
1) Sestavení pohybové rovnice
2) Stanovení vlastní frekvence netlumeného kmitání a A - ω charakteristiky
3) Nakreslení A - ω charakteristiky pro upravenou soustavu, $\omega = \{0 \le \omega \le 80\} \left[s^{-1} \right]$
4) Stanovení amplitudové charakteristiky pro různé hodnoty součinitele doznívání

Hodnoty :

$v = 30\ mm$, $F_0 = 200\ N$, $m_1 = 10\ kg$, $m_2 = 5\ kg$, $l_1 = 0{,}2\ m$,
$l_2 = 0{,}4\ m$, $l = 0{,}4\ m$, $l_3 = 0{,}1\ m$, $l_4 = 0{,}1\ m$, $b = 100\ N.s^{-1}.m$,
$k_1 = 10^4\ N.m^{-1}$, $k_2 = 5.10^3\ N.m^{-1}$. Soustava je v normální poloze.

Rozbor úlohy:

Z vazeb mezi tělesy plyne, že soustava má 1° volnosti a koná vynucené ustálené kmity kolem rovnovážné polohy. Nejdříve nutno nalézt tuto polohu, protože již v tomto stavu může dojít k vymezení vůle v. Z pedagogických důvodů zde budou ukázány všechny reálné možnosti úpravy soustavy.



Obr. 9 Grafické zadání úlohy

Řešení:

1) Sestavení pohybové rovnice :

K sestavení pohybové rovnice budou užity Lagrangeovy rovnice II. druhu, přičemž jako zobecněná souřadnice je zvolen posuv těžiště tělesa *2* $q = x$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_b}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = Q(t) \tag{22}$$

Těleso *1* koná rotační pohyb, těleso *2* obecný rovinný pohyb, potom kinetická energie :

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{1}{2} I_{T_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \omega_2^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 l_4^2\right)\frac{\dot{x}^2}{l_2^2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_2 R^2\right)\frac{\dot{x}^2}{l_2^2} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \tag{23}$$

$$M = \frac{m_1 l^2}{12\, l_2^2} + \frac{m_1 l_4^2}{l_2^2} + m_2 + \frac{m_2 R^2}{2\, l_2^2} \tag{24}$$

energie tlumení :

$$E_b = \frac{1}{2} b \dot{x}^2 = \frac{1}{2} B \dot{x}^2 \tag{25}$$

potenciální energie :

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 - m_1 g \frac{l_4}{l_2} x - m_2 g x = \frac{1}{2} K x^2 - \bar{m} g x \tag{26}$$

kde celkové působení pružin a hmotnosti k bodu T_2 je :

$$K = k_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 + k_2 \tag{27}$$

$$\bar{m} = m_1 \frac{l_4}{l_2} + m_2 \tag{28}$$

zatížení od časově proměnné síly :

$$Q(t) = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial F(t) . \frac{l_3}{l_2} x}{\partial x} = F(t) \frac{l_3}{l_2} = F_0 \frac{l_3}{l_2} \sin \omega t = Q_0 \sin \omega t \tag{29}$$

dosazením vztahů (23) - (28) do (22) se obdrží :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\frac{1}{2} M \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial (\frac{1}{2} M \dot{x}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\frac{1}{2} B \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial (\frac{1}{2} K x^2 - \bar{m} g x)}{\partial x} = Q_0 \sin \omega t \tag{30}$$

po provedení derivace :

$$M \ddot{x} + B \dot{x} + K x - \bar{m} g = Q_0 \sin \omega t \tag{31}$$

$$\ddot{x} + \frac{B}{M} \dot{x} + \frac{K}{M} x = \frac{Q_0 \sin \omega t + \bar{m} g}{M} \tag{32}$$

ad 2) Stanovení vlastní frekvence a A - ω charakteristiky :

na základě tvaru pohybové rovnice (32) pro vlastní frekvenci platí:

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} \tag{33}$$

Zadání a výsledná úhlové frekvence ze systému Maple je:

```
> Ω := sqrt(K/M);
```

$\Omega := 33.67281200$

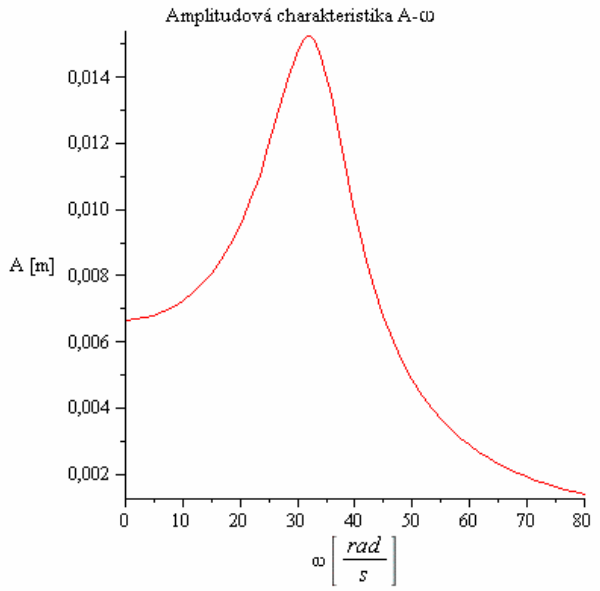
Amplitudová frekvenční charakteristika, pro daný případ :

$$x_D = \frac{Q_O}{K . \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2})^2 \right)^2 + \left(\frac{B}{M . \Omega} . \frac{\omega}{\Omega} \right)^2}} \tag{34}$$

ad 3) Nakreslení A - ω charakteristiky pro upravenou soustavu, vstupní hodnota úhlové frekvence je volena $\omega = \{0 \le \omega \le 80\}\left[s^{-1}\right]$

Vstupní parametry a zadání do systému Maple jsou uvedeny v kapitole 5.2, výsledným řešením je amplitudová charakteristika A - ω.

> $plot([XD(\omega)], \omega = 0..80, color = [red]);$



Obr. 10 Amplitudová charakteristika, výstup Maple

ad 4) Stanovení amplitudových charakteristik pro různé hodnoty součinitele doznívání

Obecně, pro vynucené kmity buzené harmonickou silou, platí :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \tag{35}$$

potom pro součinitel doznívání v zadaném případu platí :

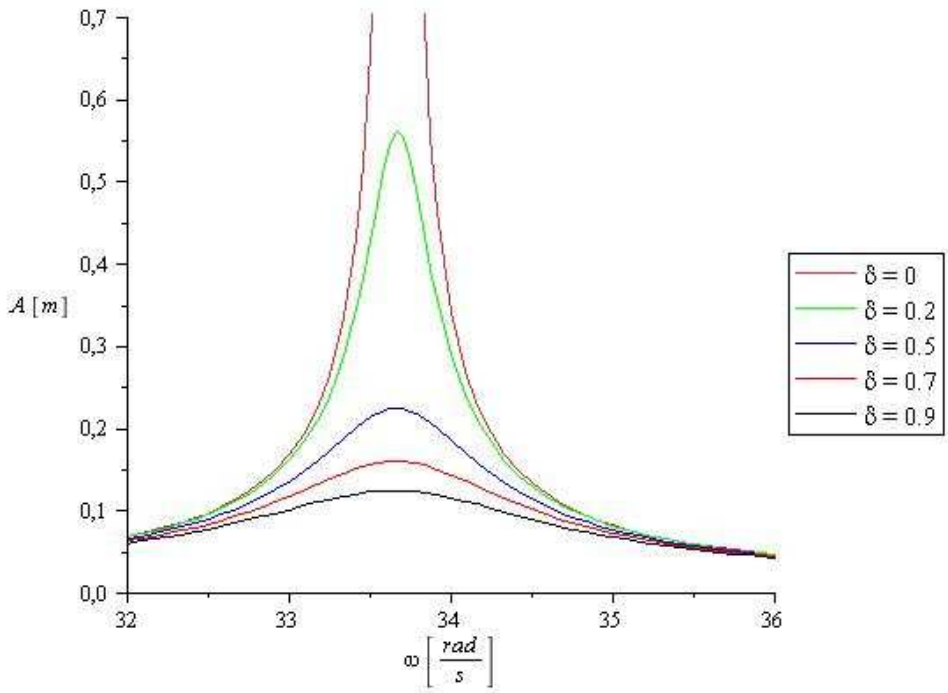
$$2\delta = \frac{B}{M} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{B}{2M} \tag{36}$$

Aby bylo možno vykreslit různé křivky pro různé součinitele tlumení je nutné změnit jednu ze zadaných hodnot na proměnnou. Nejefektivnějším řešením je změna tlumení, která bude dopočtena podle požadované hodnoty součinitele tlumení. Jehož hodnota bude pro grafické řešení nabývat hodnot $\delta = \{0\ ; 0.2\ ; 0.5\ ; 0.7; 0.9\}$. Potom pro tlumení platí :

$$B = 2\delta M \tag{37}$$

Vlastní početní řešení a zadání dat do systému Maple je obsaženo v kapitole 5.2.

```
> plot([XD2(ω), XD3(ω), XD4(ω), XD5(ω), XD6(ω)], ω = 32..36, 0
    ..0.7, color = [orange, green, blue, red, black], labels = [ω, A],
    legend = ['δ = 0.9', δ = 0.7, δ = 0.5, δ = 0.2, δ = 0]);
```



Obr. 11 Závislost křivek pro různá tlumení δ

5 ZADANÁ DATA V SYSTÉMU MAPLE

5.1 Vykreslení převodní a derivace převodní funkce

zdvihová závislost :

> $\varphi := \frac{r*\varphi 1}{2*h*l}(2*\mathrm{sqrt}(h^2 + l^2 - r*\varphi 1));$

$$\phi := \frac{r\,\phi 1\,\sqrt{h^2 + l^2 - r\,\phi 1}}{h\,l}$$

převodní funkce :

> $\mu := diff(\varphi, \varphi 1);$

$$\mu := \frac{r\,\sqrt{h^2 + l^2 - r\,\phi 1}}{h\,l} - \frac{1}{2}\,\frac{r^2\,\phi 1}{\sqrt{h^2 + l^2 - r\,\phi 1}\;h\,l}$$

derivace převodu :

> $v := diff(\mu, \varphi 1);$

$$v := -\frac{r^2}{\sqrt{h^2 + l^2 - r\,\phi 1}\;h\,l} - \frac{1}{4}\,\frac{r^3\,\phi 1}{\left(h^2 + l^2 - r\,\phi 1\right)^{3/2}\,h\,l}$$

úhel pootočení navíjecího bubnu :

> $\varphi 1 := \varpi 1 * t;$

$$\phi 1 := \varpi 1\,t$$

zadání konstantních hodnot :

> $h := 4;\ l := 5;\ r := 0.2;\ \varpi 1 := 5;$

$$h := 4$$

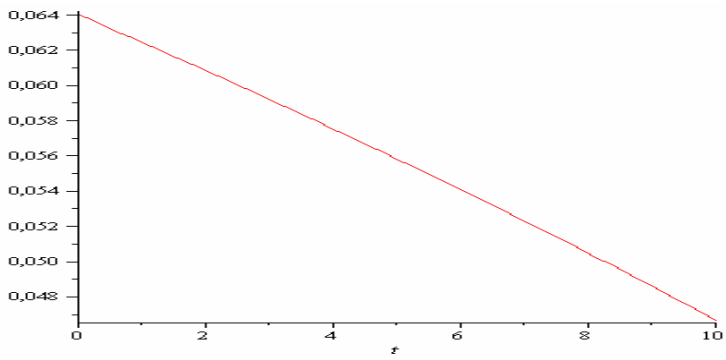
$$l := 5$$

$$r := 0.2$$

$$\varpi 1 := 5$$

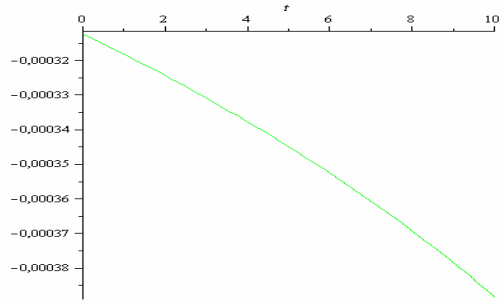
grafický výstup převodní funkce v časovém intervalu 0-10 s

> $plot([\mu(t)], t = 0..10);$



grafický výstup derivace převodní funkce v časovém intervalu 0-10 s

> $plot([v(t)], t = 0..10, color = [green]);$



5.2 Určení amplitudové charakterickу A - ω

> $XD := \dfrac{Q0}{K*\mathrm{sqrt}\left(\left(1-\dfrac{\omega\text{^}2}{\Omega\text{^}2}\right)\text{^}2+\left(\dfrac{B}{M*\Omega}*\dfrac{\omega}{\Omega}\right)\text{^}2\right)};$

$$XD := \frac{Q0}{K\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2+\frac{B^2\,\omega^2}{M^2\,\Omega^4}}}$$

> $\Omega := \mathrm{sqrt}\left(\dfrac{K}{M}\right);$

$$\Omega := \sqrt{\frac{K}{M}}$$

> $K := k1*\left(\dfrac{l1}{l2}\right)\text{^}2+k2;$

$$K := \frac{k1\;l1^2}{l2^2}+k2$$

> $M := \dfrac{m1*l\text{^}2}{12*l2\text{^}2}+\dfrac{m1*l4\text{^}2}{l2\text{^}2}+m2+\dfrac{m2*R\text{^}2}{2*l2\text{^}2};$

$$M := \frac{1}{12}\,\frac{m1\;l^2}{l2^2}+\frac{m1\;l4^2}{l2^2}+m2+\frac{1}{2}\,\frac{m2\;R^2}{l2^2}$$

> $B := b;$

$$B := b$$

> $Q0 := F0*\left(\dfrac{l3}{l2}\right);$

$$Q0 := \frac{F0\;l3}{l2}$$

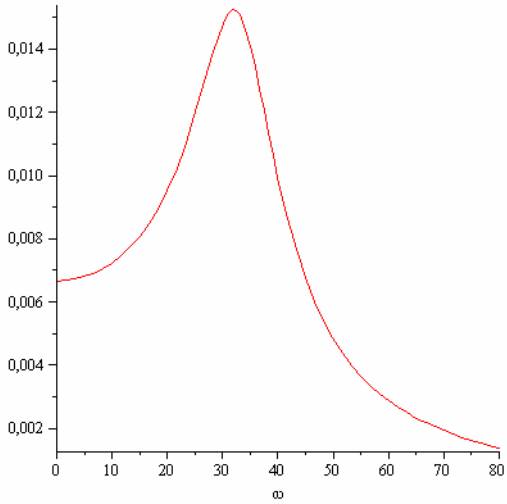
> $m1 := 10;\ m2 := 5;\ k1 := 10000;\ k2 := 5000;\ b := 100;\ l := 0.4;$
$l1 := 0.2;\ l2 := 0.4;$

$$m1 := 10$$
$$m2 := 5$$
$$k1 := 10000$$
$$k2 := 5000$$
$$b := 100$$
$$l := 0.4$$
$$l1 := 0.2$$
$$l2 := 0.4$$

> $F0 := 200;\ l3 := 0.1;\ l4 := 0.1;\ R := l2 + l3 - l;$

$$F0 := 200$$
$$l3 := 0.1$$
$$l4 := 0.1$$
$$R := 0.1$$

> $plot([XD(\omega)], \omega = 0..80, color = [red]);$



> $XDMAX := \dfrac{F0 * \left(\dfrac{l3}{l2}\right)}{b * \Omega};$

$$XDMAX := 0.0148487747$$

> $\delta 2 := 0;\ B2 := 2 * \delta 2 * M;$

$$\delta 2 := 0$$
$$B2 := 0.$$

> $XD2 := \dfrac{Q0}{K * \mathrm{sqrt}\left(\left(1 - \dfrac{\omega\text{^}2}{\Omega\text{^}2}\right)\text{^}2 + \left(\dfrac{B2}{M * \Omega} * \dfrac{\omega}{\Omega}\right)\text{^}2\right)};$

$$XD2 := \frac{0.006666666667}{\sqrt{\left(1 - 0.0008819444442\omega^2\right)^2}}$$

> $\delta 3 := 0.2;\ B3 := 2*\delta 3*M;$

$$\delta 3 := 0.2$$

$$B3 := 2.64583333$$

> $XD3 := \dfrac{Q0}{K*\mathrm{sqrt}\left(\left(1-\dfrac{\omega\text{^}2}{\Omega\text{^}2}\right)\text{^}2+\left(\dfrac{B3}{M*\Omega}*\dfrac{\omega}{\Omega}\right)\text{^}2\right)};$

$$XD3 := \frac{0.006666666667}{\sqrt{\left(1-0.0008819444442\omega^2\right)^2+1.24452160510^{-7}\,\omega^2}}$$

> $\delta 4 := 0.5;\ B4 := 2*\delta 4*M;$

$$\delta 4 := 0.5$$

$$B4 := 6.61458333$$

> $XD4 := \dfrac{Q0}{K*\mathrm{sqrt}\left(\left(1-\dfrac{\omega\text{^}2}{\Omega\text{^}2}\right)\text{^}2+\left(\dfrac{B4}{M*\Omega}*\dfrac{\omega}{\Omega}\right)\text{^}2\right)};$

$$XD4 := \frac{0.006666666667}{\sqrt{\left(1-0.0008819444442\omega^2\right)^2+7.77826002510^{-7}\,\omega^2}}$$

> $\delta 5 := 0.7;\ B5 := 2*\delta 5*M;$

$$\delta 5 := 0.7$$

$$B5 := 9.26041666$$

> $XD5 := \dfrac{Q0}{K*\mathrm{sqrt}\left(\left(1-\dfrac{\omega\text{^}2}{\Omega\text{^}2}\right)\text{^}2+\left(\dfrac{B5}{M*\Omega}*\dfrac{\omega}{\Omega}\right)\text{^}2\right)};$

$$XD5 := \frac{0.006666666667}{\sqrt{\left(1-0.0008819444442\omega^2\right)^2+0.000001524538966\omega^2}}$$

> $\delta 6 := 0.9;\ B6 := 2*\delta 6*M;$

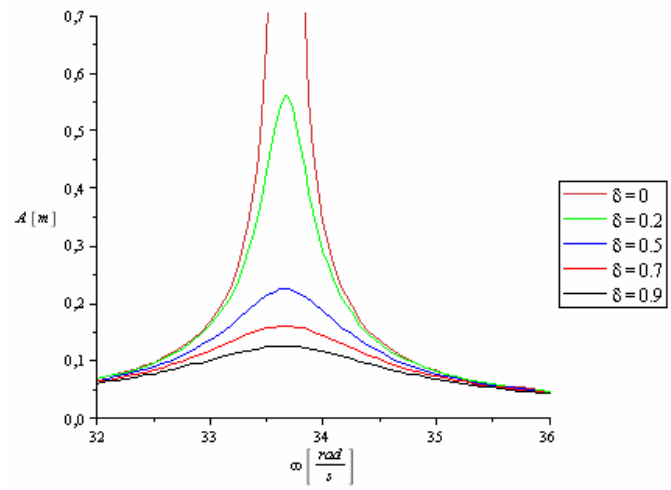
$$\delta 6 := 0.9$$

$$B6 := 11.9062500$$

> $$XD6 := \frac{Q0}{K*\mathrm{sqrt}\left(\left(1-\frac{\omega\text{^}2}{\Omega\text{^}2}\right)\text{^}2+\left(\frac{B6}{M*\Omega}*\frac{\omega}{\Omega}\right)\text{^}2\right)};$$

$$XD6 := \frac{0.006666666667}{\sqrt{\left(1-0.0008819444442\omega^2\right)^2+0.000002520156249\omega^2}}$$

> $plot\Big(\big[XD2(\omega), XD3(\omega), XD4(\omega), XD5(\omega), XD6(\omega)\big], \omega = 32..36, ($
$..0.7, color = [orange, green, blue, red, black], labels = \Big[$
$'\omega\ \left[\frac{rad}{s}\right]','A\ [m]'\Big], legend = ['\delta = 0', \delta = 0.2, \delta = 0.5, \delta = 0.7, \delta$
$= 0.9]\Big);$



>

6 ZÁVĚR

Tato práce si klade za cíl ukázat systém Maple, jako vhodný nástroj k řešení různých typů úloh vyskytujících se v kinematice a dynamice.

Úlohy se mohou jevit jako problematika souvislá pouze s oborem mechaniky. Ovšem provázanost s ostatními obory a činnostmi je nezanedbatelná.

První z úloh je velmi blízká problematice řízení u strojů jakými jsou dopravníky, manipulátory a jim podobná technika. Ze sestavených a užitých rovnic je možné vycházet při řízení rychlosti otáček vzhledem k posuvu jiných členů, kontrola zrychlení při rozjezdu a brzdění stroje, tak aby nedošlo k poškození přepravovaného materiálu.

Druhou úlohu je možné v praxi připodobnit kmitajícímu stroji nebo zatíženému vysokotlakému vedení kapaliny. Pomocí obdobných řešení stanovit maximální povolené amplitudy výkmitu těles. Senzory výchylky v reálném čase kontrolovat pozici tělesa. Na základě vyhodnocení vstupních veličin ze snímačů automaticky zvolit výhodnou regulaci. Touto hodnotou může být změna otáček, změna velikosti budící síly, snížení tlaku apod..

U vyhodnocení amplitudových charakteristik a součinitele útlumu byly výstupy porovnávány s jinými úlohami. Grafy obdobných funkcí vykazují velmi podobné charaktery křivek.

Práce řeší typové úlohy obecně, teprve po té dosazení hodnot pro jeden typový případ. Obdobné typy úloh je možné řešit změnou základních rovnic a konstant a užít práce jako manuálu.

Systém Maple se jeví jako velmi vhodný nástroj, který skýtá téměř neomezené možnosti při řešení matematických problémů. Tyto možnosti, ale naopak přinášejí také problémy v poměrně složitějším zadání dat.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Žák, V.: *Matematické výpočty se systémem Maple*
< http://www.vladimirzak.com/maple/publikace/matematicke_vypocty_maple.pdf >
web: www.vladimirzak.com/maple, email: zakyn@centrum.cz

[2] Hřebíček, J. Kohout, J.: *Úvod do systému Maple*
Fakulta informatiky Masarykovy univerzity v Brně, Brno 2004

[3] Pellant, K.: *Úvod do kmitání bodů a těles*
Brno 2001

[4] Vdoleček, F.: Spolehlivost a technická diagnostika,
Brno

[5] Němec, Z.: Prostředky automatického řízení - elekrické,
Brno 2002

[6] Poliščuk, R.: Titulní strana závěrečné práce,
Brno 2008

[7] Poliščuk, R.: Instrukce pro autory závěrečných prací, 2006,
http://autnt.fme.vutbr.cz/doc/SZZ2006_Instrukce.pdf