



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

NÁVRH DISKRÉTNÍHO REGULAČNÍHO OBVODU ALGEBRAICKÝMI METODAMI ŘÍZENÍ

ALGEBRAIC METHODS OF CONTROL FOR DISCRETE CONTROL CIRCUIT DESIGN

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR ESSAY

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

PETR JURČA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

ING.OLGA DAVIDOVÁ, PH.D.

BRNO 2008

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav automatizace a informatiky

Akademický rok: 2007/08

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jurča Petr

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Aplikovaná informatika a řízení (3902R001)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Návrh diskrétního regulačního obvodu algebraickými metodami řízení

v anglickém jazyce:

Algebraic methods of control for discrete control circuit design

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V diskrétním regulačním lze použít buď regulátor s pevně danou strukturou nebo obecný regulátor. Návrh obecných regulátorů řeší algebraické metody řízení, které pracují s polynomy.

Cíle bakalářské práce:

- Vysvětlit pojem algebra polynomů
- Uvést způsoby řešení diofantické polynomiální rovnice
- Popsat algebraické metody řízení
- Pro zvolené regulované soustavy určit vybranými metodami optimální regulátory
- Provést srovnání a zhodnocení výsledků

Seznam odborné literatury:

BALÁTEĚ, J. Automatické řízení. Praha : Nakladatelství BEN–technická literatura, 2003. 664s. ISBN 80-7300-020-2.

ŠULC, B. & VÍTEČKOVÁ, M. Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2004. 333 strany.

PROKOP, R. & PROKOPOVÁ, Z. Teorie automatického řízení II pro bakalářské studium. Zlín: Vysoké učení technické v Brně, 2000. 80 stran.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Olga Davidová, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2007/08.

V Brně, dne 11. 12. 2007

L.S.



doc. RNDr. Ing. Miloš Šeda, Ph.D.
Ředitel ústavu



doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá diskrétními regulačními obvody, kde lze použít buď regulátor s pevně danou strukturou nebo obecný regulátor. Pro návrh optimálního regulátoru lze použít různé algebraické metody řízení, které pracují s polynomy. V případě jednorozměrových úloh je možno syntézu diskrétního optimálního řízení převést na řešení neurčité (diofantické) polynomiální rovnice.

ABSTRACT

The bachelor essay deals with discreet regulation circuits where it is possible to use either a regulator with fast laid textures or a universal regulator. To propose an optimal regulator it is possible to use various algebraic proceeding methods which polynomial. In case of unidimensional task I converted the synthesis of discreet optimal control to solving inexplicit (Diophantine) polynomial quadratic which is possible to solve by various methods.

KLÍČOVÁ SLOVA

Diskrétní regulační obvod, diskrétní regulátor, algebra polynomů, diofantické polynomiální rovnice, zpětnovazební obvod, stabilita obvodu.

KEYWORDS

Discreet regulation circuit, discreet regulator, algebra of polynomial, Diophantine polynomial quadratic, feedback circuit, circuit stability.

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí mé bakalářské práce, paní Ing. Olze Davidové, Ph.D., za vedení, připomínky a cenné konstruktivní rady.

OBSAH

Zadání závěrečné práce	3
Abstrakt	5
Poděkování	7
Obsah	9
Seznam použitých symbolů	11
1 Úvod	13
2 Regulační obvod	15
2.1 Diskrétní regulační obvod	15
2.2 Diskrétní regulátory	16
2.3 Regulátory s pevně danou strukturou	17
2.4 Obecný lineární regulátor	18
3 Algebra polynomů	21
3.1 Algebraické metody řízení.	21
3.2 Výpočetní operace s polynomy	22
3.3 Diofantické polynomiální rovnice a jejich řešení	23
3.4 Zpětnovazební obvod a jeho stabilita	26
4 Metody návrhů regulátorů	29
4.1 Stabilní časově optimální řízení	29
4.2 Konečné časově optimální řízení	31
4.3 Časově optimální řízení s omezenou velikostí	33
4.4 Kvadraticky optimální řízení.	34
4.5 Kvadraticky optimální řízení s časovým omezením.	34
5 Návrh regulátorů algebraickými metodami řízení	35
5.1 Vzorový příklad návrhu regulátoru	35
5.2 Další příklady	41
6 Závěr.	53
Seznam použité literatury	55

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

$e(t)$	regulační odchylka
$G_S(s)$	přenos regulované soustavy
$G_R(s)$	přenos spojitého regulátoru
$G_R(z)$	přenos diskrétního regulátoru
kT	diskrétní čas
q_0, q_1, q_2	koeficienty pro sestavení rovnice diskrétního regulátoru
r_0	zesílení regulátoru, proporcionální konstanta regulátoru
r_{0k}	kritické zesílení regulátoru
r_1	derivační konstanta regulátoru
r_{-1}	integrační konstanta regulátoru
T_D	derivační časová konstanta
T_I	integrační časová konstanta
T_R	doba regulace
$u(t)$	akční veličina
$v(t), d(t)$	poruchová veličina
$w(t)$	řídící veličina, žádaná veličina
$y(t)$	regulovaná veličina
$y(\infty)$	ustálená hodnota regulované veličiny
a, b, p, q, r, s	libovolné polynomy
d	největší společný dělitel polynomů
$\mathcal{R}[z^{-1}]$	množina všech polynomů v komplexní rovině
∂	stupeň polynomu
$\ \cdot \ _1$	lineární norma

1 ÚVOD

Přestože první praktické použití automatické regulace je velmi staré, začala se teorie řízení systematicky prosazovat až před druhou světovou válkou. V posledních letech prošlo toto odvětví velkým vývojem. Nejprve se pozornost soustřeďovala na soustavy spojitě řízené jednoduchými regulátory proporcionálního, integračního nebo derivačního typu. S vývojem číslicové výpočetní techniky a s potřebou řídit složité procesy vznikla teorie diskrétně řízených soustav, kde funkci regulátoru zastupuje číslicový počítač. Řízená soustava může být svou povahou jak diskrétní, tak i spojitá.

Jelikož tématem mé bakalářské práce je návrh diskrétního regulačního obvodu, budu se zde zabývat převážně pojmy týkající se takového obvodu.

Vlivem Laplaceovy transformace se k popisu diskrétních soustav začalo používat Z transformace. Tato transformace spočívá v možnosti snadného převodu funkce z časové oblasti do oblasti komplexní. Důsledkem toho se pak složité matematické operace v kruhu diferenciálních rovnic, které bychom museli složitě počítat při analýze a syntéze systémů řízení, mohou nahradit mnohem jednoduššími algebraickými operacemi.

Dále je třeba poznamenat, že metodou komplexní oblasti určíme optimální přenos regulátoru, ale nikoli samotný regulátor. Může se stát, že při nevhodné realizaci přenosu regulátoru porušíme stabilitu zpětnovazebního obvodu a tím znehodnotíme celý výsledek.

Pokud je k dispozici stav soustavy, vždy vystačíme s proporcionálním regulátorem. Jeden a tentýž regulátor je optimální pro všechny počáteční stavy soustavy. Regulátor využívající pouze informace o výstupu soustavy je obecně dynamický a je optimální jen pro některý počáteční stav soustavy.

Postupem doby se přišlo na to, že popis chování soustav je záležitost spíše algebry než analýzy. Tato myšlenka vedla k vypracování nové algebraické metody, která je další etapou ve vývoji teorie lineárního řízení. Netradiční přístup vyžaduje i netradiční matematický aparát. Proto bylo nejprve třeba nalézt odpovídající matematický popis soustavy, který by umožnil účinně a jednotně řešit různorodé úlohy o řízení. Je založen na algebře abstraktních polynomů.

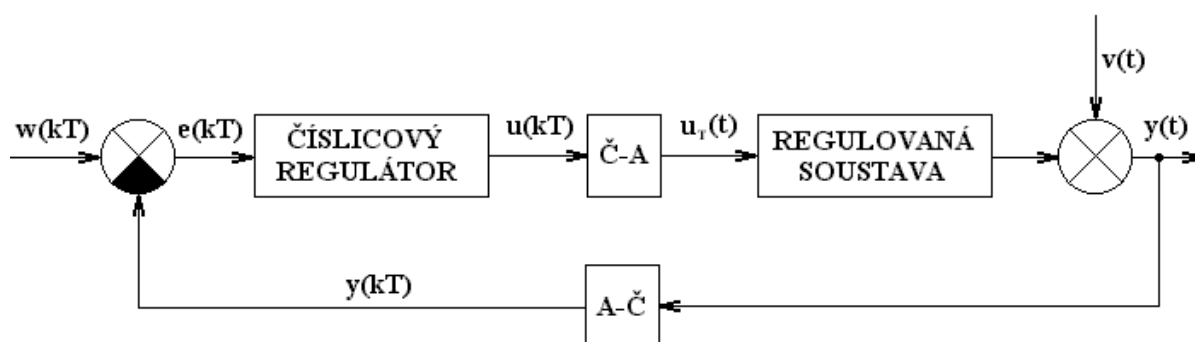
Přestože algebraická teorie řízení je poměrně mladá, doznala již několika významných aplikací a stimulovala několik zajímavých myšlenek. Můžeme jmenovat například problém regulačních obvodů se dvěma regulátory, které umožňují klást požadavky zvlášť na řízení a zvlášť na kompenzaci náhodné poruchy. Další aplikace se využívají při algebraizaci převodu spojitých soustav na diskrétní a naopak, při přepočtech a rozborech spojených se změnou periody vzorkování a při řešení úloh o řízení v obvodu s několika různými periodami vzorkování.

2 REGULAČNÍ OBVOD

Regulační obvod je soubor prostředků, které nám zabezpečí na konkrétním zařízení stálé a požadované hodnoty sledovaných veličin. V regulačním obvodu probíhá regulační pochod, který vzniká připojením regulátoru (řídícího systému), který zajišťuje automatické udržování hodnot sledovaných veličin, k regulované soustavě (řízeného systému).

2.1 DISKRÉTNÍ REGULAČNÍ OBVOD

Vzhledem k zadanému tématu mé bakalářské práce se v dalším pojednání zaměřím na diskrétní regulační obvod. Je to takový obvod, ve kterém aspoň jedna veličina má tvar posloupnosti diskrétních hodnot vytvářených v určitých, časově pravidelně se opakujících okamžicích T , tj. intervalech vzorkování. Diskrétní regulační obvod většinou využívá k výpočtu akční veličiny číslicový počítač. [1]



Obr.1 Blokové schéma diskrétního regulačního obvodu

u_T tvarovaná akční veličina
 k, kT diskrétní čas ($k = 0, 1, 2, \dots$)
 T vzorkovací perioda
 $A - \check{C}$ analogově číslicový převodník
 $\check{C} - A$ číslicově analogový převodník

- **Regulovaná soustava** $G_S(z)$ – řízený systém.
Vše co se děje uvnitř zařízení je chápáno jako vnitřní proces zařízení a z pohledu automatické regulace jsou tyto procesy pro nás nezajímavé.
- **Regulátor** $G_R(z)$ – řídící systém.
Je obecný model kontrolního systému, který přijímá a vyhodnocuje získané informace a na jejich základě pak předává povely regulované soustavě.

- **Regulovaná veličina $y(k)$.**
Zachycuje stav a hodnoty procesu regulované soustavy v čase. Je reakcí regulované soustavy na požadavky regulátoru, popřípadě vnějších poruchových vlivů.
- **Řídící veličina – žádaná veličina $w(k)$.**
Určuje vstupní požadavky kladené na regulovanou soustavu.
- **Akční veličina $u(k)$.**
Za akční veličinu se volí taková fyzikální veličina procesu, která má výrazný vliv na regulovanou veličinu. Je generovaná regulátorem a vyjadřuje hodnoty požadované regulátorem na regulovanou veličinu.
- **Poruchové veličiny $v(t)$, $d(t)$**
Jsou nedeterministické veličiny které přímo či nepřímo ovlivňují správnou regulaci. Jejich působení se projevuje buď jako nežádoucí změny regulované veličiny – poruchová veličina $d(t)$, nebo jako nežádoucí složka připočtená k akční veličině- poruchová složka $v(t)$.
- **Regulační odchylka $e(kT)$.**
Je vstupní veličina regulátoru, která vyjadřuje rozdíl mezi řídicí veličinou a regulovanou veličinou. Obecně se vyjadřuje vztahem $e(kT) = w(kT) - y(kT)$. Obě veličiny jsou vzorkovány v časech kT .
- **Analogově číslicový převodník.**
Převádí posloupnost impulzů, např. výstupu vzorkovacího členu, na posloupnost číselných hodnot, které jsou v normovaném dvojkovém kódu vhodném pro další zpracování číslicovým počítačem. Tento převodník pracuje na straně vstupu číslicového regulátoru.
- **Číslicově analogový převodník.**
Pracuje na výstupní straně číslicového regulátoru a převádí posloupnost výstupních číselných hodnot z počítače na posloupnost impulzů, které jsou následně zpracovány tvarovacím členem.

2.2 DISKRÉTNÍ REGULÁTORY

Podstata činnosti regulátoru je vyhodnocení *regulační odchylky* $e(k)$ na vstupu signálu, zpracování podle řídicích parametrů řízení a následně vytvoření výstupního signálu ve formě *akční veličiny* $u(k)$, která má za cíl působit na regulovanou soustavu tak, aby odchylka byla nulová, nebo velmi malá.

Protože číslicový regulátor nevyhodnocuje informaci v čase spojitě, ale v diskrétních okamžicích, zavádí se převod spojitého času na diskrétní časové okamžiky $t = kT$, kde T je perioda vzorkování. Pro přesnější regulaci je vhodné, aby vzorkovací perioda byla co nejkratší.[3]

Činnost diskrétního regulátoru lze popsat rovnicí ve tvaru

$$u(kT) = r_0 e(kT) + \frac{r_0}{T_I} I(kT) + r_0 T_D D(kT) \quad (2.1)$$

kde

r_0 – je zesílení regulátorů,

$T_I = \frac{r_0}{r_{-1}}$ - je integrační časová konstanta,

$T_D = \frac{r_1}{r_0}$ - je derivační časová konstanta.

2.3 REGULÁTORY S PEVNĚ DANOU STRUKTUROU

Tyto regulátory mají předem známý tvar popsany rovnicí nebo přenosem. Úkolem návrhu je výběr vhodného typu regulátoru a nastavení jeho parametrů. Z odvození vyplynou přepočtové vztahy, pomocí kterých lze provést přiřazení hodnot parametrů q_0 , q_1 , q_2 diskrétního regulátoru k hodnotám parametrů r_0 , T_I a T_D spojitěho *PID* regulátoru.

Většinou se využívá pouze několika způsobů přibližných diskrétních náhrad spojitých algoritmů integrace a derivace.[1]

Hodnoty integrálu $I(kT)$ se nahrazují jedním z následujících algoritmů :

- Stupňovitá náhrada zleva – Zpětná obdélníková metoda ZOBD

$$I(kT) = \int_0^t e(\tau) d\tau \approx T \sum_{i=1}^k e(iT) \cong \frac{Tz}{z-1}, \quad (2.2)$$

- Stupňovitá náhrada zprava – Dopředná obdélníková metoda DOBT

$$I(kT) = \int_0^t e(\tau) d\tau \approx T \sum_{i=0}^{k-1} e(iT), \quad (2.3)$$

- Sečná náhrada – Lichoběžníková metoda LICH0

$$I(kT) = \int_0^t e(\tau) d\tau \approx T \sum_{i=1}^k \frac{e(iT) + [(i-1)T]}{2}. \quad (2.4)$$

Hodnoty derivace $D(kT)$ se nahrazují zpětnou diferencí :

$$D(kT) = \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}. \quad (2.5)$$

Pro malou periodu vzorkování T lze nalézt diskretní náhradu spojitého regulátoru tak, že integrační složku nahradíme sumou a derivační složku zpětnou diferencí 1.řádu. Při nejběžněji používané náhradě integrálu zpětnou obdélníkovou metodou a náhradou derivace zpětnou diferencí, dostáváme pro polohový algoritmus číslicového PSD regulátoru diferenční rovnici [1] [3]

$$u(kT) = r_0 \left\{ e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=1}^k e(iT) + \frac{T_D}{T} \{e(kT) - e[(k-1)T]\} \right\} + u(0). \quad (2.6)$$

Při použití ZOBD náhrady integrační složky vypadá Z – přenos polohového algoritmu PSD regulátoru takto

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = r_0 \left\{ 1 + \frac{T}{T_I} \frac{z}{z-1} + \frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z} \right\}. \quad (2.7)$$

Pro praktické použití je vhodnější pracovat s regulátorem v přírůstkovém, tzv. rekurentním tvaru. Podle tohoto algoritmu se neurčuje celá hodnota $u(kT)$ akční veličiny v daném okamžiku, ale pouze její změna, čili přírůstek $\nabla u(kT) = u(kT) - u[(k-1)T]$. Lze tak vytvořit diferenční rovnici přírůstkového algoritmu [1] [3]

$$\nabla u(kT) = q_0 e(kT) + q_1 e[(k-1)T] + q_2 e[(k-2)T], \quad (2.8)$$

respektive ve tvaru

$$u(kT) = q_0 e(kT) + q_1 e[(k-1)T] + q_2 e[(k-2)T] + u[(k-1)T] \quad (2.9)$$

Z – přenos poslední uvedené rovnice vypadá takto

$$G_R(z) = \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}, \quad (2.10)$$

kde parametry q_0, q_1, q_2 při použití ZOBT jsou rovny

$$q_0 = r_0 \left(1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right), \quad q_1 = -r_0 \left(1 + 2 \frac{T_D}{T} \right), \quad q_2 = -r_0 \frac{T_D}{T}. \quad (2.11)$$

2.4 OBECNÝ LINEÁRNÍ REGULÁTOR

Regulátor, jehož přenos je dán poměrem dvou obecných polynomů, se označuje jako *obecný lineární regulátor*.

$$G_R(z^{-1}) = \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_q z^{-q}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_p z^{-p}} \quad (2.12)$$

Návrh tohoto regulátoru se zaměřuje na stanovení stupňů polynomů Q a P . Jakmile jsou známy stupně, lze nalézt koeficienty v těchto polynomech.

Cílem návrhu je nalézt strukturu přenosu kompenzačního regulátoru. Při syntéze regulačního obvodu dochází k určité optimalizaci struktury, s níž lze dosáhnout určitého požadovaného charakteru funkce regulačního obvodu, jako například minimální počet kroků regulace – tzv. časově optimální řízení. [3] [1]

3 ALGEBRA POLYNOMŮ

Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení vznikla jako speciální obor teorie řízení začátkem sedmdesátých let dvacátého století. V této době dochází k prudkému vývoji výpočetní techniky, která začíná pronikat do všech oblastí lidské činnosti. Také při řízení složitých procesů jsou stále častěji využívány ve funkci regulátorů počítače. Pro modelování na počítači už není postačující dosavadní teorie, která byla vytvořena pro soustavy spojitě řízené jednoduchými regulátory. Vzniká potřeba vybudování nové teorie, která by byla vhodná pro řízení soustav pomocí počítačů, tedy teorie, která by svou podstatou byla diskrétní.

Touto teorií se stala teorie diskrétního lineárního řízení, která se nazývá algebraická, protože pracuje s algebraickými pojmy (*okruh, obor integrity, těleso*) a využívá hlavně algebraickou interpretaci polynomů. Podle ní je polynom $A = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$ chápán ne jako funkce proměnné z , ale jako algebraický objekt, tj. prvek množiny jistých vlastností (podobor integrity), který se zapisuje jako konečná řada určená posloupností reálných čísel.

Tím je možno jednotným způsobem popsat soustavy definované nad libovolnými tělesy. [3]

3.1 ALGEBRAICKÉ METODY ŘÍZENÍ

Tyto metody vycházejí z vnějšího popisu řízeného systému. Přenos lineárního řízeného systému je vyjádřen jako podíl dvou polynomů v komplexní rovině z nebo z^{-1} , tedy jako racionální lomená funkce

$$G_s(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (3.1)$$

Stupeň polynomu a $\partial a = n$, stupeň polynomu b $\partial b = m$. [1]

Nekonečnými posloupnostmi se rozumí formální mocninné řady, které se dělí na stabilní, kauzální a rekurentní. Pomocí těchto formálních řad je definován přenos soustavy. Rekurentní řady charakterizují lineární soustavy a stabilní řady charakterizují stabilní soustavy. Kauzální řady vyznačují fyzikálně realizovatelné soustavy. Základní myšlenka algebraické metody syntézy optimálního řízení využívá toho, že s polynomy je možno pracovat samostatně a algebra racionálních přenosů je převedena na jednodušší algebru polynomů. Cílem teorie je nalézt efektivní algoritmy, vhodné pro zpracování na číslicovém počítači.

Tento přístup má i značné teoretické přednosti. Je elegantní s úspornou formou zápisu všech řešení dané úlohy. Z vlastností polynomiální rovnice lze snadno poukazovat na existenci, jednoznačnost a další důležité vlastnosti řešení dané úlohy.

Tato metoda je vhodná i pro řešení mnohazměrových soustav. Přenos takové soustavy není jednotlivá řada, ale matice řad. Takový přenos pak chápeme jako součin polynomiální matice a převrácené jiné polynomiální matice s ohledem na pořadí.

Teorie vícerozměrových soustav je zobecněním teorie řízení jednorozměrových soustav, ale místo s polynomy pracujeme s polynomiálními maticemi. [1]

3.2 VÝPOČETNÍ OPERACE S POLYNOMY

V této kapitole uvedu přehled nejdůležitějších algoritmů pro operace s polynomy a polynomiálními maticemi, které se využívají při analýze nebo syntéze řídicích obvodů.

Při popisu algoritmů se vždy vychází z polynomů s reálnými koeficienty, které se při praktických výpočtech vyskytují nejčastěji a to i přesto, že většina algoritmů platí pro polynomy s koeficienty v libovolném tělese.

- **Dělení polynomů**

Dělení dává možnost k dvěma daným polynomům $a, b \neq 0 \in \mathcal{R}[z^{-1}]$ určit polynomy $g, h \in \mathcal{R}[z^{-1}]$ tak, že platí

$$a = bg + h.$$

Tyto polynomy jsou určeny jednoznačně podmínkou $\partial h < \partial b$. Jestliže $\partial a < \partial b$, pak $g = 0$ a $h = a$. V opačném případě je třeba od polynomu a odečítat takové násobky polynomu b , které postupně redukuje jeho stupeň. Jakmile $\partial a < \partial b$, výpočet je ukončen.

Algoritmus výpočtu se zapíše následovně :

1. Položíme $g = 0$.
2. Je-li $\partial a < \partial b$, konec.
3. Určíme číslo λ jako podíl koeficientů u nejvyšších mocnin z^{-1} a číslo d jako rozdíl stupňů polynomů a a b .
4. Odečteme polynom b násobený λz^{-d} od polynomu a .
5. Přičteme polynom λz^{-d} k polynomu g .
6. Postup opakujeme od bodu 2.

Po ukončení algoritmu je polynom g na svém místě a polynom h je uložen na místě polynomu a . [2] [1]

- **Největší společný dělitel polynomů**

Toto je velmi důležitý algoritmus, který umožňuje k dvěma daným polynomům $a, b \in \mathcal{R}[z^{-1}]$ nalézt jejich největší společný dělitel $d = (a, b)$ a polynomy p, q a r, s které splňují

$$\begin{aligned} ap + bq &= d \\ ar + bs &= 0. \end{aligned}$$

Nejprve je potřeba určit, který z polynomů a a b má větší stupeň. Od tohoto polynomu se odečtou takové násobky druhého polynomu, které postupně jeho stupeň redukuje. Jakmile jeho stupeň klesne pod stupeň polynomu redukovacího, zamění se úloha obou polynomů. Redukce se provádí tak dlouho, až jeden z polynomů bude nulový. Zbývající polynom je pak největším společným dělitelem d .

Definice uspořádání polynomů a, b, p, q, r, s do matic

$$Q = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Zápis algoritmu :

1. Položíme $p = 1, s = 1, q = 0, r = 0$.
2. Určíme nenulový polynom menšího stupně v matici L . Jsou-li oba polynomy nulové, tak je konec.
3. Je-li polynom nižšího stupně v druhém (spodním) řádku matice L , zaměníme řádky matic Q i L .
4. Je-li polynom v druhém řádku matice L nulový, tak je konec.
5. Určíme číslo λ jako podíl koeficientů u nejvyšších mocnin z^{-1} a číslo ρ jako rozdíl stupňů polynomů v druhém a v prvním řádku matice L .
6. Odečteme první řádek násobený $\lambda z^{-\rho}$ od druhého řádku v matici L i matici Q .
7. Postup opakujeme od bodu 2.

Po ukončení algoritmu je polynom $d = (a, b)$ na místě polynomu a v matici L , na místě polynomu b je nula. Polynomy p, q, r, s jsou na svém místě v matici Q . [2] [1]

Další používané výpočetní metody jsou popsány v [2] . Jsou to například :

- **Rozvoj polynomiálního zlomku**
- **Faktorizace polynomu**
- **Reflexe polynomu**
- **Test stability polynomu**
- **Kvadratická norma stabilní řady**

3.3 DIOFANTICKÉ POLYNOMIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH ŘEŠENÍ

V případě řešení úloh diskrétního řízení, se pohybujeme v okruhu polynomů. Když je dána jednorozměrová úloha, je možnost syntézu diskrétního optimálního řízení převést na řešení *lineární diofantické (neurčité) polynomiální rovnice* ve tvaru

$$ax + by = c, \quad (3.9)$$

kde a, b, c jsou dané polynomy a x, y jsou polynomy neznámé.

Je-li x_0, y_0 řešením rovnice $ax + by = c$ a d největší společný dělitel polynomů a a b , pak platí

$$(a, b) = d, \quad \begin{aligned} a &= da_0 \\ b &= db_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dosazením dostaneme

$$d(ax_0 + by_0) = c \quad (3.11)$$

Z této rovnice plyne, že rovnice $ax + by = c$ má řešení právě když $d = (a, b) \mid c$. Rovnice $ax + by = c$ je lineární rovnice, proto její obecné řešení je součtem partikulárního řešení úplné rovnice a obecného řešení zkrácené rovnice. Je-li x_0, y_0 partikulární řešení rovnice, pak její řešení má tvar

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{(a, b)} t, \\ y &= y_0 - \frac{a}{(a, b)} t, \end{aligned} \quad (3.12)$$

kde t je libovolný polynom $t \in \mathcal{R}[z^{-1}]$. [1]

ZPŮSOBY ŘEŠENÍ DIOFANTICKÝCH ROVNIC

• Řešení diofantické rovnice na základě největšího společného dělitele dvou polynomů

Je-li dána rovnice $ax + by = c$, tak najdeme k polynomům a, b jejich největšího společného dělitele d a pomocné polynomy p, q, r, s takové, že platí

$$\begin{aligned} ap + bq &= d \\ ar + bs &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pro partikulární řešení x_0, y_0 můžeme rovnici $ax + by = c$ psát ve tvaru $ax_0 + by_0 = c$. Vynásobíme-li tuto rovnici podílem $d \mid c$ dostaneme

$$ax_0 \frac{d}{c} + by_0 \frac{d}{c} = d. \quad (3.14)$$

Dále platí

$$x_0 = p \frac{c}{d} \quad y_0 = q \frac{c}{d} \quad (3.15)$$

Nejjednodušší řešení zkrácené rovnice

$$ax + by = 0, \quad (3.16)$$

pro $x = b_0, y = -a_0$ bude

$$ab_0 - ba_0 = 0, \quad (3.17)$$

kde a_0, b_0 jsou nesoudělné polynomy.

Jelikož polynomy r, s v rovnici $ar + bs = 0$ jsou také nesoudělné polynomy, vyplývá z porovnání této rovnice a rovnice $ab_0 - ba_0 = 0$, že

$$r = b_0 = \frac{b}{(a, b)} \quad s = -a_0 = -\frac{a}{(a, b)} \quad (3.18)$$

Na základě (3.12) můžeme psát obecné řešení rovnice $ax + by = c$ ve tvaru

$$x = p \frac{c}{d} + rt \quad y = q \frac{c}{d} + st \quad (3.19)$$

kde $t \in \mathcal{R}[z^{-1}]$ je libovolný polynom. Řešením x, y budou polynomy jen tehdy, když $\frac{c}{d}$ bude polynom, tedy když $d \mid c$. [1]

- **Řešení diofantické rovnice metodou neurčitých koeficientů**

U této metody se určuje jen partikulární řešení rovnice $ax + by = c$. Použitím této rovnice se řeší soustavy lineárních rovnic, které vzniknou porovnáním koeficientů u mocnin z^{-1} v řešené rovnici. Nejdříve se musí určit stupně hledaných polynomů. Většinou zvolíme následující možnost:

$$\begin{aligned} \partial x &= \partial b - 1 \\ \partial y &= \begin{cases} \partial a - 1, & \text{pro } \partial a = \partial b > \partial c \\ \partial c - \partial b, & \text{pro ostatní případy.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Soustava lineárních rovnic má nekonečně mnoho řešení když $(a, b) \neq 1$ dělí c , a má jediné řešení, když $(a, b) = 1$ (polynomy a, b jsou nesoudělné).

Při aplikaci této metody nelze určit obecné řešení rovnice $ax + by = c$. Její pracnost je mnohem větší a rychle vzrůstá se stupněm daných polynomů. [1]

- **Speciální řešení x, y minimalizující stupeň polynomu y**

Při praktických použitích je mezi nekonečně mnoha řešeními rovnice $ax + by = c$ potřeba najít partikulární řešení, které splňují další požadavky podle typu úlohy. Jedním z těchto požadavků je dosažení minimálního stupně polynomu ∂y .

Jestliže je x_0, y_0 libovolné partikulární řešení rovnice $ax + by = c$, pak obecné řešení je ve tvaru

$$x = x_0 + \frac{b}{(a, b)} t, \quad y = y_0 - \frac{a}{(a, b)} t \quad (3.21)$$

pro libovolné $t \in \mathcal{R}[z^{-1}]$.

Při dělení polynomu y_0 polynomem $a \mid (a, b)$, dostaneme podle $b = ap + q$, podíl p a zbytek q ve tvaru

$$y_0 = \frac{a}{(a, b)} p + q. \quad (3.22)$$

Dosazením této rovnice do (3.21) dostaneme

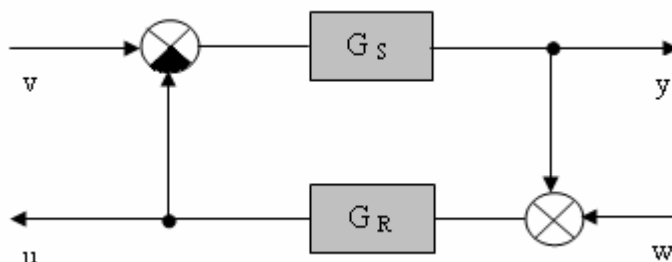
$$y = \frac{a}{(a, b)} p + q - \frac{a}{(a, b)} t = q - \frac{a}{(a, b)} (t - p). \quad (3.23)$$

Při dosazení $t = p$ bude řešení rovnice

$$x = x_0 + \frac{b}{(a, b)} p, \quad y = q. \quad (3.24)$$

Toto řešení je jednoznačné a dává polynom y s minimálním možným stupněm. [1]

3.4 ZPĚTNOVAZEBNÍ OBVOD A JEHO STABILITA



Obr.2 Jednorozměrový diskrétní regulační obvod

Na obr.2 je dán jednorozměrový diskrétní regulační obvod, kde G_S je přenos soustavy v z^{-1}

$$G_S = \frac{b}{a}$$

a G_R je přenos regulátoru v z^{-1} , který obsahuje záporné znaménko zpětné vazby

$$G_R = -\frac{m}{n}.$$

Jde o systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy, pro který můžeme napsat čtyři přenosové funkce mezi vstupy a výstupy.

$$G_{v/y} = \frac{Y(z^{-1})}{V(z^{-1})} = \frac{G_S}{1 - G_S G_R} = \frac{bn}{an + bm}, \quad (3.25)$$

$$G_{w/y} = \frac{Y(z^{-1})}{W(z^{-1})} = \frac{G_S G_R}{1 - G_S G_R} = \frac{-bm}{an + bm}, \quad (3.26)$$

$$G_{v/u} = \frac{U(z^{-1})}{V(z^{-1})} = \frac{G_S G_R}{1 - G_S G_R} = \frac{-bm}{an + bm}, \quad (3.27)$$

$$G_{w/u} = \frac{U(z^{-1})}{W(z^{-1})} = \frac{G_R}{1 - G_S G_R} = \frac{-am}{an + bm}. \quad (3.28)$$

Dále se předpokládá BIBO stabilita, která zajišťuje omezený výstupní signál při omezeném vstupním signálu. Aby byl přenos stabilní musí platit podmínka

$$an + bm = 1 \quad (3.29)$$

Tato diofantická rovnice je podmínkou stability regulačního obvodu. Jde o diofantickou rovnici, jejímž obecným řešením dostaneme stabilizující regulátory. Uvádíme-li obecné řešení diofantické rovnice ve tvaru

$$n = n_0 + bt, \quad m = m_0 - at, \quad (3.30)$$

kde t je libovolný parametr $t \in \mathcal{R} [z^{-1}]$ a n_0, m_0 její partikulární řešení, pak přenosy všech stabilizujících regulátorů zapisujeme v parametrickém tvaru

$$G_R = -\frac{m_0 - at}{n_0 + bt} , \quad n_0 + bt \neq 0 . \quad (3.31)$$

Výhodou tohoto přístupu je, že najdeme všechny stabilizující regulátory a když potřebujeme regulátory, které mají splňovat další požadavky, hledáme vhodné t tak, aby tyto další podmínky byly splněny.[1]

4 METODY NÁVRHŮ REGULÁTORŮ

Pro řízení se obvykle používá zpětnovazební obvodu, ve kterém není řídicí posloupnost generována předem, ale je odvozována pomocí regulátoru z odchylky. Tak se řízení dovídá o nepředpokládaných změnách v obvodu a může je respektovat.

Nejdůležitější podmínkou, která je kladena na zpětnovazební obvod je jeho stabilita. Jen ve stabilním obvodu mohou být rušivé vlivy tlumeny. Podmínky stability představují podstatný rozdíl mezi přímovazebním a zpětnovazebním řízením. Stabilizace zpětnovazební obvodu snižuje kvalitu řízení teoreticky dosažitelnou přímovazebním řízením.

Cílem optimálního zpětnovazební řízení je působit na soustavu tak, aby odchylka řízení byla co nejlepší. Při syntéze tohoto řízení se nejprve určí všechny regulátory, které s danou soustavou dávají stabilní zpětnovazební obvod a mezi nimi se potom najde ten, který minimalizuje kritérium optimality. U této syntézy nelze obejít podmínky stability, které představují rozdíl mezi přímovazebním a zpětnovazebním řízením.

Z níže uvedených metod návrhů regulátorů se budu podrobně věnovat prvním dvěma uvedeným, podle kterých jsem postupoval při návrhu optimálních regulátorů.

4.1 STABILNÍ ČASOVĚ OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ

Cílem je určit přenos regulátoru G_R , který obvod stabilizuje a přitom vytváří takovou stabilní řídicí posloupnost, že odchylka e je konečná posloupnost nejkratšího trvání po uplynutí minimální doby k_{min} .

Nechť je dán přenos regulované soustavy ve tvaru zlomku

$$G_s = \frac{b}{a}, \text{ kde } a, b \in \mathcal{R}[z^{-1}] \quad (a, b) = 1 \quad (4.1)$$

a žádaná posloupnost ve tvaru

$$w = \frac{q}{p}, \text{ kde } p, q \in \mathcal{R}[z^{-1}] \quad (p, q) = 1. \quad (4.2)$$

Zavedeme

$$a_0 = \frac{a}{(a, b)}, \quad p_0 = \frac{p}{(a, b)}, \quad (4.3)$$

Polynomy a_0, p_0 jsou nesoudělné.

Všechny optimální regulátory mají přenos

$$G_R = \frac{m}{n},$$

kde m, n je libovolné řešení podmínkové rovnice stability. Pro regulační odchylku platí

$$e = w - y = w - G_{w/y} w \quad (4.4)$$

Z přenosů (3.26) a (3.28), při splnění $an + bm = 1$ platí

$$G_{w/y} = bm \quad (4.5)$$

$$G_{w/u} = am \quad (4.6)$$

$$G_{w/e} = an \quad (4.7)$$

Po dosazení můžeme psát

$$e = w - bmw = \frac{q}{p} - bm \frac{q}{p}. \quad (4.8)$$

Jestliže má být odchylka od určitého času trvale nulová, musí být e polynom v $\mathcal{R}[z^{-1}]$, pak platí

$$pe = q - bmq. \quad (4.9)$$

Jsou-li podle předpokladů p , e , q polynomy, pak je polynomem i výraz bmq , který si označíme jako zatím neznámý polynom x .

$$bmq = x. \quad (4.10)$$

Pro stabilní m píšeme

$$m = \frac{x}{b^+ q^+}, \quad (4.11)$$

kde x je polynom, který je nutno určit.

Dále dostáváme

$$pe = q - b \frac{xq}{b^+ q^+}. \quad (4.12)$$

Pro regulační odchylku e platí z přenosu $G_{w/e}$ výraz

$$e = G_{w/e} w. \quad (4.13)$$

Pomocí předešlých rovnic dostáváme

$$e = anw = n \frac{qa_0}{p_0}. \quad (4.14)$$

Podle předpokladů jsou q , a_0 , q_0 polynomy. Jestli má být e polynomem, musí být

$$n = p_0 n_0, \quad \text{pak} \quad e = n_0 qa_0 \quad (4.15)$$

Výraz $n_0 qa_0$ musí být polynomem, který můžeme označit jako y .

Pro n_0 píšeme

$$n_0 = \frac{y}{q^+ a_0^+}. \quad (4.16)$$

Dosazením dostaneme

$$e = \frac{y}{q^+ a_0^+} qa_0. \quad (4.17)$$

Porovnáním obou vyjádření velikostí regulační odchylky e , tedy (4.12) a (4.17) dostaneme diofantickou rovnici pro neznámé polynomy x , y ve tvaru

$$p \frac{y}{q^+ a_0^+} qa_0 = q - b \frac{xq}{b^+ q^+}. \quad (4.18)$$

Když vykrátíme stabilní faktory polynomů b , q , a_0 dostaneme

$$q - b^- q^- x = p q^- a_0^- y, \quad (4.19)$$

takže výsledná diofantická rovnice, která zajišťuje konečný počet kroků regulace při zachování stability, bude mít tvar

$$b^- x + p a_0^- y = q^+ . \quad (4.20)$$

Řešením této rovnice dostaneme polynomy x , y a tím prvky m , n přenosu regulátoru.

Pro regulační odchylku platí

$$e = q^- a_0^- y . \quad (4.21)$$

kde jsou polynomy q^- a a_0^- pevně dány. Počet kroků regulace je dán stupněm polynomu e zvýšením o 1. Minimální stupeň polynomu e získáme řešením diofantické rovnice metodou dávající minimální stupeň polynomu y . Doba, po kterou je odchylka nenulová, je rovna počtu koeficientů v polynomu odchylky e . Konečný počet kroků regulace vypočítáme jako

$$k_{\min} = \partial e + 1, \quad (4.22)$$

kde ∂e je stupeň polynomu e .

Pro řídicí posloupnost platí

$$u = G_{w/u} w = a m w = m \frac{q a_0}{p_0} . \quad (4.23)$$

Tato posloupnost bude stabilní, když polynom p_0 bude stabilní, to znamená, když $p^- | a$. [1] [2]

4.2 KONEČNÉ ČASOVĚ OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ

Cílem je určit přenos regulátoru, který obvod stabilizuje a zároveň dosáhne pomocí konečné řídicí posloupnosti odchylky nejkratšího trvání.

Přenos soustavy je dán ve tvaru zlomku

$$G_s = \frac{b}{a}, \quad a, b \in \mathcal{R}[z^{-1}] \quad (a, b) = 1 \quad (4.24)$$

a žádaná posloupnost ve tvaru

$$w = \frac{q}{p}, \quad p, q \in \mathcal{R}[z^{-1}] \quad (p, q) = 1. \quad (4.25)$$

Zavedeme

$$a_0 = \frac{a}{(a, b)}, \quad p_0 = \frac{p}{(a, b)}, \quad (4.26)$$

Polynomy a_0, p_0 jsou nesoudělné.

Hledaný přenos regulátoru je dán výrazem

$$G_R = \frac{m}{n}, \quad (4.27)$$

kde m, n je libovolné řešení podmínkové rovnice stability $an + bm = 1$. Pro stabilní m, n platí vztahy

$$m = \frac{x_1}{q^+}, \quad n = \frac{p_0 y_1}{q^+ a_0^+}, \quad (4.28)$$

kde $x_1, y_1 \in \mathcal{R}[z^{-1}]$ je řešení diofantické rovnice

$$bx = pa_0^- y = q^+ \quad (4.29)$$

Pro regulační odchylku platí

$$e = w - y = w - G_{w/y} w \quad (4.30)$$

Z přenosu (3.26), při splnění $an + bm = 1$ platí

$$G_{w/y} = bm \quad (4.31)$$

Po dosazení píšeme

$$e = w - bmw = \frac{q}{p} - bm \frac{q}{p}. \quad (4.32)$$

Protože odchylka má být trvale nulová po uplynutí konečné doby, musí být e polynom v $\mathcal{R}[z^{-1}]$ a můžeme psát

$$pe = q - bmq.$$

Výraz bmq musí být polynom a proto nejobecnější tvar pro m je

$$m = \frac{v}{b^+ q^+},$$

kde v je nějaký polynom.

Dosazením dostáváme

$$pe = q - b \frac{vq}{b^+ q^+}. \quad (4.33)$$

Pro regulační odchylku e platí z přenosu $G_{w/e}$ vyjádření

$$e = G_{w/e} w. \quad (4.34)$$

Pomocí předešlých rovnic dostáváme

$$e = anw = n \frac{qa_0}{p_0}. \quad (4.35)$$

Má-li být e polynomem, musí být

$$n = p_0 n_0, \quad \text{pak } e = n_0 q a_0 \quad (4.36)$$

Výraz $n_0 q a_0$ musí být polynomem, který můžeme označit jako y .

Nejobecnější volba pro n_0 je

$$n_0 = \frac{y}{q^+ a_0^+}. \quad (4.37)$$

Pro vzniklou regulační odchylku platí

$$e = q^- a_0^- y. \quad (4.38)$$

Konečný počet kroků regulace vypočítáme jako

$$k_{\min} = \begin{cases} 0 & \text{pro } e = 0 \\ 1 + \partial e, & \text{pro } e \neq 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

kde ∂e je stupeň polynomu e .

Z přenosu (3.28), při splnění $an + bm = 1$ ve zpětnovazebním obvodu platí

$$G_{w/u} = am.$$

Řídící posloupnost má obecně tvar

$$u = G_{w/u} w = m \frac{q a_0}{p_0} = \frac{v}{b^+} \frac{q^- a_0}{p_0} \quad (4.40)$$

Protože $(b^+, q^- a_0) = 1$, bude řídící posloupnost konečná když polynom v má tvar

$$v = b^+ x \quad (4.41)$$

pro nějaký zatím ještě neurčený polynom $x \in \mathcal{R}[z^{-1}]$ a přitom polynom p_0 je jednotka v $\mathcal{R}[z^{-1}]$, neboli $p \mid a$. [2]

4.3 ČASOVĚ OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ S OMEZENOU VELIKOSTÍ

Cílem je určit přenos regulátoru, který obvod stabilizuje a přitom konečné posloupnosti odchylky s co nejkratším trváním dosáhne pomocí řídící posloupnosti s omezenou lineární normou. Tím se vyloučí nepřipustně velké řídící zásahy.[2]

4.4 KVADRATICKY OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ

Zde je cílem určit přenos regulátoru, který obvod stabilizuje a přitom vytváří takovou stabilní řídicí posloupnost, že kvadratická norma odchylky nabývá svého minima.[2]

4.5 KVADRATICKY OPTIMÁLNÍ ŘÍZENÍ S ČASOVÝM OMEZENÍM

Toto řízení umožňuje minimalizovat kvadratickou normu konečné posloupnosti odchylky za cenu prodloužení řídicího pochodu proti časově optimálnímu. Cílem je vhodně zkombinovat časově a kvadraticky optimální řízení.[2]

5 NÁVRH REGULÁTORŮ ALGEBRAICKÝMI METODAMI ŘÍZENÍ

- V této části navrhnu regulátory s optimálním přenosem, použitím algebraických metod:
- Stabilní časově optimální řízení.
 - Konečné časově optimální řízení.

První příklad vzorově zpracuji včetně postupu jednotlivých kroků a výpočtů řídicí posloupnosti, regulační odchylky a počtu kroků za které bude odchylka nulová.

5.1 VZOROVÝ PŘÍKLAD NÁVRHU REGULÁTORU

- **Stabilní časově optimální řízení** (metoda 1)

Naleznu takový přenos regulátoru G_r , který stabilizuje obvod a zároveň vytváří takovou stabilní řídicí posloupnost, že odchylka e je konečná posloupnost nejkratšího trvání K_{min} .

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Je dáno $a_0 = \frac{a}{(a,b)}$, $p_0 = \frac{p}{(a,b)}$,

Vypočítám

$$(a, p) = \begin{bmatrix} 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \\ 1 - z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - z^{-1} \\ 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \end{bmatrix} (-2z^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} 1 - z^{-1} \\ 1 - z^{-1} \end{bmatrix} 1$$

$$\begin{bmatrix} 1-z^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(a, p) = d = 1 - z^{-1}$$

$$a_0 = \frac{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}{(1-z^{-1})} = 1-2z^{-1}$$

$$p_0 = \frac{(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})} = 1$$

Jestliže chci aby byl obvod časově optimální, musím určit partikulární řešení diofantické rovnice s minimálním stupněm polynomu y . Určím polynomy

$$a_0 = 1-2z^{-1}$$

$$q = 1$$

$$p_0 = 1$$

$$b = 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2}$$

$$a_0^- = 1-2z^{-1}$$

$$q^- = 1$$

$$b^- = 1 - 4z^{-1}$$

$$a_0^+ = 1$$

$$q^+ = 1$$

$$b^+ = 1 - 0,5z^{-1}$$

Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

což je výsledná diofantická rovnice, která zajišťuje konečný počet kroků regulace při zachování stability.

$$(1-4z^{-1})x + (1-z^{-1})(1-2z^{-1})y = 1$$

$$(1-4z^{-1})x + (1-3z^{-1} + 2z^{-2})y = 1$$

$$ax + by = c$$

$$a = 1-4z^{-1}$$

$$b = 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}$$

$$c = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-4z^{-1} \\ 1-3z^{-1} + 2z^{-2} \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}z^{-1} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}z^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-4z^{-1} \\ 1-\frac{5}{2}z^{-1} \end{bmatrix} \quad \frac{5}{8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}z^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-4z^{-1} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{8} + \frac{1}{2}z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1-4z^{-1} \end{bmatrix} \left(-\frac{32}{3}z^{-1} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-5+4z^{-1}}{8} & 1 \\ \frac{3-20z^{-1}+16z^{-2}}{3} & \frac{32}{3}z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \frac{8}{3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-5+4z^{-1}}{8} & 1 \\ \frac{8-24z^{-1}+16z^{-2}}{3} & \frac{-8+32z^{-1}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = \frac{3}{8}, \quad \frac{c}{d} = \frac{3}{8}$$

$$x_1 = p \frac{c}{d} = \frac{-5+4z^{-1}}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{-5+4z^{-1}}{3}$$

$$y_1 = q \frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$m = \frac{x_1}{b^+ q^+} = \frac{\frac{-5+4z^{-1}}{3}}{(1-0,5z^{-1}) \cdot 1} = \frac{-5+4z^{-1}}{3 \cdot (1-0,5z^{-1})}$$

$$n = \frac{p_0 y_0}{q^+ a_0^+} = \frac{1 \cdot \frac{8}{3}}{1 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

Optimální regulátor je dán přenosem

$$G_R = \frac{m}{n}$$

$$G_R = \frac{\frac{-5+4z^{-1}}{3 \cdot (1-0,5z^{-1})}}{\frac{8}{3}} = \frac{-5+4z^{-1}}{8-4z^{-1}}$$

Tento regulátor generuje řídicí posloupnost podle

$$u = m \cdot \frac{q a_0}{p_0}$$

ve tvaru

$$u = \frac{-5+4z^{-1}}{3-1,5z^{-1}} \cdot \frac{1 \cdot (1-2z^{-1})}{1} = \frac{-5+14z^{-1}-8z^{-2}}{3-1,5z^{-1}}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1$$

$$e = 1 \cdot (1-2z^{-1}) \cdot \frac{8}{3} = \frac{8-16z^{-1}}{3}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1+1=2$.

- **Konečné časově optimální řízení (metoda 2)**

Naleznu takový přenos regulátoru Gr , který stabilizuje obvod a konečné posloupnosti odchylky e nejkratšího trvání K_{min} . dosáhne pomocí konečné řídicí posloupnosti.

Zvolená regulovaná soustava má stejný přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Je dáno $a_0 = \frac{a}{(a,b)}, \quad p_0 = \frac{p}{(a,b)},$

Vypočítám $(a, p) = d = 1 - z^{-1}$

$$a_0 = \frac{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 - z^{-1})} = 1 - 2z^{-1} \quad p_0 = \frac{(1 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})} = 1$$

Jestliže chci aby byl obvod časově optimální, musím určit partikulární řešení diofantické rovnice s minimálním stupněm polynomu y . Určím polynomy

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1 - 2z^{-1} & q = 1 & p_0 = 1 & b = 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2} \\ a_0^- = 1 - 2z^{-1} & q^- = 1 & & b^- = 1 - 4z^{-1} \\ a_0^+ = 1 & q^+ = 1 & & b^+ = 1 - 0,5z^{-1} \end{array}$$

Řešení rovnice: $bx + pa_0^-y = q^+,$

$$\begin{aligned} (1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2})x + (1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})y &= 1 \\ (1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2})x + (1 - 3z^{-1} + 2z^{-2})y &= 1 \end{aligned}$$

$$ax + by = c$$

$$\begin{aligned} a &= 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2} \\ b &= 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \\ c &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2} \\ 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \end{bmatrix} \quad 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2} \\ 1,5z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,5z^{-1} \\ 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2} \end{bmatrix} \quad \frac{4}{3}z^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 + \frac{4}{3}z^{-1} & -\frac{4}{3}z^{-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,5z^{-1} \\ 1 - 4,5z^{-1} \end{bmatrix} \quad (-3)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{-6 + 4z^{-1}}{3} & \frac{9 - 4z^{-1}}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,5z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-6 + 4z^{-1}}{3} & \frac{9 - 4z^{-1}}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5z^{-1} \end{bmatrix} \quad 1,5z^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-6 + 4z^{-1}}{3} & \frac{9 - 4z^{-1}}{3} \\ -1 + 3z^{-1} - 2z^{-2} & 1 - 4,5z^{-1} + 2z^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = 1, \quad \frac{c}{d} = 1$$

$$x_1 = p \frac{c}{d} = \frac{-6 + 4z^{-1}}{3} \cdot 1 = \frac{-6 + 4z^{-1}}{3}$$

$$y_1 = q \frac{c}{d} = \frac{9 - 4z^{-1}}{3} \cdot 1 = \frac{9 - 4z^{-1}}{3}$$

$$m = \frac{x_1}{q^+} = \frac{\frac{-6 + 4z^{-1}}{3}}{1} = \frac{-6 + 4z^{-1}}{3}$$

$$n = \frac{p_0 y_0}{q^+ a_0^+} = \frac{1 \cdot \frac{9 - 4z^{-1}}{3}}{1 \cdot 1} = \frac{9 - 4z^{-1}}{3}$$

Optimální regulátor je dán přenosem

$$G_R = \frac{m}{n}$$

$$G_R = \frac{\frac{-6 + 4z^{-1}}{3}}{\frac{9 - 4z^{-1}}{3}} = \frac{-6 + 4z^{-1}}{9 - 4z^{-1}}$$

Tento regulátor generuje řídicí posloupnost podle

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p_0}$$

ve tvaru

$$u = \frac{-6 + 4z^{-1}}{3} \cdot \frac{1 \cdot (1 - 2z^{-1})}{1} = \frac{-6 + 16z^{-1} - 8z^{-2}}{3}$$

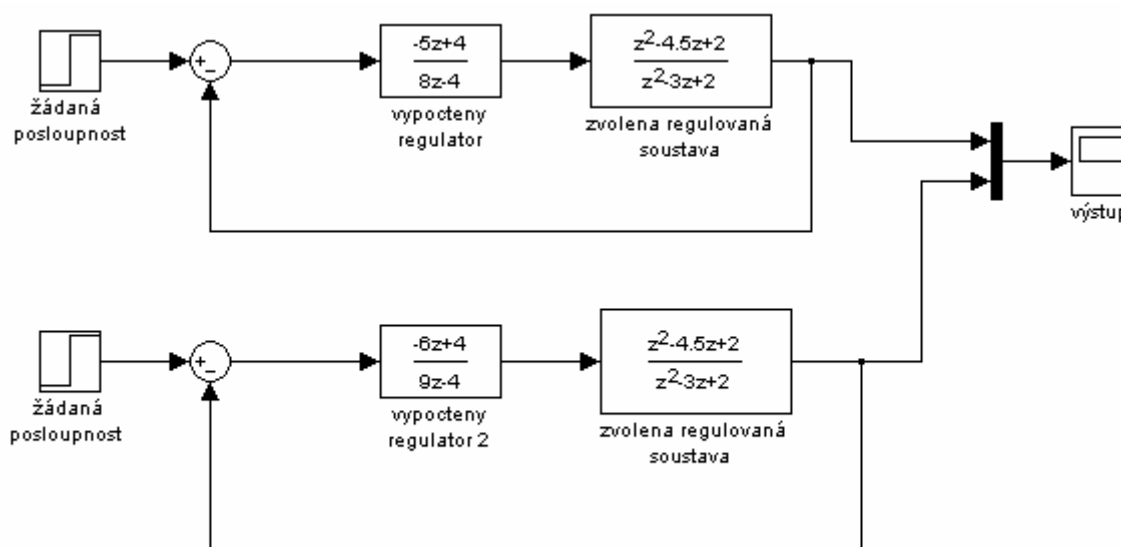
Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1$$

$$e = 1 \cdot (1 - 2z^{-1}) \cdot \left(\frac{9 - 4z^{-1}}{3} \right) = \frac{9 - 22z^{-1} + 8z^{-2}}{3}$$

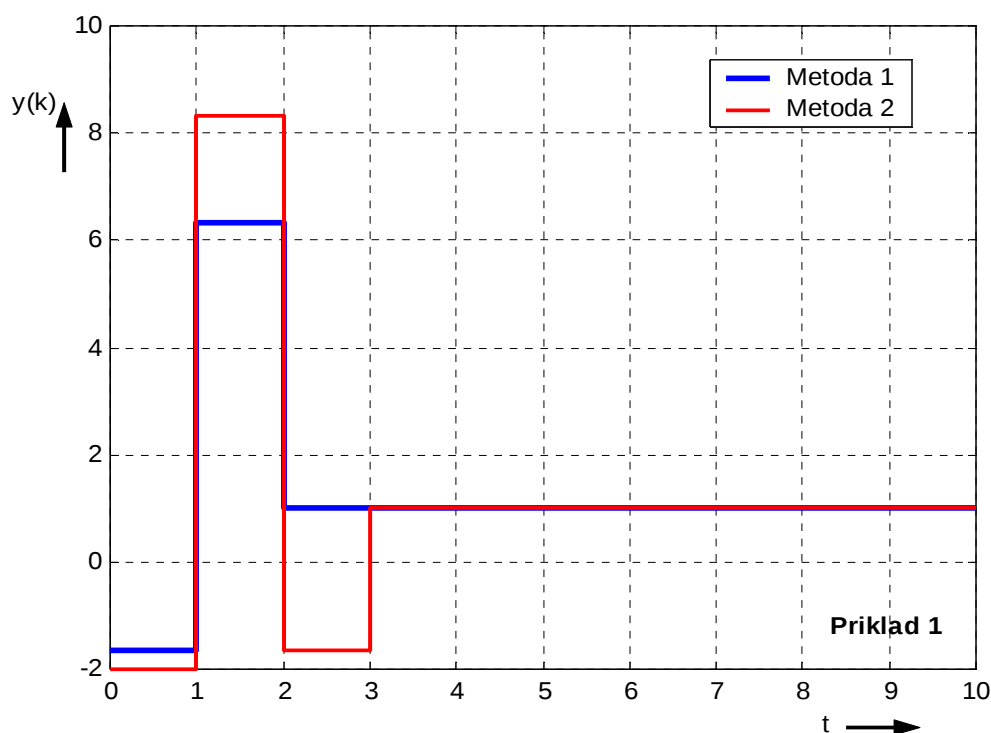
Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 2 + 1 = 3$.

V programu Matlab v prostředí Simulink jsem sestavil diskrétní regulační obvod, obr.3 složený ze vstupu, který je dán žádanou posloupností, vypočtených regulátorů, zvolenou regulovanou soustavou a výstupem.



Obr.3 Blokové schéma regulačního obvodu v prostředí Simulink

Kvalitu regulace jsem následně vyhodnotil pomocí grafu.



Obr.4 Graf – příklad 1

5.2 DALŠÍ PŘÍKLADY

Stejným způsobem jako u vzorového příkladu jsem postupoval u dalších různých příkladů. Zvolil jsem si regulovanou soustavu s různým přenosem a pomocí výpočtů jsem dostal přenos optimálního regulátoru, řídící posloupnost, kterou takový regulátor generuje, regulační odchylku a počet kroků za které bude odchylka nulová.

PŘÍKLAD 2

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{1 - 4z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{(1 - 4z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Metoda 1 Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{\frac{-5+4z^{-1}}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{-5+4z^{-1}}{8}$$

Tento regulátor vytvoří řídící posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{-5+14z^{-1}-8z^{-2}}{3}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = \frac{8-16z^{-1}}{3}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1+1=2$.

Metoda 2 Řešení rovnice: $bx + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{\frac{-5+4z^{-1}}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{-5+4z^{-1}}{8}$$

Tento regulátor vytvoří řídící posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{-5+14z^{-1}-8z^{-2}}{3}$$

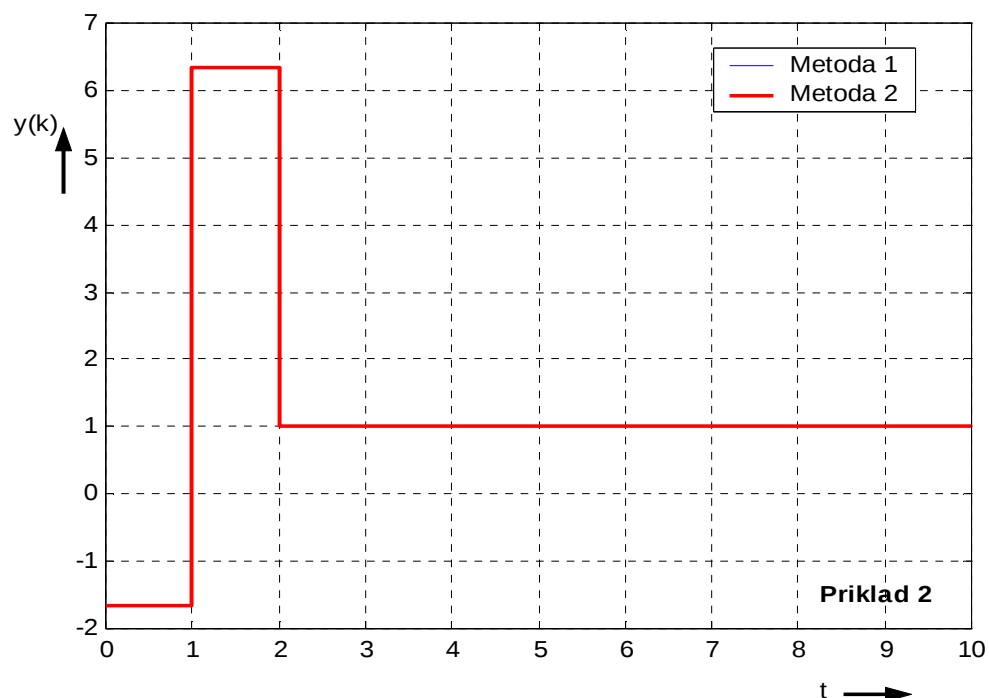
Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = \frac{8-16z^{-1}}{3}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1+1=2$.

Jelikož ve zvolené regulované soustavě má polynom b stejnou hodnotu i u nestabilního polynomu b^- , pak má při řešení obou metod optimální regulátor stejný přenos, řídící

posloupnost i regulační odchylku.



Obr.5 Graf – příklad 2

PŘÍKLAD 3

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{4z^{-1} - z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^{-1}(4 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Metoda 1

Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{3 - 2z^{-1}}{4 - z^{-1}} = \frac{3 - 2z^{-1}}{4 - z^{-1}}$$

Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{3 - 8z^{-1} + 4z^{-2}}{4 - z^{-1}}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = 1 - 2z^{-1}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1 + 1 = 2$.

Metoda 2 Řešení rovnice: $bx + pa_0^- y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{\frac{17 - 10z^{-1}}{21}}{\frac{21 - 5z^{-1}}{21}} = \frac{17 - 10z^{-1}}{21 - 5z^{-1}}$$

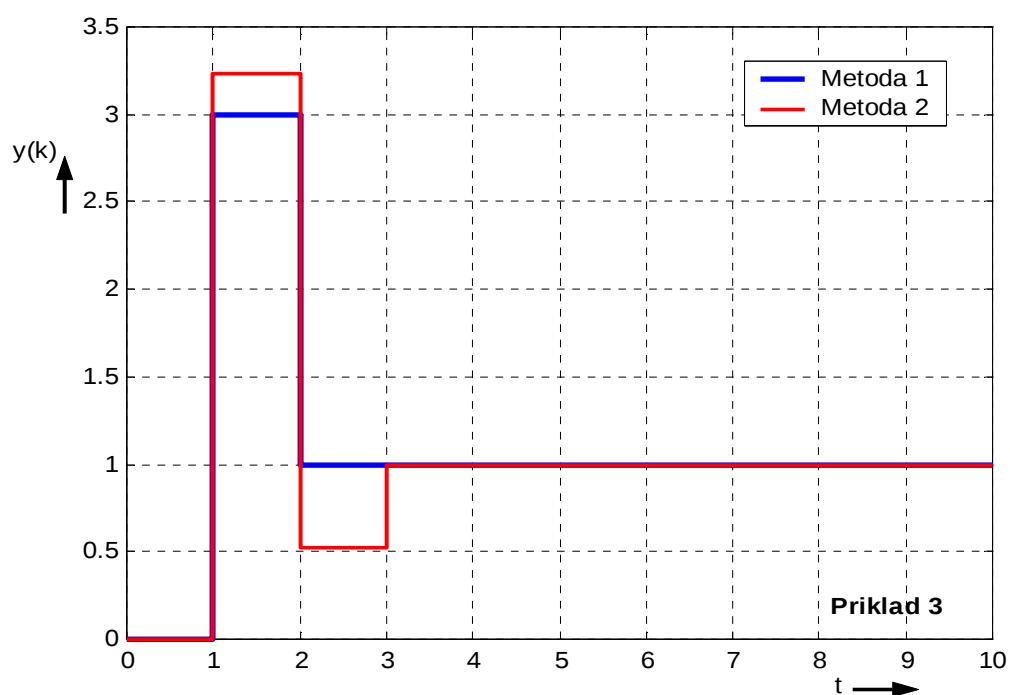
Tento regulátor vytvoří řídící posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{17 - 44z^{-1} + 20z^{-2}}{21}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = \frac{21 - 47z^{-1} + 10z^{-2}}{21}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 2 + 1 = 3$



Obr.6 Graf – příklad 3

PŘÍKLAD 4

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{1 - 2,5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 4z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Metoda 1 Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{3 - 4z^{-1}}{-2} = \frac{3 - 4z^{-1}}{-2 + z^{-1}}$$

Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{3 - 16z^{-1} + 16z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = -2 + 8z^{-1}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1 + 1 = 2$.

Metoda 2 Řešení rovnice: $bx + pa_0^- y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{\frac{26 - 40z^{-1}}{7}}{\frac{-19 + 10z^{-1}}{7}} = \frac{26 - 40z^{-1}}{-19 + 10z^{-1}}$$

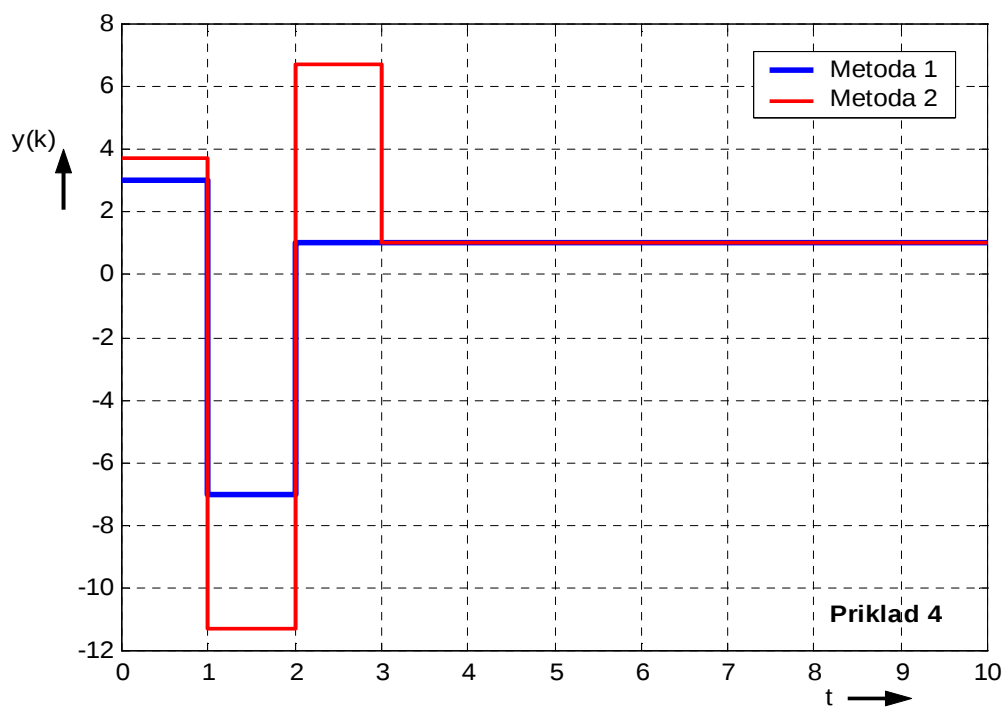
Tento regulátor vytvoří řídící posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{26 - 144z^{-1} + 160z^{-2}}{7}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = \frac{-19 + 86z^{-1} - 40z^{-2}}{7}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 2 + 1 = 3$



Obr.7 Graf – příklad 4

PŘÍKLAD 5

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{z^{-1} - 2,5z^{-2} + z^{-3}}{1 - 5z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(z^{-1} - 2z^{-2})}{(1 - z^{-1})(1 - 4z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Metoda 1 Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{11 - 12z^{-1}}{1 - 6,5z^{-1} + 3z^{-2}}$$

Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{11 - 56z^{-1} + 48z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = 1 - 10z^{-1} + 24z^{-2}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 2 + 1 = 3$.

Metoda 2 Řešení rovnice: $bx + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{180 - 208z^{-1}}{14 - 110z^{-1} + 52z^{-2}}$$

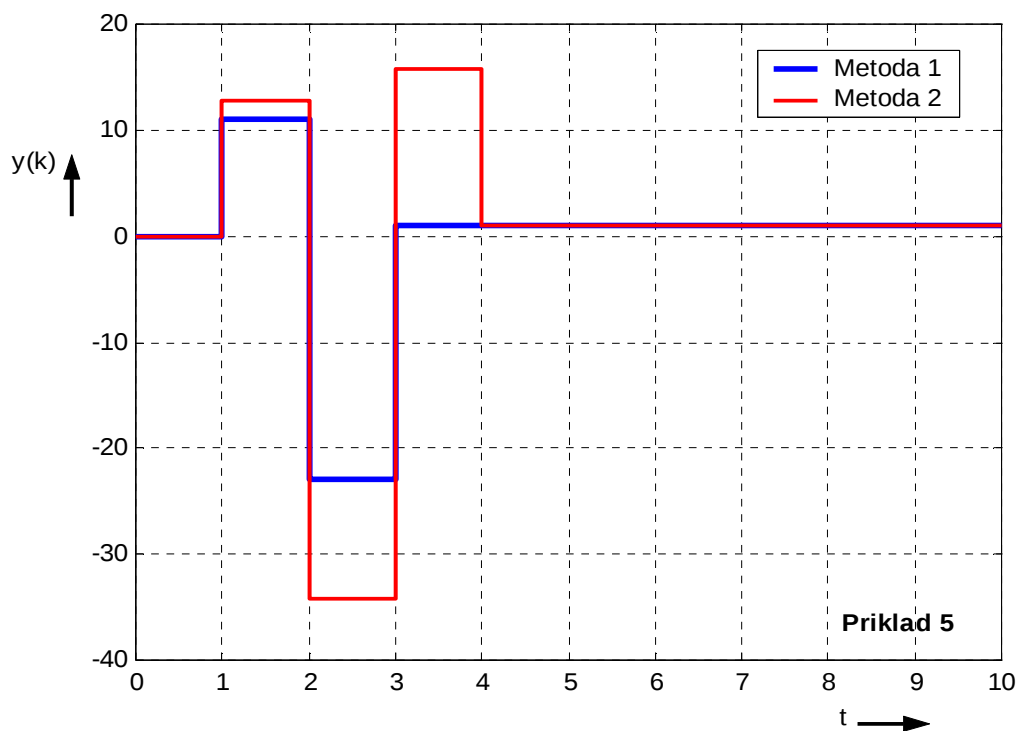
Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{90 - 464z^{-1} + 416z^{-2}}{7}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = \frac{14 - 166z^{-1} + 492z^{-2} - 208z^{-3}}{14}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 3 + 1 = 4$



Obr.8 Graf – příklad 5

PŘÍKLAD 6

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1}(2 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Metoda 1

Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{1}{2 - z^{-1}} = \frac{1}{2 - z^{-1}}$$

Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{1}{2 - z^{-1}}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = 1$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 0 + 1 = 1$.

Metoda 2 Řešení rovnice: $bx + pa_0^- y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

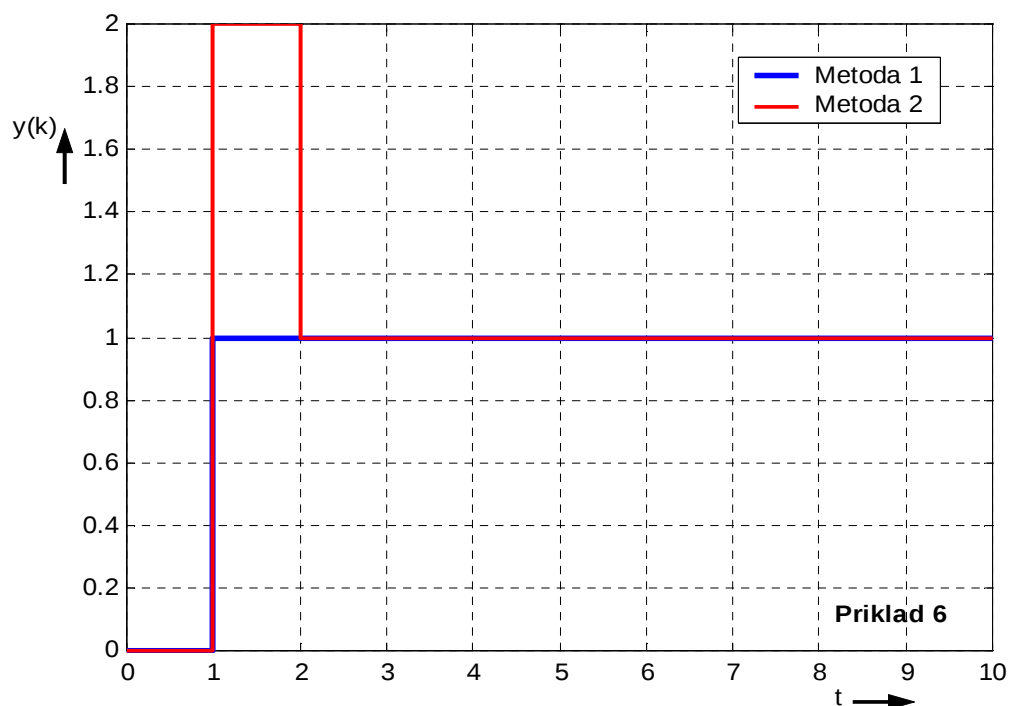
Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = 1$$

Regulační odchylka je

$$e = q^- a_0^- y_1 = 1 - z^{-1}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1 + 1 = 2$



Obr.9 Graf – příklad 6

PŘÍKLAD 7

Zvolená regulovaná soustava má přenos

$$G_s(z) = \frac{b}{a} = \frac{1 - 2,5z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 - z^{-1})}$$

a žádanou posloupnost

$$w = \frac{q}{p} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Metoda 1 Řešení rovnice: $b^-x + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{-1}{\frac{1 - 0,5z^{-1}}{2}} = \frac{-1}{2 - z^{-1}}$$

Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = \frac{-1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Regulační odchylka je

$$e = q^-a_0^-y_1 = 2$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 0 + 1 = 1$.

Metoda 2 Řešení rovnice: $bx + pa_0^-y = q^+$,

Optimální regulátor má přenos

$$G_R = \frac{-2}{3 - 2z^{-1}}$$

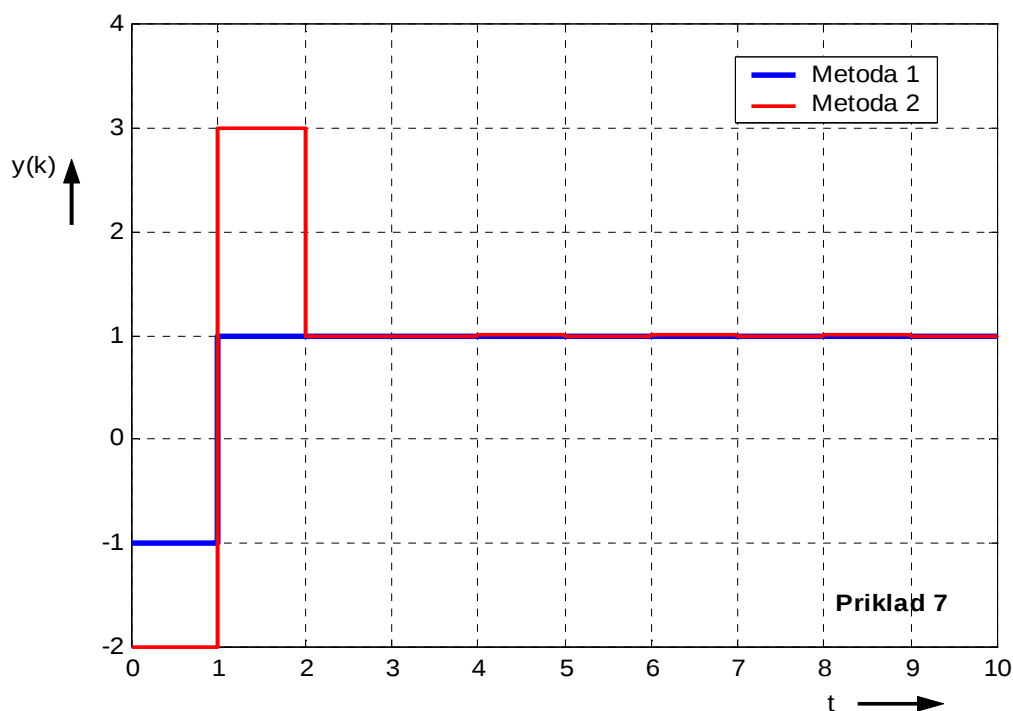
Tento regulátor vytvoří řídicí posloupnost

$$u = m \cdot \frac{qa_0}{p} = -2$$

Regulační odchylka je

$$e = q^-a_0^-y_1 = 3 - 2z^{-1}$$

Počet kroků za které bude odchylka nulová je $k_{min} = \partial e + 1 = 1+1=2$



Obr.10 Graf – příklad 7

Pro vypočítané příklady jsem zvolil zhodnocení z grafů získaných sestavením regulačních obvodů v programu Matlab v toolboxu SIMULINK. Na všech grafech vidíme, že díky algebraickým metodám lze určit optimální přenos regulátoru, který obvod stabilizuje.

Změnami přenosů regulovaných soustav se mění pouze maximální amplituda regulované veličiny a počet kroků za které bude odchylka nulová, dosažená v konečném čase.

Porovnáním obou použitých metod je z grafu patrné, že metoda 1 (stabilní časově optimální řízení) má při stejném přenosu regulované soustavy menší maximální amplitudu regulované veličiny. Metoda 2 (konečné časově optimální řízení) potřebuje k tomu aby regulační odchylka byla nulová o jeden krok navíc.

Pro hledání optimálního přenosu regulátoru je také snadnější metoda 1, jelikož při řešení výsledné diofantické rovnice, která zajišťuje konečný počet kroků při zachování stability, počítáme s nestabilním polynomem b^- , což neobnáší většinou tak zdlouhavé výpočty.

6 ZÁVĚR

V úvodu bakalářské práce se věnuji vývoji teorie řízení a vzniku nové teorie diskrétně řízených soustav. Je zde uvedeno i několik významných aplikací v algebraické teorii řízení, i když tato teorie je ještě poměrně mladá.

Tématem práce je návrh diskrétního regulačního obvodu, na který se zaměřím ve druhé části, dále je vysvětlena podstata činnosti diskrétních regulátorů, regulátory s pevně danou strukturou a popis obecného lineárního regulátoru.

Třetí kapitola je zaměřena na algebru polynomů. Cílem této teorie je nalézt efektivní algoritmy, které jsou vhodné pro zpracování na číslicovém počítači. Dále je v této kapitole uveden přehled nejdůležitějších algoritmů pro operace s polynomy, popsány diofantické polynomiální rovnice a způsoby jejich řešení.

Do následující kapitoly jsem zařadil přehled nejpoužívanějších metod pro návrh regulátorů. Z těchto metod jsem se zaměřil na dvě, které jsem aplikoval při vlastním návrhu optimálních regulátorů.

Závěrečná kapitola začíná podrobným zpracováním vzorového příkladu, včetně postupu jednotlivých kroků a všech výpočtů. Kvalitu regulace jsem následně vyhodnotil pomocí grafu v programu Matlab. Abych mohl lépe vyhodnotit a porovnat danými algebraickými metodami návrh optimálních regulátorů, uvádím zde sedm příkladů s různě zvolenými regulovanými soustavami.

Je velmi důležité, že všechny úlohy lineárního řízení lze převést na diofantickou rovnici stejného typu, jen koeficienty rovnice závisí na povaze úlohy.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BALÁTĚ, J. Automatické řízení. Praha : Nakladatelství BEN-technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-020-2.
- [2] KUČERA, V. Algebraická teorie diskrétního lineárního řízení. Praha : Academia Praha, 1978.
- [3] ŠULC, B.; VÍTEČKOVÁ, M. Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Praha : Vydavatelství ČVUT, 2004.
- [4] PROKOP, R.; PROKOPOVÁ, Z. Teorie automatického řízení II. pro bakalářské studium. Zlín : Vysoké učení technické v Brně, 2000.
- [5] KUČERA, V. Využití polynomiálních metod v řízení technologických procesů. Praha : Seminární kurs ÚTLA ČSAV Praha, 1988.
- [6] ŠLAPAL, J.; KARÁSEK, J. Polynomy a zobecněné polynomy v teorii řízení. Akademické nakladatelství CERM, 2007.
- [7] HAVLENA, V.; ŠTECHA, J. Moderní teorie řízení. Praha : ČVUT Praha, 2000. ISBN 80-01-02095-9.