I. ÚVOD DO TENZOROVÉHO POČTU

Základní rozdíl mezi skalárem a vektorem v $\mathbb{R}^n$ je, že skaláry jsou určeny jedním číslem (svou hodnotou), zatímco vektory v $\mathbb{R}^n$ jsou určeny n hodnotami (souřadnicemi vektoru v nějaké bázi). Ve fyzice, mechanice, geometrii a řadě jiných disciplín se však vyskytují rovněž veličiny, k jejichž určení v soustavě souřadnic je třeba více hodnot. Takovéto veličiny nazýváme tenzory a popisujeme je pomocí souřadnic $T^{ij\dots k}_{\ell m\dots n}$, kde $i, j, \dots, k$ a $\ell, m \dots, n$ jsou indexy (psané nahoru i dolů). Souřadnice tenzoru přitom samozřejmě závisí na volbě souřadné soustavy, takže při přechodu od jedné souřadné soustavy k jiné se čísla $T^{ij\dots k}_{\ell m\dots n}$ obecně mění. Speciálním případem je změna souřadnic u^i vektoru $(u^1, \dots, u^n)$ při změně báze.

Cílem geometrie, fyziky, mechaniky a řady jiných oborů je formulovat zákony příslušné disciplíny ve tvaru, který je nezávislý na takových vnějších okolnostech, jako je volba souřadné soustavy. Takovéto formulace se nazývají **invariantní** vzhledem k transformaci souřadnic. K analytickému vyjádření geometrických, fyzikálních, mechanických a jiných zákonů v invariantním tvaru je velmi vhodný právě tenzorový počet. Tenzory se v těchto disciplínách někdy zavádějí ne příliš jasně jako „čísla s indexy“, která se při změně souřadnic transformují pomocí předepsaných transformačních vztahů. S takto definovanými pojmy je pak obtížné zavádět nějaké operace. V dalším proto zavedeme tenzory korektně – jako jistá multilineární zobrazení. Ukážeme pak ekvivalentnost naší definice tenzoru se souřadnicovými definicemi známými např. z mechaniky. Uvidíme rovněž, že řadu vlastností tenzorů lze popsat geometricky. Není to ale nic překvapujícího, neboť princip invariantnosti (tj. nezávislosti na souřadnicích) je vlastně principem geometrickým. Základní charakteristikou každého geometrického objektu je totiž jeho nezávislost na souřadnicích. To nás vede k přesvědčení, že jednoduchost a elegance vztahů užívajících tenzorového zápisu nemá původ v ničem jiném, než v názornosti a kráse geometrie samotné.

1 LINEÁRNÍ A BILINEÁRNÍ FORMY

V této přípravné kapitole uvedeme některé pomocné pojmy a výsledky z lineární algebry. Abychom zjednodušili zápis vzorců, tak budeme v dalším používat následující **Einsteinovu sumační konvenci**: v součtu $\sum_{i=1}^n x^i y_i$ budeme vynechávat znak sumy, pokud se sčítací index i vyskytuje u jednoho výrazu nahoře a u druhého dole.

V tomto textu budeme uvažovat konečněrozměrné vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze vektorového prostoru V, tak lze každý vektor $u \in V$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru $u = u^i e_i = u^1 e_1 + \dots + u^n e_n$, $u^i \in \mathbb{R}$. Čísla u^i se nazývají *souřadnice vektoru* u vzhledem k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$, píšeme $u = (u^1, \dots, u^n)$. Přitom indexy u souřadnic vektorů budeme psát nahoru (nejedná se tedy o mocniny).

Poznámka 1.1 (Matice přechodu)**.** Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ a $\{b_1, \dots, b_n\}$ jsou dvě báze téhož vektorového prostoru V. Pak každý vektor druhé báze lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků první báze:

$$b_1 = A^k_1 e_k, b_2 = A^k_2 e_k, \dots, b_n = A^k_n e_k \quad \text{(všude se sčítá přes } k). \tag{1}$$

Koeficienty A^i_j tvoří matici, která se nazývá *matice přechodu* od báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ k bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$. Z lineární nezávislosti vektorů obou bází vyplývá, že tato matice je regulární.

Naopak, pro libovolnou regulární matici $A = (A^i_j)$ a libovolnou bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vektorového prostoru V, soustava vektorů $\{b_1, \ldots, b_n\}$ definovaná vztahy (1) tvoří opět bázi V. Snadno dále odvodíme, že je-li A matice přechodu od báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ k bázi $\{b_1, \ldots, b_n\}$, tak matice přechodu od báze $\{b_1, \ldots, b_n\}$ k bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je rovna matici A^{-1}. Je-li dále determinant matice přechodu A kladný, tak říkáme, že báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jsou *shodně orientovány* nebo že určují tutéž *orientaci* vektorového prostoru V. Pokud $|A| < 0$, tak hovoříme o *opačné orientaci.* Tedy všechny báze V se rozdělí do dvou tříd tak, že matice přechodu mezi dvěma bázemi téže třídy má kladný determinant a mezi dvěma bázemi různých tříd záporný. Orientovat V pak znamená zvolit jednu z těchto dvou tříd, jejíž *báze* se nazývají *kladné*, báze druhé třídy *záporné.*

Příklad 1.1. Určíme matici přechodu od báze $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0)$ k bázi $v_1 = (2, 3, 3)$, $v_2 = (1, 3, 2)$, $v_3 = (3, 2, 2)$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Řešení: Rozepsáním (1) dostaneme soustavu lineárních rovnic pro koeficienty matice A. Vyřešením této soustavy obdržíme

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Následující věta popisuje změnu souřadnic vektoru při změně báze.

Věta 1.1. *Nechť $(u^1, \ldots, u^n)$ jsou souřadnice vektoru $u \in V$ v bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a $(\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^n)$ jsou souřadnice téhož vektoru v jiné bázi $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Nechť dále $A = (A^i_j)$ je matice přechodu od první báze k bázi druhé a nechť $\widetilde{A} = A^{-1}$ je matice k ní inverzní. Pak platí následující transformační vztahy*

$$u^i = A^i_j \overline{u}^j, \quad \overline{u}^i = \widetilde{A}^i_j u^j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Důkaz. Ve vztahu $u = u^r e_r = \overline{u}^i b_i$ dosadíme za bázové vektory b_i jejich vyjádření z (1). Dostaneme

$$\sum_r u^r e_r = \sum_i \overline{u}^i \left(\sum_r A^r_i e_r \right) = (\overline{u}^i A^r_i) e_r.$$

Z lineární nezávislosti vektorů $\{e_1, \ldots, e_n\}$ pak plyne první dokazovaný vztah $u^r = A^r_i \overline{u}^i$. Vynásobením zleva inverzní maticí A^{-1} získáme druhý vztah. □

Definice. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $f : V \to W$ je *lineární*, jestliže pro libovolnou dvojici vektorů $u, v \in V$ a pro libovolné číslo $r \in \mathbb{R}$ platí $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $f(r \cdot u) = r \cdot f(u)$. Lineární zobrazení $f : V \to W$ které je navíc bijektivní, se nazývá *izomorfismus* vektorových prostorů V a W. Existenci takového izomorfismu zapisujeme rovností $V \cong W$.

Věta 1.2. *Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Pak $V \cong \mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Pro libovolný vektor $v \in V$ označme $(v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ jeho souřadnice v nějaké bázi V. Definujme zobrazení $f : V \to \mathbb{R}^n$ vztahem $f(v) = (v^1, \ldots, v^n)$. Pak f je hledaný izomorfismus. □

Tedy libovolné dva vektorové prostory stejné konečné dimenze jsou izomorfní.

Definice. Lineární zobrazení $f : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *lineární forma* na V.

Je nabíledni, že součet dvou lineárních forem je lineární forma a násobek lineární formy skalárem je opět lineární forma. Lineární formy na V zřejmě tvoří vektorový prostor, který nazýváme *vektorovým prostorem duálním* k V a značíme V^*.

Příklad 1.2. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak diferenciál funkce f, který přiřadí přírůstku $h \in \mathbb{R}$ číslo $df(x_0)(h) := f'(x_0) \cdot h$ je lineární formou na $\mathbb{R}$.

Příklad 1.3. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V. Každý vektor $v \in V$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $v = v^i e_i$, kde $v^i \in \mathbb{R}$ jsou souřadnice v, tj. $v = (v^1, \dots, v^n)$. Pak zobrazení $e^i : V \to \mathbb{R}$, $e^i(v) = v^i$ je lineární formou na V. Lineární forma e^i tedy přiřadí každému vektoru $v \in V$ jeho i-tou souřadnici v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Speciálně, j-tý bázový vektor $e_j \in V$ má v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ souřadnice $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, takže $e^i(e_j) = \delta^i_j$, kde δ^i_j je *Kroneckerův delta-symbol* definovaný vztahy

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{pro}\, i \neq j, \\ 1 & \text{pro}\, i = j. \end{cases}$$

V dalším budeme používat Kroneckerův delta-symbol s indexy psanými nahoře i dole, tj. $\delta^i_j = \delta^{ij} = \delta_{ij}$.

Tedy každá báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ V indukuje n lineárních forem $e^1, \dots, e^n \in V^*$.

Věta 1.3. *Je-li $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze V, tak lineární formy $e^1, \dots, e^n$ z předchozího příkladu tvoří bázi duálního prostoru V^*.*

Důkaz. Nechť $f \in V^*$, $f : V \to \mathbb{R}$. Pro libovolné i položme $f_i = f(e_i)$. Pak pro libovolné $v = v^i e_i \in V$ platí $f(v) = f(v^i e_i) = v^i f(e_i) = v^i f_i = f_i v^i = f_i \cdot e^i(v)$, neboli $f = f_i e^i$, kde $f_i = f(e_i)$. Zbývá ukázat jednoznačnost: Je-li $f = \overline{f}_i e^i$, pak $(f_i - \overline{f}_i) e^i = 0$, takže $f_i = \overline{f}_i$. □

Platí tedy $\dim V = \dim V^*$, takže $V \cong V^*$.

Definice. Je-li $\{e_1 \dots, e_n\}$ báze V, tak báze $\{e^1, \dots, e^n\}$ duálního prostoru V^* definovaná vztahem $e^i(e_j) = \delta^i_j$ se nazývá *duální báze.*

Je-li $f : V \to \mathbb{R}$ lineární forma na V, $x = x^i e_i \in V$, pak $f(x) = f(x^i e_i) = x^i f_i$, kde $f_i := f(e_i)$. Tedy $f(x)$ je lineárním výrazem souřadnic x^i vektoru x. Čísla f_i nazýváme *souřadnicemi lineární formy* f vzhledem k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Naopak, libovolná uspořádaná n-tice $(f_1, \dots, f_n)$ jednoznačně určuje lineární formu f tak, že f_i jsou její souřadnice v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Věta 1.4. *Nechť $(f_1, \dots, f_n)$ jsou souřadnice lineární formy $f : V \to \mathbb{R}$ vzhledem k bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru V a nechť $(\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_n)$ jsou souřadnice téže lineární formy vzhledem k jiné bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$. Nechť dále $A = (A^i_j)$ je matice přechodu od první báze k bázi druhé. Pak platí*

$$\overline{f}_i = A^j_i f_j.$$

Důkaz. $\overline{f}_i = f(b_i) = f(A^j_i e_j) = A^j_i f(e_j) = A^j_i f_j.$ □

Definice. Zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se nazývá *bilineární forma* na V, je-li g lineární v obou svých vektorových argumentech, tj.

$$g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w), \quad g(c \cdot u, v) = c \cdot g(u,v),$$
$$g(u,v+w) = g(u,v) + g(u,w), \quad g(u, c \cdot v) = c \cdot g(u,v)$$

pro libovolné $u,v,w \in V$, $c \in \mathbb{R}$. Bilineární forma g se nazývá *symetrická*, je-li $g(u,v) = g(v,u) \quad \forall u,v \in V$. Nazývá se *pozitivně definitní*, je-li $g(v,v) > 0 \quad \forall v \in V, v \neq 0$. Symetrická a pozitivně definitní bilineární forma na V se nazývá *skalární součin* na V.

Skalární součin vektorů $u,v \in V$ se někdy značí pouze symbolem $u \cdot v$ bez explicitního uvedení příslušné bilineární formy.

Nechť $\{e_1,\dots,e_n\}$ je báze V a g je bilineární forma na V. Pro $x = x^i e_i, y = y^i e_i \in V$ pak platí $g(x,y) = g(x^i e_i, y^j e_j) = x^i y^j g(e_i,e_j)$.

Definice. Čísla $g_{ij} := g(e_i,e_j)$ se nazývají *souřadnice bilineární formy* g v bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$. Matice $G = (g_{ij})$ se nazývá *maticí bilineární formy* g.

Příklad 1.4. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ s bází $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Pak zobrazení $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definované předpisem $g(x,y) = x^1y^1 - 2x^2y^2 + 3x^1y^2$ je bilineární forma na V, zatímco zobrazení h zadané rovností $h(x,y) = x^2 - y^1 + x^1y^2$ není bilineární formou na V. Dále, matice formy g v bázi $\{e_1,e_2\}$ má koeficienty $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -2$.

Analogicky jako v případě Věty 1.4 se dokáže

Věta 1.5. *Je-li $G = (g_{ij})$ matice bilineární formy g v bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$ a $\overline{G} = (\overline{g}_{ij})$ matice g v bázi $\{b_1,\dots,b_n\}$, tak platí*

$$\overline{g}_{ij} = A^r_i A^s_j g_{rs} \tag{2}$$

kde $A = (A^i_j)$ je matice přechodu od první báze k bázi druhé.

Rovnost (2) je ekvivalentní s maticovým zápisem $\overline{G} = A^T \cdot G \cdot A$, kde A^T je transponovaná matice k A. Protože matice přechodu A je regulární, tak odtud bezprostředně vyplývá, že hodnost matice bilineární formy nezávisí na volbě báze V. Dále zřejmě platí, že bilineární forma g je symetrická právě když její matice vzhledem k libovolné bázi V je symetrická.

Nechť g je skalární součin na V. Pak z pozitivní definitnosti g plyne, že jeho matice (g_{ij}) je regulární. Matice k ní inverzní je opět symetrická, její prvky budeme značit (g^{ij}). Je evidentní, že pro libovolný prvek $u \in V$ je funkce $\widetilde{g}_u : V \to \mathbb{R}$, definovaná předpisem $\widetilde{g}_u(v) = g(u,v)$ lineární formou na V. Tedy každému vektoru $u \in V$ lze pomocí skalárního součinu g na V přiřadit lineární formu $f := \widetilde{g}_u \in V^*$. Je-li $u = (u^1,\dots,u^n)$ a $f = (f_1,\dots,f_n)$, tak $f_i = g_{ij}u^j$. Podle následující věty je toto přiřazení dokonce izomorfismem vektorových prostorů.

Věta 1.6. *Skalární součin g na konečněrozměrném vektorovém prostoru V určuje izomorfismus $F : V \to V^*$, $F(u) = \widetilde{g}_u$.*

Důkaz. Je zřejmé, že zobrazení F je lineární. Nechť dále $\widetilde{g}_u = \widetilde{g}_w$. Pak pro všechna $x \in V$ platí $g(u,x) = g(w,x)$ neboli $g(u-w,x) = 0$. Pro $x = u - w$ dostaneme $g(u-w,u-w) = 0$, neboli $u = w$. Tedy zobrazení F je prosté. Ukážeme ještě, že libovolná lineární forma $f : V \to \mathbb{R}$ je tvaru $f = \widetilde{g}_u$ pro vhodné $u \in V$. Položme $L = \{w \in V; f(w) = 0\}$. Je-li $L = V$, tak stačí položit $u = 0$ a důkaz je ukončen. Předpokládejme tedy, že $L \neq V$ a označme $\overline{L} = \{v \in V; g(w,v) = 0 \forall w \in L\}$. Pak existuje $0 \neq v \in \overline{L}$. Z linearity f dále plyne, že $f(x - \frac{f(x)}{f(v)}v) = f(x) - f(x) = 0$, neboli $w = x - \frac{f(x)}{f(v)}v \in L$ pro libovolné $x \in V$. Položme nakonec $u = \frac{f(v)}{g(v,v)}v$. Pak platí $g(x,u) = g(w + \frac{f(x)}{f(v)}v, \frac{f(v)}{g(v,v)}v) = \frac{f(v)}{g(v,v)}g(w,v) + \frac{f(x)}{f(v)}\frac{f(v)}{g(v,v)}g(v,v) = \frac{f(v)}{g(v,v)} \cdot 0 + f(x) = f(x)$.

□

2 TENZORY

Dosud jsme se zabývali lineárními a bilineárními formami, tj. zobrazeními tvaru $V \to \mathbb{R}$ resp. $V \times V \to \mathbb{R}$, jež byla v každém svém argumentu lineární. Podobně, zobrazení $F : V \times V^* \to \mathbb{R}$, které přiřadí vektoru $v \in V$ a lineární formě $f \in V^*$ hodnotu $f(v)$, je lineární v obou svých argumentech. Zobecněním všech těchto případů je pojem tenzoru.

Definice. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze a F zobrazení

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\,\text{krát}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{s\,\text{krát}} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

které je v každém svém argumentu lineární při pevných hodnotách ostatních argumentů. Pak F se nazývá *r-krát kovariantním a s-krát kontravariantním tenzorem* na V nebo též *tenzorem typu (s,r) na V*. Množinu všech takových tenzorů značíme symbolem $T^r_s V$.

Zřejmě $T^1_0 V = V^*$, $T^0_1 V = V$. Klademe dále $T^0_0 V = \mathbb{R}$. *Stupněm tenzoru* F typu (s,r) rozumíme číslo $s + r$. Tenzor typu (s,r), kde $s \geq 1$, $r \geq 1$ se nazývá *smíšený*.

Příklad 2.1.
(a) Vektory jsou 1 krát kontravariantní tenzory, tj. tenzory typu $(1,0)$.
(b) Lineární formy na V jsou 1 krát kovariantní tenzory, tj. tenzory typu $(0,1)$.
(c) Každá bilineární forma je tenzor typu $(0,2)$ na V. Skalární součin $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se někdy nazývá *metrický tenzor*. Důvodem je skutečnost, že pomocí skalárního součinu vyjadřujeme délku vektorů, $||u|| = \sqrt{g(u,u)}$.
(d) Definujme zobrazení $F : V \times V^* \to \mathbb{R}$ takto: $F(v,f) = f(v)$. Pak F je tenzor typu $(1,1)$ na V.
(e) Smíšený součin vektorů $u \cdot (v \times w)$ v trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ je tenzor typu $(0,3)$ na $\mathbb{R}^3$. Ve výše uvedeném vzorci přitom tečka značí skalární součin a křížek vektorový součin vektorů v $\mathbb{R}^3$.

Příklad 2.2 (Vnější součin vektorů). Nechť $V = \mathbb{R}^n$ a nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kladná ortonormální báze. Pro n vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$ definujme $[u_1, \dots, u_n]$ jako hodnotu determinantu, jehož řádky jsou souřadnice vektorů $u_1, \dots, u_n$ v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$. Protože determinant matice přechodu mezi kladnými ortonormálními bázemi je roven jedné, tak s využitím transformačních vztahů z Věty 1.1 snadno ukážeme, že $[u_1, \dots, u_n]$ nezávisí na volbě kladné ortonormální báze V. Toto číslo nazýváme *vnějším součinem vektorů* $u_1, \dots, u_n$. Z vlastností determinantu plyne, že vnější součin je tenzorem typu $(0,n)$ na V.

Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V, $\{e^1, \dots, e^n\}$ je duální báze V^* a F je tenzor typu $(s,r) \neq (0,0)$. Vezměme r vektorů $v_1, \dots, v_r \in V$ a s lineárních forem $f^1, \dots, f^s \in V^*$. Jejich vyjádření v příslušných bázích V a V^* je $v_1 = v^i_1 e_i, \dots, v_r = v^i_r e_i$ a $f^1 = f^1_j e^j, \dots, f^s = f^s_j e^j$. Pak

$$F(v_1,\dots,v_r,f^1,\dots,f^s)=F(v_1^{i_1}e_{i_1},\dots,v_r^{i_r}e_{i_r},f^1_{j_1}e^{j_1},\dots,f^s_{j_s}e^{j_s})=$$
$$=v_1^{i_1}\dots v_r^{i_r}f^1_{j_1}\dots f^s_{j_s}F(e_{i_1},\dots,e_{i_r},e^{j_1},\dots,e^{j_s}).$$

Definice. Čísla $a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}=F(e_{i_1},\dots,e_{i_r},e^{j_1},\dots,e^{j_s})$, kde všechny indexy probíhají množinu $\{1,\dots,n\}$, se nazývají *souřadnice tenzoru* F vzhledem k bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Každý tenzor je svými souřadnicemi jednoznačně určen, protože pomocí nich dokážeme spočítat hodnotu tenzoru pro libovolnou skupinu r vektorů a s lineárních forem. Hovoříme pak stručně o tenzoru $a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$. Přitom horním indexům říkáme *kontravariantní indexy* a dolním indexům *kovariantní indexy.*

Příklad 2.3. Nechť $\dim V=3$. Pak tenzor typu $(2,1)$ na V má 27 souřadnic a_i^{11}, a_i^{12}, a_i^{13}, a_i^{21}, a_i^{22}, a_i^{23}, a_i^{31}, a_i^{32}, a_i^{33}, kde $i=1,2,3$.

Příklad 2.4. Určíme souřadnice tenzorů z Příkladu 2.1 (a), (d), (e).
ad (a): Každý vektor $v\in V$ je tenzorem typu $(1,0)$. Souřadnice tohoto tenzoru jsou právě souřadnice vektoru v.
ad (d) Souřadnice tohoto tenzoru jsou δ^i_j. Tenzor se souřadnicemi δ^i_j (resp. δ^{ij}, resp. δ_{ij}) se někdy nazývá *Kroneckerův tenzor.*
ad (e): Souřadnice tohoto tenzoru jsou ε_{ijk}, kde $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$, $\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$ a všechny ostatní souřadnice jsou nulové. Označme dále

$$\varepsilon_{i_1\dots i_n}=\begin{cases}1 & \text{je-li}\,(i_1,\dots,i_n)\,\text{sudá permutace z čísel}\,(1,\dots,n),\\ -1 & \text{je-li}\,(i_1,\dots,i_n)\,\text{lichá permutace z čísel}\,(1,\dots,n),\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pak $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ se někdy nazývá *Levi-Civitův tenzor.*

Věta 2.1. *Nechť F je tenzor typu (s,r), jehož souřadnice v bázi $\{e_1,\dots,e_n\}$ prostoru V jsou $a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$. Nechť $\{b_1,\dots,b_n\}$ je jiná báze V, A je matice přechodu od první báze k bázi druhé a nechť $\widetilde{A}=A^{-1}$. Pak nové souřadnice $\overline{a}^{q_1\dots q_s}_{p_1\dots p_r}$ tenzoru F v bázi $\{b_1,\dots,b_n\}$ se vyjádří podle vzorce*

$$\overline{a}^{q_1\dots q_s}_{p_1\dots p_r}=A^{i_1}_{p_1}\dots A^{i_r}_{p_r}\widetilde{A}^{q_1}_{j_1}\dots\widetilde{A}^{q_s}_{j_s}a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}. \tag{2}$$

Důkaz. Pomocí matice přechodu vyjádříme vektory nové báze pomocí báze staré. Pak $\overline{a}^{q_1\dots q_s}_{p_1\dots p_r}=F(A^{i_1}_{p_1}e_{i_1},\dots,A^{i_r}_{p_r}e_{i_r},\widetilde{A}^{q_1}_{j_1}e^{j^1},\dots,\widetilde{A}^{q_s}_{j_s}e^{j_s})$.

□

Poznamenejme, že speciálním případem předchozí věty jsou věty o transformaci souřadnic vektoru, lineární formy a bilineární formy. Tvrzení následující věty se někdy používá k zavedení pojmu tenzoru.

Věta 2.2. *Množina čísel $a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$ závislá na volbě báze vektorového prostoru V představuje souřadnice nějakého tenzoru F typu (s,r) právě když se při změně báze V transformuje pomocí vzorce (2).*

Důkaz. Díky platnosti Věty 2.1 stačí dokázat pouze jeden směr ekvivalence. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báze V, které odpovídá množina čísel $a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$, přičemž tato čísla se při přechodu k jiné bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$ V transformují pomocí vzorce (2). Definujme zobrazení $F : V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}$ takto: Pro r vektorů $v_1 = v^{i_1}_i e_{i_1}, \dots, v_r = v^{i_r}_r e_{i_r}$ a s lineárních forem $f^1 = f^1_{j_1} e^{j_1}, \dots, f^s = f^s_{j_s} e^{j_s}$ položme $F(v_1, \dots, v_r, f^1, \dots, f^s) = v^{i_1}_1 \dots v^{i_r}_r f^1_{j_1} \dots f^s_{j_s} a^{j^1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$. Pak zobrazení F je zřejmě lineární v každém svém argumentu při pevných hodnotách ostatních argumentů. Musíme ještě ukázat, že jeho definice je korektní, tj. nezávislá na volbě báze prostoru V. Vezmeme-li tedy jinou bázi $\{b_1, \dots, b_n\}$ V a jí odpovídající souřadnicové vyjádření $v_1 = \overline{v}^{i_1}_1 b_{i_1}, \dots, v_r = \overline{v}^{i_r}_r b_{i_r}$, $f^1 = \overline{f}^1_{j_1} b^{j_1}, \dots, f^s = \overline{f}^s_{j_s} e^{j_s}$, tak musíme ukázat, že platí $v^{i_1}_1 \dots v^{i_r}_r f^1_{j_1} \dots f^s_{j_s} a^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = \overline{v}^{i_1}_1 \dots \overline{v}^{i_r}_r \overline{f}^1_{j_1} \dots \overline{f}^s_{j_s} \overline{a}^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$.Tato rovnost však bezprostředně plyne z (2), pokud dosadíme za pruhované souřadnice vektorů a lineárních forem odpovídající vztahy z vět 1.1 a 1.4. Přitom využijeme skutečnosti, že součin matice a matice k ní inverzní je matice jednotková, tj. $A^i_k \widetilde{A}^k_j = \delta^i_j$. □

3 OPERACE S TENZORY

Definice. Nechť F a G jsou dva tenzory téhož typu (s, r), $c \in \mathbb{R}$. *Součtem tenzorů* F a G rozumíme tenzor $H = F + G$ typu (s, r) definovaný takto:

$$H(v_1, \dots, v_r, f^1, \dots, f^s) = F(v_1, \dots, v_r, f^1, \dots, f^s) + G(v_1, \dots, v_r, f^1, \dots, f^s).$$

Součinem čísla c a tenzoru F rozumíme tenzor cF typu (s, r) definovaný vztahem

$$(cF)(v_1, \dots, v_r, f^1, \dots, f^s) = c \cdot F(v_1, \dots, v_r, f^1, \dots, f^s)$$

.

Je zřejmé, že $F + G$ a cF jsou opět tenzory typu (s, r) a že $T^r_s V$ je vektorový prostor vzhledem ke sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem. Dosazením bázových vektorů dále bezprostředně ukážeme, že v souřadnicích vypadá sčítání tenzorů a násobení tenzoru skalárem takto:

$$h^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = f^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} + g^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}, \quad (cf)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = c \cdot f^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}.$$

Definice. *Tenzorovým součinem tenzorů* F typu (s_1, r_1) a G typu (s_2, r_2) rozumíme tenzor $F \otimes G$ typu $(s_1 + s_2, r_1 + r_2)$ definovaný takto:

$$\begin{aligned}(F \otimes G)&(v_1, \dots, v_{r_1+r_2}, f^1, \dots, f^{s_1+s_2}) = \\ &= F(v_1, \dots, v_{r_1}, f^1, \dots, f^{s_1}) \cdot G(v_{r_1+1}, \dots, v_{r_1+r_2}, f^{s_1+1}, \dots, f^{s_1+s_2}).\end{aligned}$$

Příklad 3.1. Je-li F typu $(2, 1)$ a G typu $(1, 3)$, tak tenzorový součin $H = F \otimes G$ je tenzor typu $(3, 4)$ definovaný vztahem

$$H(v_1, v_2, v_3, v_4, f^1, f^2, f^3) = F(v_1, f^1, f^2) \cdot G(v_2, v_3, v_4, f^3).$$

V souřadnicích máme $h^{jkq}_{i\ell mp} = f^{jk}_i \cdot g^q_{\ell mp}$.

Je zřejmé, že tenzorové násobení není obecně komutativní.

Definice. Nechť F je smíšený tenzor typu (s,r) a vyberme jeden kovariantní (=dolní) index $i_0 \in \{1,\dots,r\}$ a jeden kontravariantní (= horní) index $j_0 \in \{1,\dots,s\}$. *Kontrakcí (zúžením)* tenzoru F podle indexů i_0 a j_0 rozumíme tenzor C typu $(s-1, r-1)$ definovaný takto:

$$\begin{aligned} C(v_1,\dots,v_{r-1},f^1,\dots,f^{s-1}) &= \\ &= F(v_1,\dots,v_{i_0-1},e_k,v_{i_0+1},\dots,v_{r-1},f^1,\dots,f^{j_0-1},e^k,f^{j_0+1},\dots,f^{s-1}) \quad (1) \end{aligned}$$

(vpravo se sčítá přes k).

Čtenář si jistě všiml, že v definici kontrakce využíváme bázové vektory e_k a e^k. Musíme proto dokázat korektnost předchozí definice, tj. její nezávislost na volbě báze. Vektory jiné báze $\{b_1,\dots,b_n\}$ prostoru V ale můžeme vyjádřit prostřednictvím vztahů (1.1) ve tvaru $b_k = A^\ell_k e_\ell$. Zcela analogicky, pro vektory duální báze máme vztahy $b^k = \widetilde{A}^k_m e^m$. Po dozazení do pravé strany (1) se v důsledku linearity F vytkne výraz $A^\ell_k \widetilde{A}^k_m$, který představuje součin matice přechodu a matice k ní inverzní a je tedy roven δ^ℓ_m. Tedy definice kontrakce nezávisí na volbě báze.

Příklad 3.2.
(a) Nechť $F = (f^{ij}_{k\ell m})$ je tenzor typu $(2,3)$. Určíme jeho kontrakci podle druhého horního a druhého dolního indexu. Výsledný tenzor C bude mít tedy typ $(1,2)$. Podle (1) máme:

$$C(v_1,v_2,f^1) = \sum_r F(v_1,e_r,v_2,f^1,e^r).$$

V souřadnicích, $c^i_{km} = C(e_k,e_m,e^i) = \sum_r F(e_k,e_r,e_m,e^i,e^r) = \sum_r f^{ir}_{krm} = f^{ir}_{krm}$.
(b) Nechť F je tenzor typu $(2,3)$. Označme jeho souřadnice $(f^{\ell m}_{ijk})$. Pak kontrakce F podle třetího dolního a prvního horního indexu je tenzor C typu $(1,2)$, $c^k_{ij} = f^{rk}_{ijr}$.
(c) Kontrakce tenzoru (f^k_{ij}) podle prvního dolního a podle horního indexu je tenzor $c_i = f^r_{ri}$.
(d) Jediná možná kontrakce tenzoru (f^i_j) typu $(1,1)$ je číslo $f^i_i = f^1_1 + \dots + f^n_n \in T^0_0 V = \mathbb{R}$ (*stopa matice*).

Zvedání a spouštění indexů. Tato operace je definována pouze v případě, že na vektorovém prostoru V existuje skalární součin (neboli metrický tenzor) $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Podle Věty 1.6, g zadává izomorfismus $V \to V^*$, $u \mapsto \widetilde{g}_u$, kde lineární forma $\widetilde{g}_u : V \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\widetilde{g}_u(v) = g(u,v)$. Jsou-li $g_{ij} := g(e_i,e_j)$ souřadnice metrického tenzoru g, tak souřadnice lineární formy $f := \widetilde{g}_u$ jsou $f_i = \widetilde{g}_u(e_i) = g(u,e_i) = g(u^r e_r, e_i) = u^r g(e_r,e_i) = g_{ri}u^r$. Nyní budeme demonstrovat operaci spouštění indexu na příkladu tenzoru $F : V \times V \times V^* \to \mathbb{R}$ typu $(1,2)$ (v ostatních případech by byl postup zcela analogický). Definujme tenzor $H : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ typu $(0,3)$ vztahem

$$H(u,v,w) = F(u,v,\widetilde{g}_w). \quad (2)$$

Protože přiřazení $w \mapsto \widetilde{g}_w$ je izomorfisus $V \to V^*$, tak H je opravdu tenzor. Říkáme, že H vznikl z F *spuštěním indexu*. Ukážeme dále, jak tato operace vypadá v souřadnicích. Nechť $\{e_1,\dots,e_n\}$ je báze V, $\{e^1,\dots,e^n\}$ je báze duálního prostoru V^*, (f^k_{ij}) jsou souřadnice tenzoru F a (h_{ijk}) jsou souřadnice H. Pak $h_{ijk} = H(e_i,e_j,e_k) = F(e_i,e_j,\widetilde{g}_{e_k}) = F(e_i,e_j,g_{ks}e^s) = g_{ks}f^s_{ij}$. Máme tedy vzoreček $h_{ijk} = g_{ks}f^s_{ij}$. Naopak, je-li zadán tenzor H, tak můžeme vzít rovnici (2) za definici tenzoru F. Ze vztahů

$$h_{ijk} = f^s_{ij} g_{sk} \quad \text{plyne} \quad f^t_{pq} = g^{tr} h_{pqr},$$

kde (g^{ij}) je matice inverzní k matici (g_{ij}). Operace inverzní ke spouštění indexů se nazývá *zvedání indexů.*

Příklad 3.3. Spuštěním indexu k u tenzoru a^{ik}_{ℓ} dostaneme tenzor $a^{i}_{\ell s}$ definovaný předpisem $a^{i}_{\ell s} = a^{ik}_{\ell} g_{ks}$.

Poznámka 3.1. Operace zvedání a spouštění indexů můžeme rovněž považovat za tenzorové násobení metrickým tenzorem a následnou kontrakci tohoto součinu. Všimněme si dále, že tyto operace nemění stupeň tenzoru. Odtud bezprostředně vyplývá následující fyzikální interpretace zvedání a spouštění indexů: *Nechť je dán nějaký fyzikální objekt, který je v prostoru se skalárním součinem reprezentován tenzorem F typu (s,r). Pak tento objekt lze reprezentovat libovolným tenzorem H typu $(\overline{s},\overline{r})$ takovým, že $s+r=\overline{s}+\overline{r}$.*

Symetrické a antisymetrické tenzory Skalární součin vektorů nezávisí na pořadí vektorových argumentů, zatímco determinant matice změní znaménko při změně pořadí řádků. Výše uvedené tenzory jsou příklady důležité třídy symetrických resp. antisymetrických tenzorů. Budeme nyní předpokládat, že uvažované tenzory nejsou smíšené, jsou tedy typu $(0,r)$ nebo $(r,0)$. Pro jednoduchost se budeme věnovat kovariantním tenzorům (v druhém případě by byl postup zcela analogický).

Definice. Nechť $F \in T^r_0 V$ je kovariantní tenzor. Řekneme, že F je

1. *symetrický*, pokud pro libovolné indexy $1 \le i < j \le r$ a pro libovolné vektory $v_1,\dots,v_r \in V$ platí
$$F(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_r) = F(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_r),$$
2. *antisymetrický*, pokud
$$F(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_r) = -F(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_r).$$

Tedy hodnota symetrického tenzoru $F : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$ nezávisí na pořadí jeho vektorových argumentů. Na druhou stranu, hodnota antisymetrického tenzoru se nezmění, provedeme-li na pořadí vektorů $v_1,\dots,v_r$ sudou permutaci a změní znaménko, provedeme-li lichou permutaci. Pro kontravariantní tenzory definujeme výše uvedené pojmy zcela analogicky. Je dále zcela zřejmé, že symetrické tenzory tvoří vektorový podprostor $\odot^r V \subseteq T^r_0 V$ a antisymetrické tenzory tvoří vektorový podprostor $\Lambda^r V \subseteq T^r_0 V$.

Příklad 3.4.
(a) Příkladem symetrického tenzoru $F \in \odot^2 V$ je skalární součin a příkladem antisymetrického tenzoru $F \in \Lambda^n \mathbb{R}^n$ je vnější součin. Dále, Levi-Civitův tenzor je rovněž antisymetrický.
(b) Nechť $F \in T^3_0 V$ je antisymetrický tenzor. Pak pro jeho souřadnice (f_{ijk}) platí následující vztahy: $f_{ijk} = -f_{ikj} = -f_{jik} = f_{jki} = f_{kij} = -f_{kji}$.

Definice. Nechť $F \in T^r_0 V$. *Symetrizací tenzoru* F rozumíme tenzor $\mathrm{Sym}(F) \in \odot^r V$ definovaný takto: Sečteme všechny hodnoty, kterých F nabývá při všech permutacích daných argumentů a součet vydělíme počtem permutací r prvků. *Antisymetrizací tenzoru* F rozumíme tenzor $\mathrm{Alt}(F) \in \Lambda^r V$ definovaný takto: Sečteme všechny hodnoty, kterých F nabývá při sudých permutacích daných argumentů, odečteme všechny hodnoty, kterých F nabývá při lichých permutacích daných argumentů a výsledek vydělíme počtem permutací r prvků.

Příklad 3.5. Nechť $F = (f_{ijk}) \in T_0^3 V$. Pak $\mathrm{Sym}(F) = \frac{1}{3!}(f_{ijk} + f_{ikj} + f_{jik} + f_{jki} + f_{kij} + f_{kji})$, $\mathrm{Alt}(F) = \frac{1}{3!}(f_{ijk} - f_{ikj} - f_{jik} + f_{jki} + f_{kij} - f_{kji})$.

Každý snadno odvodí následující tvrzení

Lemma 3.1.

1. *$F \in \odot^r V \Rightarrow Sym(F) = F, \quad F \in \Lambda^r V \Rightarrow Alt(F) = F$,*
2. *Každý kovariantní tenzor 2. stupně lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru, tj. pro $F \in T_0^2 V$ platí $F = Sym(F) + Alt(F)$.*

Poznámka 3.2. Je-li $F \in T_0^r V$ tenzor se souřadnicemi $f_{i_1 \dots i_r}$, tak souřadnice symetrického tenzoru $\mathrm{Sym}(F)$ vzniklého z F symetrizací budeme značit $f_{(i_1 \dots i_r)}$ a souřadnice antisymetrického tenzoru $\mathrm{Alt}(F)$ budeme značit $f_{[i_1 \dots i_r]}$. Tedy například $f_{(ij)} = \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji})$, $f_{[ij]} = \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji})$. Rovnost $F = \mathrm{Sym}(F) + \mathrm{Alt}(F)$ z Lemmatu 3.1 můžeme tedy jednoduše zapsat v souřadnicovém tvaru $f_{ij} = f_{(ij)} + f_{[ij]}$.

Symetrický a vnější součin tenzorů Jsou-li oba tenzory F a G symetrické (resp. antisymetrické), tak tenzorový součin $F \otimes G$ obecně nemusí tuto vlastnost zachovávat. Proto zavádíme pojem symetrického a vnějšího součinu tenzorů.

Definice. Nechť $F \in \Lambda^k V$, $G \in \Lambda^\ell V$. *Antisymetrickým (vnějším) součinem tenzorů* F a G rozumíme antisymetrický tenzor $F \wedge G \in \Lambda^{k+\ell} V$ definovaný vztahem

$$F \wedge G = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \mathrm{Alt}(F \otimes G).$$

Symetrickým součinem tenzorů $F \in \odot^k V$ a $G \in \odot^\ell V$ rozumíme symetrický tenzor $F \odot G \in \odot^{k+\ell} V$ definovaný vztahem

$$F \odot G = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \mathrm{Sym}(F \otimes G).$$

Operace symetrického součinu je zřejmě komutativní, zatímco v případě vnějšího součinu se dá ukázat, že platí $F \wedge G = (-1)^{k\ell} G \wedge F$.

Příklad 3.6. Nechť $F, G \in \Lambda^1 V$. Určíme vnější součin $F \wedge G$.
(1) $F \otimes G \in T_0^2 V$, $(F \otimes G)(u, v) = F(u) \cdot G(v)$
(2) $\mathrm{Alt}(F \otimes G) \in \Lambda^2 V$, $\mathrm{Alt}(F \otimes G)(u, v) = \frac{1}{2!}(F(u)G(v) - F(v)G(u))$
(3) $F \wedge G(u, v) = \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{1}{2!}(F(u)G(v) - F(v)G(u)) = F(u)G(v) - F(v)G(u)$.

4 KVADRATICKÉ FORMY

Definice. Vektorový prostor V se skalárním součinem $g : V \times V \to \mathbb{R}$ se nazývá *unitární prostor*.

Např. $\mathbb{R}^n$ je unitární prostor, pokud pro libovolné vektory $u = (u^1, \dots, u^n)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$ definujeme skalární součin předpisem $g(u, v) = u^1 v^1 + \dots + u^n v^n$.

Definice. Nechť V je unitární prostor se skalárním součinem g. Pak reálné číslo $||u|| = \sqrt{g(u,u)}$ se nazývá *délka (velikost) vektoru* u. Vektor u se nazývá *jednotkový*, jestliže $||u|| = 1$. Vektory $u, v \in V$ se nazývají *ortogonální*, jestliže $g(u,v) = 0$. Báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru V se nazývá *ortogonální báze*, jestliže každé dva různé vektory z této báze jsou ortogonální. Tato báze se nazývá *ortonormální báze* V, je-li navíc každý vektor e_i jednotkový.

Je zřejmé, že báze $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru V je ortonormální právě když souřadnice g_{ij} skalárního součinu $g : V \times V \to \mathbb{R}$ splňují $g_{ij} = \delta_{ij}$. Pro $u = u^i e_i, v = v^i e_i \in V$ pak dostaneme $g(u,v) = \sum_{i=1}^n u^i v^i$, $||u|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u^i)^2}$.

Nechť $v_1, \dots, v_k$ je posloupnost vektorů prostoru V. Položme $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k; c_i \in \mathbb{R}\}$. Tato množina je vektorovým podprostorem prostoru V a nazývá se *podprostor generovaný vektory* $v_1, \dots, v_k$.

Věta 4.1. *Nechť $v_1, \dots, v_k$ je posloupnost lineárně nezávislých vektorů unitárního prostoru V. Pak existuje taková ortonormální posloupnost vektorů $e_1, \dots, e_k$ prostoru V, že platí $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.*

Důkaz. Definujme nejdříve jednotkový vektor e_1 předpisem $w_1 = v_1$, $e_1 = \frac{w_1}{||w_1||}$. Položme dále $w_2 = v_2 - g(v_2, e_1)e_1$, takže $g(w_2, e_1) = 0$. Pokud definujeme $e_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$, tak dvojice e_1, e_2 tvoří ortonormální posloupnost. Dále budeme postupovat indukcí: Za předpokladu, že již máme sestrojeny vektory $e_1, \dots, e_k$, položíme $w_k = v_k - g(v_k, e_{k-1})e_{k-1} - g(v_k, e_{k-2})e_{k-2} - \dots - g(v_k, e_1)e_1$, $e_k = \frac{w_k}{||w_k||}$. Vektory $e_1, \dots, e_k$ zcela evidentně tvoří ortonormální posloupnost. Je dále zřejmé, že vektory $e_1, \dots, e_k$ jsou vyjádřeny ve tvaru lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_k$ a naopak.

□

Algoritmus konstrukce ortonormální posloupnosti z důkazu předchozí věty se nazývá *Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces*. Z analytické geometrie je známo, že každé uspořádané dvojici bodů $X, Y \in \mathbb{R}^3$ můžeme přiřadit právě jeden vektor $u = Y - X$, přičemž pro libovolný bod $X \in \mathbb{R}^3$ a pro libovolný reálný vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ je definován bod $v + X \in \mathbb{R}^3$. Prostor $\mathbb{R}^3$ je speciálním případem obecnějšího euklidovského prostoru.

Definice. *Euklidovský prostor* E je neprázdná množina, pro kterou existuje konečněrozměrný unitární prostor V nad $\mathbb{R}$, přičemž pro libovolný bod $X \in E$ a libovolný vektor $v \in V$ je definován bod $v + X \in E$ tak, že platí

1. $\overrightarrow{0} + X = X \quad \forall X \in E$, ($\overrightarrow{0} \in V$ značí nulový vektor),
2. $(v + w) + X = v + (w + X) \quad \forall v, w \in V, \quad \forall X \in E$,
3. Pro libovolné body $X, Y \in E$ existuje právě jeden vektor $v = \overrightarrow{XY} \in V$ tak, že platí $v + X = Y$.

Prvky množiny E nazýváme *body*, vektorový prostor V se nazývá *zaměření euklidovského prostoru* E, značíme $V = Z(E)$. *Dimenzí euklidovského prostoru* rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Zhruba řečeno, v euklidovském prostoru E máme definováno sčítání bodů z E a vektorů z unitárního prostoru $Z(E) = \{\overrightarrow{XY}; X, Y \in E\}$. Triviálním případem euklidovského prostoru je samotný unitární prostor V (zde $E = Z(E) = V$). Dalším příkladem je prostor $\mathbb{R}^n$, jehož zaměřením je množina n–rozměrných reálných vektorů. Libovolná rovina v $\mathbb{R}^3$ je rovněž euklidovský prostor.

Definice. *Kartézskou soustavou souřadnic (kartézským reperem)* rozumíme $(n+1)$–tici $\langle P; e_1, \dots, e_n \rangle$, kde $P \in E$ a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální báze $Z(E)$. Přitom bod P se nazývá *počátek kartézské soustavy souřadnic. Souřadnice bodu $X \in E$* pak definujeme jako souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Poznámka 4.1. Podle Věty 1.2 je každý n-rozměrný vektorový prostor izomorfní s $\mathbb{R}^n$. Volbou počátku $P \in E$ v n-rozměrném euklidovském prostoru E můžeme každý bod $X \in E$ ztotožnit s vektorem $\overrightarrow{PX}$. Tedy *množinu bodů i vektorů n-rozměrného euklidovského prostoru E můžeme prostřednictvím souřadnic ztotožnit s $\mathbb{R}^n$*. Vzhledem k této identifikaci budeme značit n-rozměrný euklidovský prostor symbolem E_n.

Vzdáleností bodů $X, Y \in E_n$ rozumíme číslo $\rho(X,Y) = ||\overrightarrow{XY}||$. Snadno ověříme, že (E_n, ρ) splňuje axiomy metrického prostoru. Pro jednoduchost budeme značit vzdálenost dvou bodů $X, Y \in E_n$ symbolem $||Y - X||$. V kartézských souřadnicích $X = (x^1, \dots, x^n)$, $Y = (y^1, \dots, y^n)$ tedy platí $||Y - X|| = \sqrt{\sum (y^i - x^i)^2}$.

Definice. Zobrazení $g : V \to \mathbb{R}$ se nazývá *kvadratická forma* na vektorovém prostoru V, jestliže existuje symetrická bilineární forma f na V taková že platí $g(u) = f(u,u)$ pro libovolné $u \in V$.

Věta 4.2. *Nechť g je kvadratická forma na V určená symetrickou bilineární formou f. Pak platí $2f(u,v) = g(u+v) - g(u) - g(v)$ pro všechna $u, v \in V$.*

Důkaz. Podle definice kvadratické formy platí $g(u+v) = f(u+v, u+v) = f(u,u) + 2f(u,v) + f(v,v) = g(u) + 2f(u,v) + g(v)$.

□

Máme tedy bijekci mezi kvadratickými formami a symetrickými bilineárními formami a symetrickými maticemi.

Definice. Symetrická bilineární forma f se nazývá *polární formou* kvadratické formy g. *Matici kvadratické formy g* definujeme jako matici její polární formy.

Je-li $x = x^i e_i \in V$, tak $g(x) = f(x,x) = x^i x^j f(e_i, e_j) = a_{ij} x^i x^j$. Tedy každá kvadratická forma g na V je kvadratickým výrazem tvaru $g(x) = a_{ij} x^i x^j$, kde (a_{ij}) je symetrická matice.

Příklad 4.1. Vzorec pro délku vektoru $x = (x_1, \dots, x_n)$ v n-rozměrném euklidovském prostoru E_n používá kvadratickou formu $x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Její polární bilineární formou je skalární součin a její maticí je jednotková matice řádu n.

Je-li $g : V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma na V, tak matice A této kvadratické formy je symetrická. Z lineární algebry je známo, že všechny vlastní hodnoty symetrické matice jsou reálné a vlastní vektory příslušné k navzájem různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé. V unitárním prostoru platí silnější tvrzení, a to, že vlastní vektory příslušné k různým vlastním hodnotám symetrické matice jsou ortogonální.

Věta 4.3 (O hlavních osách). *Nechť g je kvadratická forma na unitárním prostoru $V = \mathbb{R}^n$. Pak existuje ortonormální báze V, v níž má g reálnou diagonální matici. Je-li A symetrická matice kvadratické formy g a je-li B diagonální matice formy g v nové ortonormální bázi, tak platí: Diagonální prvky matice B jsou právě vlastní hodnoty matice A a příslušná ortonormální báze V je tvořena vlastními vektory A.*

Důkaz. Zvolme libovolnou pevnou ortonormální bázi prostoru V. Symetrická matice A má pak všechny vlastní hodnoty λ_i reálné a má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Určíme nyní ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru V tvořenou vlastními vektory matice A takto:
I. Je-li λ_i jednonásobný kořen charakteristické rovnice a u_i příslušný vlastní vektor, tak položme $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$. Je zřejmé, že e_i je opět vlastním vektorem matice A.
II. Pro k-násobný kořen λ charakteristické rovnice ($k \geq 2$) existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $u_1, \dots, u_k$ příslušných k vlastní hodnotě λ. Těmto vektorům přiřadíme ortogonalizačním procesem k ortonormálních vektorů $e_1, \dots, e_k$. Protože tyto vektory jsou lineární kombinací vlastních vektorů, tak $e_1, \dots, e_k$ jsou opět vlastní vektory matice A příslušné k vlastní hodnotě λ.
Vektory ze skupiny I a II jsou zřejmě navzájem ortogonální. Sestrojili jsme tedy ortonormální bázi $\{e_1, \dots, e_k\}$ tvořenou vlastními vektory matice A. Je-li nyní $f : V \times V \to \mathbb{R}$ polární forma kvadratické formy g, tak $g(x) = f(x, x)$. Pro $x = (x^1, \dots, x^n)$ je $g(x) = a_{ij}x^i x^j$, což můžeme psát v maticovém tvaru $g(x) = f(x, x) = x \cdot (a_{ij}) \cdot x^T$, kde x^T je sloupcový vektor. Dále, v ortonormální bázi V má skalární součin vektorů $u = (u^1, \dots, u^n)$ a $v = (v^1, \dots, v^n)$ tvar $u \cdot v = \sum u^i v^i = u \cdot v^T$. S využitím tohoto zápisu máme $f(e_i, e_j) = e_i \cdot (a_{ij}) \cdot (e_j)^T = e_i \cdot \lambda_j \cdot (e_j)^T = \lambda_j e_i \cdot e_j = \lambda_j \cdot \delta_{ij}$.

□

Souřadnicový tvar kvadratické formy s diagonální maticí se nazývá *kanonický tvar* a vektory ortonormální báze z předchozí věty se nazývají *hlavní směry.*Tedy ke každé kvadratické formě $g : V \to \mathbb{R}$ na unitárním prostoru $V = \mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze prostoru V, v níž má forma g kanonický tvar

$$g(u) = \lambda_1 (u^1)^2 + \cdots + \lambda_n (u^n)^2. \tag{1}$$

Koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou přitom vlastními hodnotami matice formy g, přičemž každá z nich vystupuje ve vyjádření (1) tolikrát, jaká je její násobnost.

Příklad 4.2. Převedeme kvadratickou formu $g(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^1x^2 + 4x^1x^3 + 4x^2x^3$ na kanonický tvar a určíme příslušnou ortonormální bázi. Maticí formy g je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice $|A - \lambda E| = 0$ má tvar $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0$. Vlastní hodnoty matice A jsou kořeny této rovnice, vyjde $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Dále, souřadnice vlastních vektorů $u = (u^1, u^2, u^3)$ příslušných k vlastní hodnotě λ jsou řešením soustavy homogenních lineárních rovnic $(A - \lambda E)u^T = (0, 0, 0)^T$ (u^T značí sloupcový vektor). Tato soustava rovnic má pro $\lambda_1 = 5$ obecné řešení (t, t, t), které závisí na jednom reálném parametru t. Volbou $t = 1$ dostaneme vlastní vektor $u_1 = (1, 1, 1)$. Dále, vlastní hodnotě $\lambda_{23} = -1$ odpovídá obecné řešení homogenní soustavy tvaru $(-t - s, t, s)$ závislé na dvou parametrech. Postupnou volbou $t = 1$, $s = 0$ a $t = 0$, $s = 1$ dostaneme vlastní vektory $u_2 = (-1, 1, 0)$ a $u_3 = (-1, 0, 1)$. Kanonickým tvarem formy g je tedy $5(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2$. Normováním vektoru u_1 dostaneme vektor $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Ortogonalizačním procesem pak přiřadíme vektorům u_2 a u_3 vektory $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $e_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$.

5 SYMETRICKÉ TENZORY DRUHÉHO STUPNĚ

V mechanice mají největší aplikace právě symetrické tenzory druhého stupně na prostoru $V = \mathbb{R}^n$. V této kapitole se proto budeme podrobněji zabývat symetrickými tenzory typu $(0,2)$ na V, tj. symetrickými bilineárními formami $f : V \times V \to \mathbb{R}$. Budeme definovat skalární invarianty, hlavní směry a charakteristickou plochu tenzoru. Pokud tenzor f reprezentuje nějaký fyzikální objekt, tak tyto pojmy mají zpravidla konkrétní fyzikální význam. Na závěr budeme uvedené pojmy demonstrovat na příkladě tenzoru setrvačnosti. V dalším budeme všude předpokládat, že $V = \mathbb{R}^n$ je unitární prostor a že $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální báze prostoru V. Pak souřadnice tenzoru f v této bázi tvoří symetrickou matici $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$. Tato matice se při změně báze prostoru V obecně mění.

Věta 5.1. *Nechť A a B jsou matice souřadnic tenzoru $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ve dvou ortonormálních bázích prostoru V. Pak tyto matice mají tytéž charakteristické polynomy.*

Důkaz. Podle Věty 1.5 je $B = S^T \cdot A \cdot S$, kde S je matice přechodu od první báze k druhé. Protože tyto báze jsou ortonormální, tak $S^T = S^{-1}$, takže matice A a B jsou podobné.

□

Nechť nyní $f : V \times V \to \mathbb{R}$ je symetrický tenzor na $V = \mathbb{R}^3$. Pak matice $A = (a_{ij})$ sestavená z jeho souřadnic je čtvercová matice řádu 3. Podle předchozí věty je její charakteristický polynom invariantní (tj. nezávislý) na změně báze V, takže koeficienty tohoto polynomu musí být rovněž invariantní. Rozvojem determinantu v charakteristické rovnici $|A - \lambda E| = 0$ obdržíme charakteristický polynom ve tvaru $\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0$ kde

$$
\begin{aligned}
J_1 &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\
J_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
J_3 &= |A|.
\end{aligned}
$$

Definice. Čísla J_1, J_2 a J_3 se nazývají *skalární invarianty tenzoru f.*

Poznamenejme, že J_1 je právě stopa matice. Jsou-li dále λ_1, λ_2 a λ_3 vlastní hodnoty A, tak zřejmě platí

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \quad J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

V případě tenzoru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bychom definovali (zde pouze dva) skalární invarianty J_1 a J_2 analogickým způsobem.

Podle předchozí kapitoly existuje bijekce mezi symetrickými tenzory $f : V \times V \to \mathbb{R}$ typu $(0,2)$ na V a mezi kvadratickými formami $\varphi : V \to \mathbb{R}$. Přitom symetrická matice (a_{ij}) kvadratické formy φ v bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ je právě matice souřadnic tenzoru f v této bázi.

Definice. Hlavní směry kvadratické formy φ nazýváme *hlavními směry tenzoru f.*

Je-li $P \in E_n$ počátek kartézské soustavy souřadnic, tak pro libovolný bod $Y \in E_n$ je vektor $\overrightarrow{PY}$ průvodič bodu Y. Uvažujme množinu $I(f)$ bodů prostoru E_n tvaru $I(f) := \{Y \in E_n; \varphi(\overrightarrow{PY}) = 1\}$. Protože souřadnice tenzoru f jsou a_{ij}, tak $I(f) = \{Y \in E_n; a_{ij}y^iy^j = 1\}$.

Definice. Pro $n = 3$ je $I(f)$ kvadrika v E_3, kterou nazýváme *charakteristickou plochou tenzoru* f. V případě $n = 2$ množinu $I(f)$ nazýváme *charakteristickou křivkou tenzoru* f.

Podle Věty 4.3 lze charakteristickou plochu $a_{ij}y^iy^j = 1$ převést na kanonický tvar $\overline{a}_{ii}y^iy^i = 1$, tj. po přeznačení $a_i = \overline{a}_{ii}$ na tvar $a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 + a_3(y^3)^2 = 1$. Analogicky, kanonický tvar charakteristické křivky tenzoru f je $a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 = 1$. Příslušné prvky nové báze prostoru V jsou pak právě hlavní směry tenzoru f.

Příklad 5.1. Určíme charakteristické plochy tenzorů zadaných maticí A souřadnic v nějaké bázi prostoru V.
(a) A je diagonální maticí řádu 3, kde na hlavní diagonále jsou postupně čísla λ_1, λ_2, λ_3. Příslušná charakteristická plocha má tvar $\lambda_1(y^1)^2 + \lambda_2(y^2)^2 + \lambda_3(y^3)^2 = 1$.

1. Pro $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ se jedná o elipsoid.

2. Jsou-li dvě hodnoty λ_i kladné a jedna hodnota záporná, tak se jedná o jednodílný hyperboloid.

3. Jsou-li dvě hodnoty λ_i záporné a jedna hodnota je kladná, tak se jedná o dvojdílný hyperboloid.

4. Jsou-li všechna λ_i záporná, tak se jedná o imaginární elipsoid.

(b) Nechť f je tenzor s maticí souřadnic tvaru $a_{ij} = b_i \cdot b_j$. Pak charakteristická plocha f má tvar $b_ib_jy^iy^j = 1$ neboli $(b_iy^i)^2 = 1$, takže $b_iy^i = \pm 1$. Jedná se tedy o dvojici rovnoběžných rovin, které jsou symetrické vzhledem k počátku.

Příklad 5.2 (Tenzor setrvačnosti)**.**
(a) Uvažujme rotační pohyb absolutně tuhého tělesa $\mathcal{K}$ upevněného v bodě P (tento bod je počátkem kartézské soustavy souřadnic) kolem nějaké osy procházející bodem P. Určíme nyní kinetickou energii tohoto tělesa. Je-li $\boldsymbol{\omega}$ vektor úhlové rychlosti a $\boldsymbol{x} = \vec{PM}$ průvodič bodu $M \in \mathcal{K}$, tak z mechaniky je známo, že vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ bodu M je vektorový součin $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$. Uvažujme nyní element tělesa $\mathcal{K}$ v okolí bodu M, přičemž hmotnost tohoto elementu označíme dm. Pak kinetická energie elementu je rovna $dT = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2dm$, kde $\boldsymbol{v}^2$ je skalární součin $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$. Tedy kinetická energie celého tělesa je tvaru $T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{v}^2dm$ neboli

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{K}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 dm \tag{1}$$

kde integračním oborem je celé těleso $\mathcal{K}$. Je-li přitom těleso $\mathcal{K}$ trojrozměrné, tak (1) představuje trojný integrál. Je-li $\mathcal{K}$ plocha, tak (1) reprezentuje plošný integrál a je-li $\mathcal{K}$ křivka, tak se jedná o integrál křivkový. Pokud se těleso K skládá z konečného počtu bodů, tak (1) představuje sumu.
(b) Užitím vlastností vektorového součinu bezprostředně odvodíme, že $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{x}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x})^2$. Je-li nyní $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormální báze s počátkem v bodě P a $\boldsymbol{\omega} = \omega^ie_i$, $\boldsymbol{x} = x^ie_i$ souřadnicové vyjádření vektorů $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{x}$ v této bázi, tak s využitím Kroneckerova symbolu δ_{ij} dostaneme $\boldsymbol{\omega}^2 = \delta_{ij}\omega^i\omega^j$, $\boldsymbol{x}^2 = \delta_{\ell k}x^\ell x^k$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x} = \delta_{ik}\omega^ix^k = \delta_{j\ell}\omega^jx^\ell$. Tedy $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2$ má tvar $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})^2 = (\delta_{ij}\omega^i\omega^j)(\delta_{k\ell}x^kx^\ell) - (\delta_{ik}\omega^ix^k)(\delta_{j\ell}\omega^jx^\ell) = (\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell})\omega^i\omega^jx^kx^\ell$. Tento výraz dosadíme do integrálu (1). Pak integračními proměnnými budou pouze souřadnice x^i vektoru

$\boldsymbol{x}$, zatímco souřadnice ω^i vektoru $\boldsymbol{\omega}$ můžeme považovat za konstanty, které lze vytknout před integrál, tj.

$$T = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell})\omega^i\omega^j \int\limits_{\mathcal{K}} x^k x^\ell dm.$$

Tento výraz nezávisí na souřadnicích vektoru $\boldsymbol{x}$ (neboť vzhledem k těmto souřadnicím se integruje) a závisí pouze na souřadnicích vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Vidíme, že kinetická energie T je kvadratickou formou vzhledem k souřadnicím ω^i vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Koeficienty této kvadratické formy představují symetrický tenzor typu $(0,2)$. Dvojnásobek tohoto tenzoru nazýváme *tenzorem setrvačnosti tělesa* $\mathcal{K}$. Označíme-li I_{ij} jeho souřadnice, pak

$$I_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{j\ell}) \int\limits_{\mathcal{K}} x^k x^\ell dm \qquad (2)$$

takže kinetická energie tělesa $\mathcal{K}$ má tvar $T = \frac{1}{2}I_{ij}\omega^i\omega^j$. Rozepsáním vzorců (2) dostaneme následující formule pro souřadnice tenzoru setrvačnosti

$$I_{11} = \int\limits_{\mathcal{K}} (x_2^2 + x_3^2)dm, \qquad I_{23} = I_{32} = -\int\limits_{\mathcal{K}} x_2x_3 dm,$$

$$I_{22} = \int\limits_{\mathcal{K}} (x_1^2 + x_3^2)dm, \qquad I_{31} = I_{13} = -\int\limits_{\mathcal{K}} x_1x_3 dm,$$

$$I_{33} = \int\limits_{\mathcal{K}} (x_1^2 + x_2^2)dm, \qquad I_{12} = I_{21} = -\int\limits_{\mathcal{K}} x_1x_2 dm.$$

Přitom hodnoty I_{11}, I_{22} a I_{33} se nazývají *momenty setrvačnosti vzhledem k osám* x_1, x_2 a x_3 a hodnoty I_{12}, I_{13}, I_{23} se nazývají *polární momenty setrvačnosti*. Je-li např. $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$ trojrozměrné těleso s lineární hustotou ρ, tak dostaneme známé vzorce z integrálního počtu v $\mathbb{R}^3$: $I_{11} = \iiint_{\mathcal{K}}(y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$, $I_{22} = \iiint_{\mathcal{K}}(x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$, $I_{33} = \iiint_{\mathcal{K}}(x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$.
(c) Výše uvedené vzorce definují momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám. Je-li dán vektor $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$ který určuje libovolnou osu procházející počátkem P, tak moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této libovolné (ne pouze souřadné) ose je $I = I_{ij}p^ip^j$ (odvození tohoto vztahu se provádí v mechanice). Tento vztah znamená, že moment setrvačnosti tělesa vzhledem k libovolné ose procházející počátkem je jednoznačně určen tenzorem setrvačnosti I_{ij}.
(d) Podle věty o hlavních osách lze každý tenzor typu $(0,2)$ (tj. kvadratickou formu) převést na diagonální tvar. Aplikací na tenzor setrvačnosti I_{ij} dostaneme *hlavní osy setrvačnosti tělesa* $\mathcal{K}$ (= osy x_i^o určené bodem P a vlastními vektory e_i^o tenzoru setrvačnosti) a *hlavní momenty setrvačnosti* I_i (= vlastní hodnoty tenzoru setrvačnosti). Je dále zřejmé, že hlavní momenty setrvačnosti I_i jsou právě momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám setrvačnosti a že polární momenty setrvačnosti I_{ij} $(i \neq j)$ v bázi $\{e_i^o\}$ jsou rovny nule. Navíc, z definičních vztahů je jasné, že $I_1 > 0$, $I_2 > 0$ a $I_3 > 0$.
(e) Charakteristická plocha tenzoru setrvačnosti má tvar $I_{ij}x^ix^j = 1$. Její kanonické rovnice jsou $I_1(x^1)^2 + I_2(x^2)^2 + I_3(x^3)^2 = 1$, kde I_1, I_2, I_3 jsou hlavní momenty setrvačnosti. Vzhledem k tomu, že jsou všechny hlavní momenty kladné, tak charakteristická plocha

tvoří elipsoid, který nazýváme *elipsoidem setrvačnosti tělesa* $\mathcal{K}$. Přitom osy symetrie tohoto elipsoidu splývají s hlavními osami setrvačnosti tělesa $\mathcal{K}$. V předchozím příkladu jsme demonstrovali použití tenzorového počtu v mechanice. Není to náhoda, neboť tenzorový počet má svůj původ právě v mechanice, zejména v teorii pružnosti a napětí. Napětí je totiž francouzsky „la tension“ a pojem tenzoru byl zaveden kolem roku 1900 matematikem a fyzikem Woldemarem Voigtem.

Cvičení I (Tenzory).
(1) Rozhodněte, pro jaké hodnoty $a \in \mathbb{R}$ je zobrazení $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, $\varphi(v, w) = a$ tenzorem typu $(0, 2)$ na V. [Pouze pro $a = 0$].
(2) Nechť $f, g : V \to \mathbb{R}$ jsou lineární formy na V. Definujme funkci $h : V \times V \to \mathbb{R}$ vztahem $h(u, v) = f(u)g(v)$. Dokažte, že h je bilineární forma na V.
(3) Dokažte, že Kroneckerův tenzor δ^i_j nezmění souřadnice při změně báze V.
(4) Určete kontrakci tenzoru F typu $(1, 1)$ z Příkladu 2.1(d). [$\delta^i_i = n = \dim V$].
(5) Určete tenzor vzniklý spuštěním obou indexů tenzoru a^{kr}. [$a_{is} = g_{ik}g_{rs}a^{kr}$].
(6) Nechť jsou dány tenzory a_{ijk}, $b^{\ell m}$. Pomocí tenzorového násobení a kontrakce vytvořte tenzory typu $(2, 1)$ a dále tenzory 1. stupně. [$a_{ijk}b^{im}$, $a_{ijk}b^{\ell i}$, $a_{ijk}b^{jm}$, $a_{ijk}b^{\ell j}$, $a_{ijk}b^{km}$, $a_{ijk}b^{\ell k}$; $a_{ijk}b^{ij}$, $a_{ijk}b^{ji}$, $a_{ijk}b^{jk}$, $a_{ijk}b^{kj}$, $a_{ijk}b^{ik}$, $a_{ijk}b^{ki}$].
(7) Nechť $V = \mathbb{R}^3$. Určete nějakou bázi vektorového prostoru $T^2_0 V$. [Např. 9 matic typu $(3, 3)$, které mají 8 nulových prvků a jeden prvek rovný jedné, přičemž tento nenulový prvek má v každé matici jiné indexy].
(8) Dokažte, že každý antisymetrický tenzor stupně $p > 3$ na $V = \mathbb{R}^3$ je nulový.
(9) Nechť a_{ij} je symetrický tenzor a b^{mn} antisymetrický tenzor. Dokažte, že tenzor vzniklý násobením a následnou kontrakcí $a_{ij}b^{ij}$ je identicky roven nule.
(10) Dokažte, že je-li tenzor a_{ijk} symetrický vzhledem k indexům i, j a antisymetrický vzhledem k indexům j, k, tak je tento tenzor roven nule.
(11) Dokažte, že každý tenzor třetího stupně lze zapsat ve tvaru $a_{ijk} = a_{(ijk)} + a_{[ijk]} + \frac{2}{3}(a_{[ij]k} + a_{[kj]i}) + \frac{2}{3}(a_{(ij)k} - a_{k(ij)})$. Odtud vidíme, že kovariantní tenzor 3. stupně nelze obecně rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru.
(12) Dokažte, že pokud tenzor a_{ijk} je symetrický vzhledem k indexům i, j, tak $a_{(ijk)} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij})$.
(13) Nechť tenzor A má souřadnice $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 5$. $a_{22} = 7$, $a_{23} = -2$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = -4$, $a_{33} = 0$. Rozložte tento tenzor na součet symetrického a antisymetrického tenzoru. [Označme b_{ij} souřadnice tenzoru $\mathrm{Sym}(A)$ a c_{ij} souřadnice tenzoru $\mathrm{Alt}(A)$. Pak $b_{11} = 2$, $b_{22} = 7$, $b_{33} = 0$, $b_{12} = b_{21} = 4$, $b_{13} = b_{31} = 3$, $b_{23} = b_{32} = -3$, $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$, $c_{12} = c_{13} = c_{32} = -1$, $c_{21} = c_{23} = c_{31} = 1$].
(14) Ukažte, že pro tenzory $F \in \Lambda^1 V$, $G \in \Lambda^2 V$ platí $F \wedge G(u, v, w) = F(u)G(v, w) - F(v)G(u, w) + F(w)G(u, v)$.
(15) Nechť f je tenzor, jehož souřadnice v ortonormální bázi $\{e_1, e_2, e_3\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ tvoří symetrickou matici $f_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i)$. Určete jeho charakteristickou plochu. [$(a_i x^i)(b_j x^j) = 1$, po transformaci souřadnic dostaneme hyperbolický válec $(y^1)(y^2) = 1$].