FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Matematika 3
(Komentovaná zkoušková zadání pro kombinovanou formu studia)

Autor textu:
RNDr. Michal Novák, Ph.D.

Verze 1.1

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014
http://www.umat.feec.vutbr.cz

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.

Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na spustitelné soubory připravené v prostředí MATLAB. Před spuštěním těchto souborů je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks.

Obsah

1 Úvodní komentář **6**

2 Doplňkové elektronické zdroje **8**

3 Testové úlohy **10**

4 Zadání pro kombinovanou formu studia **15**

4.1 Zadání 16
4.1.1 Variantní zadání A 18
4.1.2 Variantní zadání B 19
4.1.3 Variantní zadání C 20
4.2 Zadání 21
4.2.1 Variantní zadání A 24
4.2.2 Variantní zadání B 25
4.3 Zadání 27
4.3.1 Variantní zadání A 29
4.4 Zadání 31
4.4.1 Variantní zadání A 33
4.4.2 Variantní zadání B 34
4.4.3 Variantní zadání C 35
4.4.4 Variantní zadání D 36
4.5 Zadání 38
4.5.1 Variantní zadání A 40
4.6 Zadání 41
4.7 Zadání 43

4.7.1 Variantní zadání A 46
4.7.2 Variantní zadání B 47
4.7.3 Variantní zadání C 48
4.8 Zadání 50
4.8.1 Variantní zadání A 52
4.9 Zadání 53
4.9.1 Variantní zadání A 55
4.10 Zadání 57
4.10.1 Variantní zadání A 59
4.10.2 Variantní zadání B 60
4.11 Zadání 61
4.11.1 Variantní zadání A 63
4.11.2 Variantní zadání B 64
4.12 Zadání 65
4.12.1 Variantní zadání A 67
4.13 Zadání 68
4.13.1 Variantní zadání A 70
4.13.2 Variantní zadání B 71
4.13.3 Variantní zadání C 72
4.14 Zadání 75
4.14.1 Variantní zadání A 78
4.15 Zadání 80
4.15.1 Variantní zadání A 82
4.16 Zadání 84
4.16.1 Variantní zadání A 87
4.16.2 Variantní zadání B 88
4.16.3 Variantní zadání C 89
4.17 Zadání 91
4.17.1 Variantní zadání A 93
4.17.2 Variantní zadání B 94
4.17.3 Variantní zadání C 95
4.18 Zadání 97

4.18.1 Variantní zadání A 99
4.19 Zadání 100
4.20 Bonusové zadání pro dobře připravené 102

5 Odkazy **104**

Předmluva

Ke standardním učebním materiálům, se kterými se běžně setkáváte v různých předmětech, patří zejména učební text (skripta), který shrnuje látku probíranou v předmětu. Tento text bývá často doplňován různými prezentacemi, které slouží zejména vyučujícímu jako vodítko pro jeho výklad na přednášce. K nejrozšířenějším učebním materiálům určeným pro samostudium pak bezesporu patří sbírky příkladů.

Ač oblíbené (zejména obsahují-li vysoký podíl podrobně řešených příkladů), mají všechny sbírky příkladů jeden zásadní nedostatek. Jejich cílem je naučit studenty vyřešit zadané příklady, avšak neučí je, jak tyto příklady vyřešit *v zadaném čase*. S časovým omezením se student poprvé setká většinou až u zkoušky – a v mnoha případech není toto shledání radostné.

Náš učební materiál – možná první tohoto typu, se kterým se během svého studia setkávate – si klade za cíl připravit vás na řešení příkladů v pevně daném časovém limitu. I když to jako studenti (a zejména při vyhodnocování své zkoušky) slyšíte neradi, častá studentská věta: „Bylo na to málo času.“ znamená ve většině případů: „Špatně jsem se naučil.“ Je zřejmé, že jako studenti kombinované formy studia jste se dosud řešení příkladů v časovém limitu neměli kde naučit. Proto vám předkládáme tento učební materiál.

Inspirovali jsme se v něm zadáním písemných zkoušek z kombinované formy předmětu *Matematika 3* z let 2008 – 2014, který jsme vždy doplnili o různé varianty. Vzhledem k množství verzí zadání je možné, že jsou si některé příklady podobné. To však v této souvislosti vůbec není podstatné. Každé jednotlivé zadání je nutné chápat jako uzavřený celek, přičemž požadavkem na vás je vyřešit ho v časovém limitu 120 minut. Navíc, v mnoha případech je podobnost pouze zdánlivá, protože změna jednoho parametru zadání může znamenat nutnost použít úplně jiný postup řešení.

Tento učební materiál by vám rozhodně neměl sloužit jako sbírka příkladů. Měli byste po něm sáhnout teprve ve chvíli, kdy jste si již jisti, že látku předmětu dobře ovládáte. Z toho důvodu neuvádíme podrobná řešení jednotlivých příkladů. Výsledky početních příkladů samozřejmě pro kontrolu uvádíme. Abyste však situaci neměli příliš zjednodušenou (protože od toho zkouška není), uvádíme výsledky vždy jen u prvního zadání; u variantních zadání již ne. Jednotlivé mezivýsledky (které zde uvedeny nejsou) si můžete snadno dohledat pomocí elektronických zdrojů uvedených v kapitole 2.

Pro každé zadání uvádíme vždy jeho text, stručný komentář a výsledky příkladů. Cílem těchto komentářů není poskytnout vám návod, jak příklady řešit, ale stručně vám vysvětlit, co, jak a proč uvedené příklady testují. Nezapomínejte totiž, že požadavkem na úspěšného absolventa jakéhokoli předmětu není umět řešit příklady ale *rozumět látce* tohoto předmětu. Těm z vás, kteří jsou na zkoušku již dobře připraveni, samozřejmě komentáře poslouží i jako jistý návod. Po komentáři následuje vždy několik podobných variantních zadání. Je vhodné, abyste si propočítali i tato zadání. Všechna variantní zadání jsou sice časově i obtížnostně srovnatelná, avšak skutečnost, že se nějaká dvě zadání příkladu opticky odlišují jen v detailech, rozhodně nemusí znamenat, že se takto málo budou odlišovat i jejich postupy řešení!

Závěrem jednu důležitou poznámku: tak jako při investování na burze nejsou minulé zisky zárukou zisků budoucích, ani zde není žádná záruka, že forma písemné zkoušky nebo výběr příkladů budou vždy takové jako v tomto učebním materiálu. V budoucnu se může měnit jak forma, tak i typy příkladů. V posledních letech se mírně měnila i náplň předmětu. Navíc, v letech 2011 – 2014 vznikla rozsáhlá sada elektronických učebních materiálů (výběr z ní je uveden v kapitole 2). Na všechny tyto věci musíme jako vyučující a zkoušející reagovat.

17.11.2014 *Autor*

1 Úvodní komentář

Pro vypracování následujících zkouškových zadání jsou povolenými pomůckami kalkulačka a 1 – 3 listy formátu A4 popsané libovolnými poznámkami. Je dobré si uvědomit, že počet povolených listů poznámek, tedy parametr studenty považovaný za velmi důležitý, je ve skutečnosti naprosto nepodstatný, resp. podstatný jinak, než se většina studentů domnívá. Vzhledem k počtu a složitosti vzorců používaných v numerických metodách je samozřejmé, že nějaký prostor pro vlastní poznámky je nutný. Pokud však tento prostor přesahuje jeden list formátu A4, je lákavé nahradit přípravu na zkoušku přepsáním potřebných vzorců (a dalších výpisků ze skript) na listy s poznámkami. To je však kontraproduktivní, protože časový limit na vypracování zkouškového zadání pak student tráví snahou zorientovat se ve svých (mnohdy zmatených a velmi často nepřesných) poznámkách, v důsledku čehož: „Na písemku bylo málo času."

Požadavkem na všechna zadání je, aby všechny postupy řešení byly vypracovány tak, aby jim rozuměl nezávislý pozorovatel. Všechny logické skoky musejí být vysvětleny, význam všech čísel musí být zřejmý a musí být dohledatelné, jak jste k těmto číslům došli. Vše je nutné zpracovat tak, aby vše podstatné bylo uvedeno v postupu řešení – žádné dodatečné vysvětlování není možné. Nezapomínejte, že názory na to, co je a co není „podstatné" a zejména „zřejmé" se mohou velmi lišit. Mnoho věcí je „zřejmých" jen člověku, který dané problematice rozumí jen velmi povrchně (tedy špatně připravenému studentovi). Podobně, špatně připravený student často naprosto zásadní věci považuje za „nedůležité". Při vypracování zadání zejména z numerických metod budete pochopitelně používat kalkulačku, která s největší pravděpodobností bude mít funkce automatizovaného, resp. opakovaného výpočtu, bude nabízet pokročilé možnosti práce s interní pamětí apod. Nezapomínejte však, že bez ohledu na to, jakou část práce za vás „udělala kalkulačka", požadavkem na vás je, abyste do postupu řešení zapsali „vše podstatné" pro „nezávislého pozorovatele". To mj. předpokládá, že víte, které věci to jsou (tedy, že umíte aplikovat teoretické poznatky z předmětu).

Fenoménem zejména posledních několika málo let je velmi zřetelně se zhoršující čtenářská gramotnost studentů. Schopnost porozumění čtenému textu, tedy jedna z dovedností, na niž je zaměřena výuka cizích jazyků, v češtině samotné velmi znatelně upadá. Každé zadání si proto nejprve pečlivě pročtěte, v klidu analyzujte a odpovídejte právě na věci, na které jste tázáni. Podle našich zkušeností v poslední době hrozivě narůstá počet studentů, jejichž odpovědi nejsou správné nebo chybné, ale naprosto nerelevantní. Tento problém se přitom týká jak příkladů z pravděpodobnosti (kde mají zadání často formu delších slovních úloh) tak i překvapivě příkladů z numerických metod.

Ve verzi učebního textu používané až do ak. roku 2013/4 byla distribuční funkce náhodné veličiny X definována podle vztahu $F(x) = P(X < x)$. Od ak. roku 2014/15 (nová verze učebního textu s doplňkovými elektronickými materiály) používáme definiční vztah $F(x) = P(X \leq x)$, který je v literatuře zastoupen častěji. Na postupy řešení příkladů uváděných v tomto textu ani na jejich výsledky tato změna nemá žádný vliv. Přesto však doporučejeme starou verzi učebního textu nepoužívat, resp. u zadání z jiných zdrojů vždy ověřovat, jak je distribuční funkce definována.

2 Doplňkové elektronické zdroje

Příklady v tomto učebním materiálu byste měli řešit zásadně sami, bez použití výpočetní techniky (kalkulačka samozřejmě povolena je). Abyste co nejlépe simulovali situaci u zkoušky, měli byste každé ze zadání vypracovat v časovém limitu 120 minut a nenechávat se během své práce vyrušovat.

Pokud byste si nicméně chtěli některé výpočty ověřit, zkontrolovat nebo si příslušné partie učiva dostudovat, můžete použít následující doplňkové elektronické materiály. Tyto materiály se vztahují jak přímo k látce předmětu *Matematika 3* tak i k některým částem předmětů dřívějších, které při řešení zkouškových zadání využijete. Před použitím těchto materiálů si vždy předem zkontrolujte, zda rozumíte používané terminologii a symbolice.

Maplety

V případě problémů se spouštěním mapletů věnujte pozornost informacím na obslužné stránce mapletu. Zejména zkontrolujte, zda nemáte nastaveno příliš vysoké zabezpečení Javy, a to jak v systému tak přímo v prohlížeči. Doporučené nastavení zabezpečení Javy je „střední“. Pokud toto nastavení nelze využít, doporučujeme zařadit server http://matika.umat.feec.vutbr.cz/ do výjimek, příp. do zóny důvěryhodných serverů. Případné výpadky serveru, resp. situace, kdy není možné maplety spustit, i když jste obvykle se spouštěním problémy neměli, hlaste na adresu novakm@feec.vutbr.cz

1. Úprava algebraických výrazů
2. Analytické řešení soustavy lineárních rovnic
3. Násobení matic
4. Výpočet determinantu
5. Výpočet funkčních hodnot
6. Grafy některých elementárních funkcí
7. Grafy funkcí
8. Parciální derivace
9. Derivování
10. Integrování: výpočet určitého integrálu

11. Integrování: hledání primitivní funkce
12. Kombinatorika – zjištění počtu a výpis všech variací, kombinací, atd.
13. Binomické rozdělení
14. Aproximace binomického rozdělení normálním
15. Geometrické rozdělení
16. Hypergeometrické rozdělení
17. Poissonovo rozdělení
18. Výpočet distribuční funkce z hustoty
19. Výpočet neurčitého integrálu
20. Výpočet určitého integrálu
21. Integrování metodou per partes
22. Substituce v integrálu
23. Exponenciální rozdělení
24. Normální rozdělení – výpočet pravděpodobnosti
25. Normální rozdělení – výpočet kvantilu
26. Aproximace binomického rozdělení normálním
27. Normální rozdělení – výpočet kvantilu

Spustitelné aplikace prostředí Matlab

Před spuštěním těchto souborů je nutné nainstalovat MATLAB Compiler Runtime ve verzi R2013a, 32-bit pro Windows (400 MB). Podrobné informace o MATLAB Compiler Runtime získáte v nápovědě na webu firmy Mathworks. Nezapomínejte, že tyto aplikace nemohou (a ani to nedělají!) postihnout všechny nuance probírané látky! Doporučujeme, abyste si vždy prošli vysvětlení postupu výpočtu.

1. Numerické metody řešení soustav lineárních rovnic
2. Numerické metody řešení jedné nelineární rovnice
3. Numerické metody řešení soustavy nelineárních rovnic
4. Interpolační polynom a splajn
5. Metoda nejmenších čtverců
6. Numerický výpočet určitého integrálu
7. Jednokrokové numerické metody řešení počátečních úloh

Poznámka: Na rozdíl od učebního textu označuje v aplikaci *Numerický výpočet určitého integrálu* index u L pořadí v posloupnosti výsledků získaných vždy pro dvojnásobný počet dílků než v předchozím členu. Proto např. i když L_5 značí v učebním textu numerickou hodnotu integrálu pro dělení intervalu na 5 dílků, v aplikaci se jedná o pátý člen posloupnosti L_1, L_2, L_4, L_8, L_{16}, ..., tj. L_{16}. Důvodem je snaha o názornější vizualizaci postupu řešení a soulad s vizualizací Simpsonovy metody.

3 Testové úlohy

Před tím, než se pustíte do vypracování zkouškových zadání v kapitole 4, byste si měli odzkoušet, zda skutečně umíte pracovat s pojmy, které jsou v předmětu probírány, znáte jejich vlastnosti a umíte je využívat. Otestovat se můžete na následujících úlohách.[1]

1. Udejte příklad soustavy 3 rovnic (počet neznámých si zvolte sami), která má právě jedno řešení. *Odpověď zdůvodněte. Při zápisu soustavy* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *musí mít matice* $\mathbf{A}$ *všechny koeficienty nenulové.*

2. Udejte příklad soustavy 3 rovnic (počet neznámých si zvolte sami), která je řešitelná Jacobiho metodou. *Odpověď zdůvodněte. Při zápisu soustavy* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *musí mít matice* $\mathbf{A}$ *všechny koeficienty nenulové.*

3. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

   Při použití Gauss-Seidelovy metody můžeme soustavu „násobit maticí $\mathbf{A}^T$“. V tomto konkrétním případě proveďte.

4. Udejte příklad matice 5×5, která je regulární. *Prokazatelným způsobem ukažte, že je regulární.*

5. Udejte příklad matice 5×4, která je regulární. *Prokazatelným způsobem ukažte, že je regulární.*

6. Udejte příklad soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde matice $\mathbf{A}$ je typu 4×4 a je řádkově ostře diagonálně dominantní.

7. Udejte příklad funkce $f(x)$ a intervalu I tak, že funkce $f(x)$ je na intervalu I definovaná a není na něm spojitá. *Zdůvodněte.*

[1] U těchto úloh nemá smysl uvádět výsledky, protože se v mnoha případech jedná o zadání typu *udejte příklad*, kde v mnoha případech existuje nekonečně mnoho správných odpovědí (které navíc ani nelze parametrizovat).

8. Udejte příklad nelineární rovnice, která má právě jedno kladné řešení. *Odpověď zdůvodněte. Jako odpověď není přípustná kvadratická rovnice ani rovnice typů řešených na střední škole (exponenciální, logaritmická, goniometrická).*

9. Udejte příklad nelineární rovnice, která nemá žádné řešení. *Odpověď zdůvodněte. Jako odpověď není přípustná kvadratická rovnice ani rovnice typů řešených na střední škole (exponenciální, logaritmická, goniometrická).*

10. Určete interval délky nejvýše 2, na kterém leží nějaké záporné řešení rovnice $\ln(x+3) + (x+2)^2 - 3 = 0$.

11. Hledáme nulové body funkce $f(x) = x^3 + 2x + 4$. Zvolili jsme si Newtonovu metodu.

    (a) Najděte interval I, na které leží nějaký nulový bod této funkce a na kterém jsou současně splněny podmínky konvergence Newtonovy metody. *Odpověď zdůvodněte.*

    (b) Z intervalu I vyberte vhodnou počáteční aproximaci Newtonovy metody. *Odpověď zdůvodněte.*

12. Je dána rovnice $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 0$.

    (a) Najděte interval, na kterém leží právě jedno její řešení.

    (b) Najděte interval délky nejvýše 2, na kterém jsou splněny podmínky konvergence Newtonovy metody.

    (c) V tomto intervalu zvolte takovou počáteční aproximaci, aby Newtonova metoda měla zaručenou konvergenci a konvergovala k nějakému řešení této rovnice.

13. Je dáno $f(x,y) = \sin(2x - 3y) + e^{x-4y} + x^3y^2$. Určete $\frac{\partial f}{\partial y}$. *Jiný zápis téhož požadavku je např.* f'_y *nebo* f_y.

14. Do jednoho obrázku načrtněte funkci $f(x)$ dle vlastního výběru, body x_0, x_1 a x_2 také dle vlastního výběru a interpolační polynom, který tuto funkci nahrazuje v uvedených třech bodech.

15. Do jednoho obrázku načrtněte funkci $f(x)$ dle vlastního výběru, tolik bodů x_i, kolik je nutných k sestavení splajnu $S(x) = \begin{cases} S_1(x) \\ S_2(x) \\ S_3(x) \end{cases}$ a lineární splajn, který tuto funkci nahrazuje v uvedených bodech.

16. Ve tvaru $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ vyjádřete interpolační polynom, který je sestavený právě z bodů $[0,-1], [1,2]$.

17. Udejte příklad funkce $f(x)$ a intervalu $I = \langle a, b\rangle$ tak, že funkce $f(x)$ je na intervalu I definovaná, není na něm spojitá a $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(a) diverguje,

(b) konverguje.

Zdůvodněte.

18. V následujích odrážkách je $f(x) = \cos 4x$.

(a) Pomocí primitivní funkce přesně vypočtěte $\int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Simpsonovou / lichoběžníkovou metodou pro $m = 2$ (tj. interval dělíme na dvě části a na každou z nich použijeme Simpsonovu / lichoběžníkovou metodu) vypočtěte $\int\limits_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

(c) Pokud existuje rozpor mezi přesným řešením a řešením získaným danou metodou, vysvětlete ho. Můžete použít slovní komentář, rozpor zdůvodnit správně popsaným obrázkem, příp. použít kombinaci obou možností. Pokud jsou výsledky zcela shodné, okomentujte (slovy nebo obrázkem), proč tomu tak je.

19. Řešíme úlohu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Udejte příklad $a, b, f(x)$ tak, aby

(a) výsledek získaný jednoduchou lichoběžníkovou metodou byl přesný,

(b) výsledek získaný jednoduchou Simpsonovou metodou byl přesný,

(c) výsledek získaný jednoduchou lichoběžníkovou metodou byl přesný, ale výsledek získaný jednoduchou Simpsonovou metodou přesný nebyl,

(d) výsledek získaný jednoduchou Simpsonovou metodou byl přesný, ale výsledek získaný jednoduchou lichoběžníkovou metodou přesný nebyl,

(e) výsledek získaný jednoduchou lichoběžníkovou metodou byl stejný jako výsledek získaný jednoduchou Simpsonovou metodou,

(f) pro složenou lichoběžníkovou metodu platilo $L_4 = L_8 = 1,23456$.

20. Udejte příklad

(a) diferenciální rovnice 28. řádu.

(b) počáteční úlohy řešitelné Eulerovou metodou na intervalu $I = \langle 5, 6\rangle$; přitom řešením má být funkce k proměnné t.

(c) intervalu, na kterém byste hledali řešení počáteční úlohy $y' = x + y$, $y(15) = 3$, metodou Runge-Kutty 4. řádu.

21. „Hodíme dvěma běžnými šestistěnnými kostkami. ... Jaká je pravděpodobnost, že padne trojka?“ Upravte tyto věty, resp. doplňte je tak, abyste

(a) zformulovali zadání vedoucí na klasickou pravděpodobnost,

(b) zformulovali zadání vedoucí na diskrétní pravděpodobnost

(c) zformulovali zadání, při jehož řešení využijeme podmíněnou pravděpodobnost.

22. Házíme běžnou šestistěnnou kostkou, dokud nepadne dvojka, nejvýše však třikrát.
    (a) Popište základní prostor.
    (b) Množinově zapište jev A *ve druhém hodu padla pětka.*
    (c) Porovnejte pravděpodobnost jevů $B = \{[3,2]\}$ a $C = \{[6,2],[6,3,2]\}$.

23. Pro náhodnou veličinu X je dáno:

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{pro } x \in \{1,2,3\} \\ a & \text{pro } x = 4 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

    (a) Určete a tak, aby $p(x)$ byla pravděpodobnostní funkcí X.
    (b) Určete $P(X = 2)$.
    (c) Určete $F(3)$.

24. Pro náhodnou veličinu X je dáno:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{pro } x \in \langle 1; 2\rangle \\ b & \text{pro } x \in \langle 3; 4\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

    (a) Určete a a b tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti X.
    (b) Desetinným číslem vyjádřete $P(X \in \langle 2; 3\rangle)$.
    (c) Desetinným číslem vyjádřete EX.

25. Pro náhodnou veličinu X je dáno:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ -\sin x & \text{pro } x \in \langle a, \frac{3}{2}\pi\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

    (a) Určete konstantu a tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí X.
    (b) Určete hustotu pravděpodododobnosti X.
    (c) Desetinným číslem vyjádřete $P(X \in \langle 2; 4\rangle)$.

26. Udejte příklad funkce, která nemůže být pravděpodobnostní funkcí žádné náhodné veličiny, ale přesto má alespoň jednu vlastnost pravděpodobnostní funkce.

27. Udejte příklad funkce, která nemůže být funkcí hustoty žádné náhodné veličiny, ale přesto má alespoň jednu vlastnost funkce hustoty.

28. Udejte příklad funkce, která nemůže být distribuční funkcí žádné náhodné veličiny, ale přesto má alespoň jednu vlastnost distribuční funkce.

29. Je dáno $A \sim \text{Exp}(1)$, $B \sim \text{Exp}(2)$, $C \sim \text{Exp}(5)$, $D \sim \text{Exp}(8)$, $G \sim \text{Exp}(9)$. Najděte nejvetší z čísel $P(A \leq \text{E}A)$, $P(B \leq \text{E}B)$, $P(C \leq \text{E}C)$, $P(D \leq \text{E}D)$, $P(G \leq \text{E}G)$ a pro náhodnou veličinu, pro kterou je hledaná pravděpodobnost největší, určete $P(\text{náhodná veličina } \in \langle -1; 0 \rangle)$ a rozptyl této náhodné veličiny.

30. Je dáno $X \sim \text{Roz}(a, b)$, kde Roz jsou jednotlivá rozdělení pravděpodobnosti probíraná v tomto textu a a, b jejich vhodné paramatery.

    (a) Pro diskrétní náhodné veličiny určete $P(X \in \{2, 4, 6\})$.

    (b) Pro spojité náhodné veličiny určete $P(X \in \langle 2, 3 \rangle)$, a to jak pomocí hustoty pravděpodobnosti tak pomocí distribuční funkce.

    (c) Určete T tak, že $P(X > T) = 0,6$.

4 Zadání pro kombinovanou formu studia

V této učební opoře najdete 20 různých zadání, ve kterých se vyskytují pouze teoretické příklady. Forma těchto zkouškových zadání je stejná – 7 příkladů, z nichž každý je hodnocen 10 body. Zadání tohoto typu využíváme zejména pro studenty kombinované formy studia. *Čistě teoretické* otázky, tj. otevřené otázky typu „Popište / vysvětlete / zdůvodněte nějaký teoretický poznatek," v těchto zadáních nenajdete. Vzhledem k časovému omezení jsou však mezi příklady hojně zastoupeny takové, jejichž řešení je díky „vtipu" (tedy aplikaci nějakého teoretického poznatku) velmi snadné, případně příklady, které nemají řešení žádné, jejichž řešení je zřejmé apod. V zadáních se také často objevují příklady, které studentům nabízejí volnost při výběru způsobu řešení, přičemž délka řešení a jeho náročnost výrazně závisí na zvoleném způsobu řešení (a tedy opět aplikaci teoretických poznatků při rozhodování o zvolené strategii řešení).

Výsledky uvádíme vždy jen pro jedno zadání, protože věříme, že pokud budete vědět, jak daný příklad řešit, pro variantní zadání si výsledky dopočtete sami. Forma výsledků je záměrně co nejvíce „spartánská", protože cílem uvádění výsledků není poskytovat návod na řešení (to je úlohou učebního textu a sbírek příkladů a tento návod je navíc do jisté mír zachycen i v komentářích) ale poskytnout kontrolu správnosti výpočtu. Pro mnoho zadání bylo nutné výsledky znovu dopočítat, příp. je ručně přepsat z našich poznámek, proto případy, kdy jste přesvědčení, že výsledek je uveden chybně, nejprve konzultujte s kolegy a teprve poté nahlaste autorovi. Případnou chybu ve vzorovém řešení je možné snadno rozpoznat a opravit během opravy zkouškových písemek – v případě nově vznikajícího textu to ovšem tak snadné není a případné překlepy nebo chyby odhalí až vaše kontrola.

4.1 Zadání

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 3\sin 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + 20y + 3z &= 1 \\ 2x + 2y + 41z &= 2 \\ ax - 22y - 44z &= -3 \end{aligned}$$

   Z nabídky $a = -4$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu, pro kterou soustava může mít právě jedno řešení. U druhé z hodnot uveďte, proč si myslíte, že soustava právě jedno řešení mít nebude. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy. Soustavu před tím převeďte do tvaru, který zaručuje konvergenci dané metody. Uveďte, jakou metodu používáte.

3. Je dána počáteční úloha

$$y' - y = e^x, \; y(1) = 2$$

   S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}6)$ Eulerovou metodou. Poté vhodným způsobem najděte $y(1{,}3)$. *Hodnotu $y(1,3)$ lze obecně nalézt více různými způsoby, proto slovně popište, co a proč děláte.*

4. Jsou dány následující body: $A = [-2; -1], B = [-1; 0{,}3], C = [0; 1{,}3], D = [1; 0{,}2], E = [2; -0{,}8]$. Rozhodněte, zda je vhodnější proložit jimi přímku nebo parabolu (*odpověď vhodným způsobem zdůvodněte*). Pak tuto přímku, resp. parabolu, metodou nejmenších čtverců najděte.

5. Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Víme, že $p(2) = 0{,}2$, $p(3) = 0{,}3$ a $\mathrm{E}X = 3{,}1$. Určete $\mathrm{D}X$ a $F(3{,}2)$.

6. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $P(0 < X < 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 0,1 & x \in \{3, 5\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro náhodnou veličinu X, která má binomické rozdělení s parametry *počet opakování pokusu* rovno 10 a *pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu* rovno $0,2$, určete $P(X \geq 8)$.

Komentář

Při řešení nelineárních rovnic je nejprve nutné provést separaci kořenů. Proto dáváme v příkladu 1 na výběr dvě rovnice, z nichž jedna na daném intervalu řešení má a druhá ne. U obou rovnic je třeba (pokud si student tento způsob separace kořenů vybere) kreslit grafy elementárních funkcí v jiné než základní poloze. To jsou však středoškolské znalosti. Interval volíme tak, aby nebyl „bezproblémový“ – s touto situací si student musí umět poradit. Vlastní výpočet je triviální. Metodu si může student zvolit, jakou uzná za vhodné, avšak s přihlédnutím k její konvergenci.

V příkladu 2 je nutné nejprve využít znalosti z předmětu *Matematika 1* a správně si vybrat vhodný parametr. Vlastní výpočet je triviální (stačí provést jeden krok dané metody); student má navíc na výběr způsob řešení dle svého uvážení.

V příkladu 3 je nutné nejprve správně interpretovat požadavek a přeformulovat zadání do tvaru používaném v učebním textu. Schopnost popsat, co a proč student u zkoušky dělá, by měla být samozřejmostí.

Zadání příkladu 4 je ve vizuálně jiném tvaru než zadání v učebním textu. Nejprve testujeme, zda student vůbec rozumí formulaci úlohy, která byla v předmětu probírána. Vlastní řešení zahrnuje řešení soustavy 2 nebo 3 rovnic. Aby bylo možné rozhodnout, je nutné body vykreslit.

Zadání příkladu 5 je voleno záměrně heslovitě, aby bylo možné otestovat, zda student zná používanou symboliku. Vlastní výpočet spoléhá pouze na znalosti vlastností *pravděpodobnostní funkce*, *distribuční funkce*, *střední hodnoty* a *rozptylu* (tedy zcela základních pojmů teorie pravděpodobnosti) a je víceméně triviální.

Pojem *hustota pravděpodobnosti* patří k základním pojmům teorie pravděpodobnosti. Příklad 6 proto testuje, zda student zná jeho vlastnosti a umí je na konkrétní funkci identifikovat.

Příklad 7 je do jisté míry opakem příkladu 5. Zde je nutné nejprve slovní popis převést na symboliku uváděnou v učebním textu. Výpočet je poté prostým dosazením do vzorce.

Výsledky

1) $0,74$; **2)** např. Jacobiho metodou $\mathbf{x}^{(1)} = (-\frac{3}{88}, \frac{1}{20}, \frac{2}{41})$; **3)** $y(1,6) = 9,3027$; **4)** $y = 1,08 - 0,5x^2$; **5)** $\mathrm{D}X = 0,89$; $F(3,2) = \frac{17}{30}$; **6)** $0,46$; **7)** $0,000078$

4.1.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 3\sin 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + 20y + 3z &= 1 \\ 2x + 2y + 41z &= 2 \\ ax + 22y + 44z &= 3 \end{aligned}$$

   Z nabídky $a = 4$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu, pro kterou soustava může mít právě jedno řešení. U druhé z hodnot uveďte, proč si myslíte, že soustava právě jedno řešení mít nebude. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy. Soustavu před tím převeďte do tvaru, který zaručuje konvergenci dané metody. Uveďte, jakou metodu používáte.

3. Je dána počáteční úloha

$$y' - y = e^x, \; y(1) = 1$$

   S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}6)$ Eulerovou metodou. Poté vhodným způsobem najděte $y(1{,}3)$. *Hodnotu $y(1,3)$ lze obecně nalézt více různými způsoby, proto slovně popište, co a proč děláte.*

4. Jsou dány následující body: $A = [-2; -1], B = [-1; 0{,}7], C = [0; 0{,}9], D = [1; 0{,}2], E = [2; -0{,}8]$. Rozhodněte, zda je vhodnější proložit jimi přímku nebo parabolu (*odpověď vhodným způsobem zdůvodněte*). Pak tuto přímku, resp. parabolu, metodou nejmenších čtverců najděte.

5. Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Víme, že $p(2) = 0{,}3$, $p(3) = 0{,}2$ a $\mathrm{E}X = 3{,}1$. Určete $\mathrm{D}X$ a $F(2{,}9)$.

6. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $P(0 < X < 2)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 0,1 & x \in \{3, 10\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = 0,7 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro náhodnou veličinu X, která má binomické rozdělení s parametry *počet opakování pokusu* rovno 10 a *pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu* rovno 0,3, určete $P(X \geq 8)$.

4.1.2 Variantní zadání B

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 2\sin 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:
$$\begin{aligned} x + 20y + 4z &= 2 \\ 2x + 2y + 40z &= 3 \\ ax + 22y + 44z &= 5 \end{aligned}$$
Z nabídky $a = 3$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu, pro kterou soustava může mít právě jedno řešení. U druhé z hodnot uveďte, proč si myslíte, že soustava právě jedno řešení mít nebude. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy. Soustavu před tím převeďte do tvaru, který zaručuje konvergenci dané metody. Uveďte, jakou metodu používáte.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' - y = e^x,\ y(1) = 3$$
S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}6)$ Eulerovou metodou. Poté vhodným způsobem najděte $y(1,3)$. *Hodnotu* $y(1,3)$ *lze obecně nalézt více různými způsoby, proto slovně popište, co a proč děláte.*

4. Jsou dány následující body: $A = [-2; -1], B = [-1; 0{,}7], C = [0; 0{,}9], D = [1; 0{,}3], E = [2; -0{,}8]$. Rozhodněte, zda je vhodnější proložit jimi přímku nebo parabolu (*odpověď vhodným způsobem zdůvodněte*). Pak tuto přímku, resp. parabolu, metodou nejmenších čtverců najděte.

5. Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Víme, že $p(2) = 0{,}1$, $p(3) = 0{,}4$ a $\mathrm{E}X = 3{,}1$. Určete $\mathrm{D}X$ a $F(2{,}8)$.

6. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $P(0 < X < 2)$.
$$f(x) = \begin{cases} 0,3 & x \in \{2,4,6\} \\ 0,1 & x \in \{10\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$
$$h(x) = x \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro náhodnou veličinu X, která má binomické rozdělení s parametry *počet opakování pokusu* rovno 10 a *pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu* rovno 0,4, určete $P(X \geq 8)$.

4.1.3 Variantní zadání C

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 2\sin 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 2x^3 - 1 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} x + 20y + 4z &= 2 \\ 2x + 2y + 40z &= 1 \\ ax + 22y + 44z &= 3 \end{aligned}$$

   Z nabídky $a = 3$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu, pro kterou soustava může mít právě jedno řešení. U druhé z hodnot uveďte, proč si myslíte, že soustava právě jedno řešení mít nebude. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy. Soustavu před tím převeďte do tvaru, který zaručuje konvergenci dané metody. Uveďte, jakou metodu používáte.

3. Je dána počáteční úloha

$$y' - y = e^x,\ y(1) = 4$$

   S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}6)$ Eulerovou metodou. Poté vhodným způsobem najděte $y(1{,}3)$. *Hodnotu $y(1,3)$ lze obecně nalézt více různými způsoby, proto slovně popište, co a proč děláte.*

4. Jsou dány následující body: $A = [-2; -1], B = [-1; 0{,}7], C = [0; 1{,}2], D = [1; 0{,}3], E = [2; -0{,}8]$. Rozhodněte, zda je vhodnější proložit jimi přímku nebo parabolu (*odpověď vhodným způsobem zdůvodněte*). Pak tuto přímku, resp. parabolu, metodou nejmenších čtverců najděte.

5. Náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$. Víme, že $p(2) = 0{,}4$, $p(3) = 0{,}1$ a $\mathrm{E}X = 3{,}1$. Určete $\mathrm{D}X$ a $F(2{,}8)$.

6. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $P(0 < X < 2)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2, 4, 6, 8\} \\ 0,1 & x \in \{3, 10\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = \sin x \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro náhodnou veličinu X, která má binomické rozdělení s parametry *počet opakování pokusu* rovno 20 a *pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu* rovno 0,3, určete $P(X \geq 18)$.

4.2 Zadání

1. Chcete najít průsečík dvou kružnic: jedné, která má střed v bodě $[3, 3]$ a poloměr $r = 2$, a druhé, která má střed v bodě $[1, 1]$ a poloměr $r = 3$. Hledáte ten z průsečíků, jehož x–ová souřadnice je větší. Zvolte si vhodnou počáteční aproximaci a proveďte jeden krok Newtonovy metody.

2. Je dána funkce $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Vhodnou složenou numerickou metodou určete $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. Zdůvodněte volbu metody i volbu dělení intervalu. Srovnejte numerický výsledek s hodnotou integrálu získanou analytickým postupem.

3. Jsou dány tyto body: $A = [0,4; -2,8], B = [0,9; -1,3], C = [2; 2], D = [3,1; 5,3]$. Proložte jimi interpolační polynom. Výsledek udejte ve tvaru $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Okomentujte získaný polynom. Pak určete $P_n(0)$.

4. Dělník na tovární lince musí čas od času potvrdit svou přítomnost na pracovním místě. V pracovní době (mimo povinné přestávky a mimo dobu, kdy se z pracovního místa elektronicky odhlásí) se mu u pracovního místa rozsvítí kontrolka. Dělník v tu chvíli musí stisknout kontrolní tlačítko. Kontrolka se rozsvěcuje naprosto náhodně a nepředvídatelně, avšak tak, že za 5 pracovních směn (= 40 hodin) se rozsvítí v průměru dvacetkrát. Dělník si chce udělat čtvrthodinovou přestávku, aniž by se elektronicky odhlašoval. Jaká je pravděpodobnost, že se v této době nerozsvítí kontrolka?

5. Řidič se z místa A do místa B může dostat dvěma různými způsoby. První je kratší, ale při prvním odbočení se auto dostane na ulici, kde jsou tramvajové koleje, přičemž šířka vozovky nikde nedovoluje tramvaj podjet. Na lince jezdí jediná tramvaj, a to v pravidelných devítiminutových intervalech. Pokud na křižovaku přijela tramvaj o méně než 3 minuty dříve než auto, auto a tramvaj se potkají (a tedy tramvaj auto zbrzdí). Nelze předpokládat, že by se řidič auta při výběru času odjezdu z místa A řídil jízdním řádem tramvaje. Řidič auta jezdí trasu každý den, vždy jednou denně. Kolikrát lze očekávat, že ho tramvaj zbrzdí za měsíc? Jaká je pravděpodobnost, že tramvaj řidiče zbrzdí alespň třikrát? (Jízdní řád tramvaje je každý den v době, kdy řidič auta trasu jezdí, stejný, měsíc = 21 pracovních dní. *Pokud se rozhodnete nahrazovat nahrazovat nějaké rozdělení pravděpodobnosti jiným, zdůvodněte, proč je to možné.*)

6. Jedna z následujících funkcí je pravděpodobnostní funkcí nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $\mathrm{E}X$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2, 4, 5\} \\ 0,1 & x \in \{3, 6, 8, 10\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = \sin x \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n = 10, p = 0,25)$ určete $F(3,4)$, $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ a $P(X > 8)$.

Komentář

Výpočet numerického řešení soustavy nelineárních rovni je pracný a zdlouhavý (a v zásadě „nic netestující“. Z tohoto důvodu nepožadujeme, aby student nalezl řešení s danou přesností, ale postačí nám provedení jednoho kroku jedné z metod. Nejprve je však nutné prokázat středoškolské znalosti, tj. dané křivky vykreslit. Je také nutné z reálného zadání zformulovat zadání ve tvaru, s jakým jsme pracovali na přednáškách a na cvičeních.

Z přednášky o numerickém integrování by si studenti měli zapamatovat mj. fakt, že přesnost numerického integrování souvisí s průběhem funkce mezi integračními mezemi a že ji lze ovlivnit vhodnou volbou metody a dělení inetrvalu. To vysvětluje formulaci zadání příkladu 2. Získání analytického výsledku je triviální; navíc se jedná o učivo prvního ročníku.

Polynom v příkladu 3 bude stupně nejvýše 3. Je-li požadavkem převedení polynomu do tvaru $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, je nutné si rozmyslet, který typ konstrukce interpolačního polynomu bude z hlediska převádění do požadovaného tvaru vhodnější. Zadané body leží na přímce. Požadovaný komentář se tedy nabízí. Určení hodnoty $P_n(0)$ je triviálním požadavkem – ovšem za předpokladu, že student zná používanou symboliku a rozumí zadání. Ze všeho nejdříve se však předpokládá, že student zná myšlenku interpolačního polynomu, tj. je schopen převést reálné zadání na formulaci úlohy uvedenou v učebním textu.

Příklady 4 a 5 jsou slovní úlohy, u kterých hraje velkou roli schopnost porozumění čtenému textu. Zadání je nutné si přesně přečíst a uvědomit si, že jejich formulace je složitá jen zdánlivě – ve skutečnosti je taková proto, aby bylo možno jednoznačně říci, která rozdělení pravděpodobnosti je nutné při řešení těchto zadání aplikovat. V příkladu 5 navíc používáme dvě různá rozdělení pravděpodobnosti. Pro řešení obou příkladů je klíčové uvědomit si, co popisuje příslušná náhodná veličina, jaké rozdělení s jakými parametry má, a jak (v řeči náhodných veličin) zformulujeme požadavek zadání. Požadavek na zdůvodnění náhrady jednoho rozdělení (zde binomického) jiným je uveden proto, aby si student pečlivě rozmyslel, zda je tato náhrada opravdu přípustná.

Pojem *pravděpodobnostní funkce* patří k základním pojmům teorie pravděpodobnosti. Příklad 6 proto testuje, zda student zná jeho vlastnosti a umí je na konkrétní funkci identifikovat. Vlastní výpočet je prostým dosazením do jednoduchého vzorce.

V příkladu 7 testujeme, zda student rozumí používané symbolice. Pokud ano, jsou odpovědi výsledkem prostého dosazování do vzorců.

Výsledky

1) závisí na zvolené počáteční aproximaci; **2)** výsledek získaný analyticky $-\frac{22}{3}$; **3)** $P_3(x) = 3x-4$, $P_3(0) = -4$; **4)** $0,8825$; **5)** sedmkrát *(rozmyslete si, jak zareagujete, když výsledek nebude celé číslo!)*, $P(X) \geq 3 = 0,9872$; **6)** $\mathrm{E}X = 4,9$; **7)** $F(3,4) = 0,7759$, $\mathrm{E}X = 2,5$, $\mathrm{D}X = 1,875$, $P(X > 8) = 0,00003$

4.2.1 Variantní zadání A

1. Chcete najít průsečík dvou kružnic: jedné, která má střed v bodě $[2,2]$ a poloměr $r=2$, a druhé, která má střed v bodě $[1,1]$ a poloměr $r=2$. Hledáte ten z průsečíků, jehož x–ová souřadnice je menší. Zvolte si vhodnou počáteční aproximaci a proveďte jeden krok Newtonovy metody.

2. Je dána funkce $f(x)=x^2+4x+3$. Vhodnou složenou numerickou metodou určete $\int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. Zdůvodněte volbu metody i volbu dělení intervalu. Srovnejte numerický výsledek s hodnotou integrálu získanou analytickým postupem.

3. Jsou dány tyto body: $A=[0,5;-2,5], B=[0,9;-1,3], C=[2;2], D=[3,3;5,9]$. Proložte jimi interpolační polynom. Výsledek udejte ve tvaru $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Okomentujte získaný polynom. Pak určete $P_n(0)$.

4. Dělník na tovární lince musí čas od času potvrdit svou přítomnost na pracovním místě. V pracovní době (mimo povinné přestávky a mimo dobu, kdy se z pracovního místa elektronicky odhlásí) se mu u pracovního místa rozsvítí kontrolka. Dělník v tu chvíli musí stisknout kontrolní tlačítko. Kontrolka se rozsvěcuje naprosto náhodně a nepředvídatelně, avšak tak, že za 5 pracovních směn (= 40 hodin) se rozsvítí v průměru dvacetkrát. Dělník si chce udělat pětadvacetiminutovou přestávku, aniž by se elektronicky odhlašoval. Jaká je pravděpodobnost, že se v této době nerozsvítí kontrolka?

5. Řidič se z místa A do místa B může dostat dvěma různými způsoby. První je kratší, ale při prvním odbočení se auto dostane na ulici, kde jsou tramvajové koleje, přičemž šířka vozovky nikde nedovoluje tramvaj podjet. Na lince jezdí jediná tramvaj, a to v pravidelných sedmiminutových intervalech. Pokud na křižovaku přijela tramvaj o méně než 3 minuty dříve než auto, auto a tramvaj se potkají (a tedy tramvaj auto zbrzdí). Nelze předpokládat, že by se řidič auta při výběru času odjezdu z místa A řídil jízdním řádem tramvaje. Řidič auta jezdí trasu každý den, vždy jednou denně. Kolikrát lze očekávat, že ho tramvaj zbrzdí za měsíc? Jaká je pravděpodobnost, že tramvaj řidiče zbrzdí alespň třikrát? (Jízdní řád tramvaje je každý den v době, kdy řidič auta trasu jezdí, stejný, měsíc = 20 pracovních dní. *Pokud se rozhodnete nahrazovat nahrazovat nějaké rozdělení pravděpodobnosti jiným, zdůvodněte, proč je to možné.*)

6. Jedna z následujících funkcí je pravděpodobnostní funkcí nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $\mathrm{E}X$.

$$f(x)=\begin{cases} 0,3 & x\in\{2,4\} \\ 0,1 & x\in\{3,5,6,10\} \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \cos x & x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = \sin x \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n = 10, p = 0,4)$ určete $F(2,5)$, $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ a $P(X > 7)$.

4.2.2 Variantní zadání B

1. Chcete najít průsečík dvou kružnic: jedné, která má střed v bodě $[3,3]$ a poloměr $r = 2$, a druhé, která má střed v bodě $[1,1]$ a poloměr $r = 3$. Hledáte ten z průsečíků, jehož x–ová souřadnice je menší. Zvolte si vhodnou počáteční aproximaci a proveďte jeden krok Newtonovy metody.

2. Je dána funkce $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Vhodnou složenou numerickou metodou určete $\int\limits_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. Zdůvodněte volbu metody i volbu dělení intervalu. Srovnejte numerický výsledek s hodnotou integrálu získanou analytickým postupem.

3. Jsou dány tyto body: $A = [0,2; -3,4], B = [0,9; -1,3], C = [2; 2], D = [2,4; 3,2]$. Proložte jimi interpolační polynom. Výsledek udejte ve tvaru $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Okomentujte získaný polynom. Pak určete $P_n(0)$.

4. Dělník na tovární lince musí čas od času potvrdit svou přítomnost na pracovním místě. V pracovní době (mimo povinné přestávky a mimo dobu, kdy se z pracovního místa elektronicky odhlásí) se mu u pracovního místa rozsvítí kontrolka. Dělník v tu chvíli musí stisknout kontrolní tlačítko. Kontrolka se rozsvěcuje naprosto náhodně a nepředvídatelně, avšak tak, že za 5 pracovních směn (= 40 hodin) se rozsvítí v průměru dvacetkrát. Dělník si chce udělat dvacetiminutovou přestávku, aniž by se elektronicky odhlašoval. Jaká je pravděpodobnost, že se v této době nerozsvítí kontrolka?

5. Řidič se z místa A do místa B může dostat dvěma různými způsoby. První je kratší, ale při prvním odbočení se auto dostane na ulici, kde jsou tramvajové koleje, přičemž šířka vozovky nikde nedovoluje tramvaj podjet. Na lince jezdí jediná tramvaj, a to v pravidelných šestiminutových intervalech. Pokud na křižovaku přijela tramvaj o méně než 2 minuty dříve než auto, auto a tramvaj se potkají (a tedy tramvaj auto zbrzdí). Nelze předpokládat, že by se řidič auta při výběru času odjezdu z místa A řídil jízdním řádem tramvaje. Řidič auta jezdí trasu každý den, vždy jednou denně. Kolikrát lze očekávat, že ho tramvaj zbrzdí za měsíc? Jaká je pravděpodobnost, že tramvaj řidiče zbrzdí alespň třikrát? (Jízdní řád tramvaje je každý den v době, kdy řidič auta trasu jezdí, stejný, měsíc = 20 pracovních dní. *Pokud se rozhodnete nahrazovat nahrazovat nějaké rozdělení pravděpodobnosti jiným, zdůvodněte, proč je to možné.*)

6. Jedna z následujících funkcí je pravděpodobnostní funkcí nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $\mathrm{E}X$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,1 & x \in \{3,10\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = \sin x \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

7. Pro $X \sim \mathrm{Bi}(n = 10, p = 0,35)$ určete $F(2,5)$, $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ a $P(X > 7)$.

4.3 Zadání

1. Je dána funkce $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Simpsonovou metodou s libovolným dělením určete $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x$. Okomentujte rozdíl mezi numerickým výsledkem a hodnotou integrálu získanou analytickým postupem. *(Komentářem se rozumí zdůvodnění toho, proč je rozdíl (příliš) malý / velký, nikoli pouhé porovnání dvou čísel.)*

2. Jsou dány tyto body: $A = [0,2; -3,4], B = [0,9; -1,3], C = [2; 2], D = [2,4; 3,2]$. Proložte jimi interpolační polynom. Výsledek udejte ve tvaru $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Okomentujte získaný polynom. Pak určete $P_n(0)$.

3. Stejnými body jako v příkladě 2 chcete proložit metodou nejmenších čtverců nejvhodnější přímku. Napište příslušnou soustavu rovnic, vyřešte ji a zapište hledanou přímku.

4. Víme, že výsledky získané postupem, který je pro nějaký výrobní proces obvyklý, mají normální rozdělení, jehož střední hodnota je 100 a rozptyl 49. Postup jsme inovovali a

   (a) v jednom pokusu jsme získali výsledek 121,

   (b) v 25 pokusech jsme získali průměrný výsledek 114.

   Pro každý případ zvlášť testujte hypotézu, že nový výrobní proces zaručuje lepší výsledky než původní. V obou případech proveďte oboustranný test a pracujte na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

5. Řidič se z místa A do místa B může dostat dvěma různými způsoby. První je kratší, ale při prvním odbočení se auto dostane na ulici, kde jsou tramvajové koleje, přičemž šířka vozovky nikde nedovoluje tramvaj podjet. Na lince jezdí jediná tramvaj, a to v pravidelných šestiminutových intervalech. Pokud na křižovaku přijela tramvaj o méně než 2 minuty dříve než auto, auto a tramvaj se potkají (a tedy tramvaj auto zbrzdí). Nelze předpokládat, že by se řidič auta při výběru času odjezdu z místa A řídil jízdním řádem tramvaje. Řidič auta jezdí trasu každý den, vždy jednou denně. Kolikrát lze očekávat, že ho tramvaj zbrzdí za měsíc? Jaká je pravděpodobnost, že tramvaj řidiče zbrzdí alespň třikrát? (Jízdní řád tramvaje je každý den v době, kdy řidič auta trasu jezdí, stejný, měsíc = 20 pracovních dní. *Pokud se rozhodnete nahrazovat nahrazovat nějaké rozdělení pravděpodobnosti jiným, zdůvodněte, proč je to možné.*)

6. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $\mathrm{E}X$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,1 & x \in \{3,10\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

7. Pro $X \sim \mathrm{Exp}(3)$ určete $F(3)$, $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ a $P(X = 3)$.

Komentář

Zadání má některé příklady, konkrétně příklady 2, 5 a 7 podobné příkladům ze zadání 4.2.

V příkladu 1 požadujeme použití přesné metody (zadání 4.2 připouštělo volbu metody). Volbu dělení intervalu ponecháváme na studentovi. Vhodné dělení je však evidentní – stačí si jen uvědomit, že požadujeme Simpsonovu metodu a zadaná funkce je parabola.

Jestliže v příkladu 2 student zjistí, že zadané body leží na přímce, má kontrolní výsledek příkladu 3. Pokud ne, nic se neděje – jedná se o standardní a přímočaré zadání s přesně definovanými kroky postupu řešení.

Podobně standardní a přímočaré je zadání příkladu 4. Zadání tohoto typu jsou uvedena jak v učebním textu tak i ve sbírce příkladů.

Příklad 6 je analogií příkladu 6 ze zadání 4.2. Ptáme se jen na vlastnosti jiného základního pojmu teorie pravděpodobnosti, takže i když je zadání vizuálně téměř shodné, je nutné ověřovat zcela jiné vlastnosti. Výpočet střední hodnoty nyní zahrnuje integrování metodou per partes, a je tedy časově náročnější. Tato základní integrační metoda však byla probírána již v 1. semestru.

Výsledky

1) výsledek získaný analyticky $-\frac{10}{3}$; **2)** $P_3(x) = 3x - 4$, $P_3(0) = -4$; **3)** $y = 3x - 4$; **4)** a) hypotézu přijímáme; b) hypotézu přijímáme; **5)** $\mathrm{E}X = \frac{20}{3}$, $P(X) \geq 3 = 0,9824$; **6)** $\mathrm{E}X = 0,5708$; **7)** $F(3) = 0,9999$, $\mathrm{E}X = \frac{1}{3}$, $\mathrm{D}X = \frac{1}{9}$, $P(X = 3) = 0$

4.3.1 Variantní zadání A

1. Je dána funkce $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Simpsonovou metodou s libovolným dělením určete $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. Okomentujte rozdíl mezi numerickým výsledkem a hodnotou integrálu získanou analytickým postupem. *(Komentářem se rozumí zdůvodnění toho, proč je rozdíl (příliš) malý / velký, nikoli pouhé porovnání dvou čísel.)*

2. Jsou dány tyto body: $A = [0,5; -2,5], B = [0,9; -1,3], C = [2; 2], D = [2,4; 3,2]$. Proložte jimi interpolační polynom. Výsledek udejte ve tvaru $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Okomentujte získaný polynom. Pak určete $P_n(0)$.

3. Stejnými body jako v příkladě 2 chcete proložit metodou nejmenších čtverců nejvhodnější přímku. Napište příslušnou soustavu rovnic, vyřešte ji a zapište hledanou přímku.

4. Víme, že výsledky získané postupem, který je pro nějaký výrobní proces obvyklý, mají normální rozdělení, jehož střední hodnota je 100 a rozptyl 64. Postup jsme inovovali a

   (a) v jednom pokusu jsme získali výsledek 121,

   (b) v 36 pokusech jsme získali průměrný výsledek 114.

   Pro každý případ zvlášť testujte hypotézu, že nový výrobní proces zaručuje lepší výsledky než původní. V obou případech proveďte oboustranný test a pracujte na hladině významnosti $\alpha = 0,04$.

5. Řidič se z místa A do místa B může dostat dvěma různými způsoby. První je kratší, ale při prvním odbočení se auto dostane na ulici, kde jsou tramvajové koleje, přičemž šířka vozovky nikde nedovoluje tramvaj podjet. Na lince jezdí jediná tramvaj, a to v pravidelných osmiminutových intervalech. Pokud na křižovaku přijela tramvaj o méně než 3 minuty dříve než auto, auto a tramvaj se potkají (a tedy tramvaj auto zbrzdí). Nelze předpokládat, že by se řidič auta při výběru času odjezdu z místa A řídil jízdním řádem tramvaje. Řidič auta jezdí trasu každý den, vždy jednou denně. Kolikrát lze očekávat, že ho tramvaj zbrzdí za měsíc? Jaká je pravděpodobnost, že tramvaj řidiče zbrzdí alespň čtyřikrát? (Jízdní řád tramvaje je každý den v době, kdy řidič auta trasu jezdí, stejný, měsíc = 20 pracovních dní. *Pokud se rozhodnete nahrazovat nahrazovat nějaké rozdělení pravděpodobnosti jiným, zdůvodněte, proč je to možné.*)

6. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Najděte ji, zdůvodněte svoji volbu, uveďte, proč ostatní funkce nevyhovují, a desetinným číslem vyjádřete $\mathrm{E}X$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

7. Pro $X \sim \mathrm{Exp}(4)$ určete $F(4)$, $\mathrm{E}X$, $\mathrm{D}X$ a $P(X = 4)$.

4.4 Zadání

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^4 - 3x - 3\cos 2x = 0$ a dále $2x^2 + 3x - 2e^{2x} = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:
$$\begin{aligned} ax + 16y + 5z &= 8 \\ 4x + 19y - 12z &= 2 \\ 5x - 3y + 17z &= 6 \end{aligned}$$
Z nabídky $a = 9$, $a = 27$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení (volbu zdůvodněte). Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' + 2y = x^2,\ \ y(1) = -2.$$
S krokem $h = 0{,}25$ najděte hodnotu $y(2)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete $P(EU - 0{,}5 < U < EU + 1)$ numericky složenou lichoběžníkovou metodou s 5 dílky. *Pro U platí, že hustota* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{2, 4, 6, 8\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(4) = 0{,}1$, $p(6) = 0{,}2$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 4,2. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 6{,}5$.

6. Test má 80 otázek. Každá nabízí 4 možné odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že v tomto testu získáme nejvýše 16 bodů.

7. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{pro } x = 0, \\ 0{,}6 & \text{pro } x = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 0{,}25x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 2\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$
$$h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Komentář

Příklady 1, 2 a 3 jsou variantami příkladů ze zadání 4.1. Platí pro ně tedy podobný popis. Podstatný rozdíl je však v zadání příkladu 1, kde je interval tentokrát „bezproblémový“. Rozhodnutí o správné rovnici lze provést víceméně okamžitě dosazením (protože obě funkce jsou spojité a je zadáno, že na intervalu má řešení jen jedna z rovnic). Volba konstanty u příkladu 2 se nabízí na první pohled (ovšem je třeba ji správně zdůvodnit, což pro studenty neznalé příslušné látky z 1. ročníku může být problém). V příkladu 3 požadujeme méně než v témže příkladu v zadání 4.1.

Příklad 4 je jedním ze zadání, které kombinují numerické metody a teorii pravděpodobnosti – požadavkem je numericky určit příslušnou pravděpodobnost. Předpokladem pochopitelně je, že student rozumí používané symbolice a uvědomuje si, jaký význam má nápověda uvedená v zadání (a mj. proč se v zadání mluví o *hustotě pravděpodobnosti*).

Příklad 5 pracuje se základními pojmy teorie pravděpodobnosti a statistiky. Záměrně však volíme jejich slovní vyjádření a vyhýbáme se používání symbolických zápisů (se kterými pracují vzorce a definice).

Příklad 6 je jednoduché zadání typu aproximace binomického rozdělení normálním. Zadání podobného typu jsou uvedena v učebním textu i ve sbírce příkladů.

Příklad 7 je analogií příkladu 6 ze zadání 4.1. Tak jako i v jiných příkladech podobného typu, je i zde nutné umět rozlišovat mezi pojmy *pravděpodobnostní funkce*, *hustoty pravděpodobnosti* a *distribuční funkce* náhodné veličiny, protože nesprávné funkce jsou záměrně voleny tak, aby měly vlastnosti jiných funkcí než distribuční. Vlastní výpočet je jednoduchý a není časově náročný.

Výsledky

1) $-0,51$; **2)** např. Jacobiho metodou $\mathbf{x}^{(1)} = (\frac{8}{27}, \frac{2}{19}, \frac{6}{17})$; **3)** 1,0508; **4)** 0,5297; **5)** $\mathrm{D}X = 62$; $F(6{,}5) = 0{,}8$; **6)** bez korekce 0,1508 (lze i s korekcí); **7)** $\frac{4}{9}$

4.4.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^4 + 3x - 3\cos 2x = 0$ a dále $5x^2 + 3x - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:
$$\begin{aligned} ax + 14y - 3z &= 7\\ 5x + 18y + 10z &= 4\\ 3x - 4y - 13z &= 3 \end{aligned}$$
Z nabídky $a = -24$, $a = 8$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení (volbu zdůvodněte). Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' + 2y = x^2,\ \ y(1) = 3.$$
S krokem $h = 0{,}25$ najděte hodnotu $y(2)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete $P(EU - 1 < U < EU + 0{,}5)$ numericky složenou lichoběžníkovou metodou s 5 dílky. *Pro U platí, že hustota* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{1, 3, 5, 7\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(3) = 0{,}2$, $p(5) = 0{,}1$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 4,8. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 5{,}5$.

6. Test má 80 otázek. Každá nabízí 6 možných odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že v tomto testu získáme alespoň 10 bodů.

7. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}3 & \text{pro } x = 0,\\ 0{,}7 & \text{pro } x = 1,\\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,\\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0,\\ 0{,}125x^3 & \text{pro } x \in \langle 0, 2\rangle,\\ 1 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

4.4.2 Variantní zadání B

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^4 + 4x - 3\cos 2x = 0$ a dále $5x^2 + 3x - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle -2, -1 \rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:
$$\begin{aligned} ax - 13y + 2z &= 9\\ 2x - 17y + 13z &= 6\\ 4x + 4y - 11z &= 3 \end{aligned}$$
Z nabídky $a = -18$, $a = 6$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení (volbu zdůvodněte). Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' + 2y = x^2,\ \ y(2) = -1.$$
S krokem $h = 0{,}25$ najděte hodnotu $y(3)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete $P(EU < U < EU + 1{,}5)$ numericky složenou lichoběžníkovou metodou s 5 dílky. *Pro U platí, že hustota* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(2) = 0{,}1$, $p(3) = 0{,}4$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 3,1. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 3{,}5$.

6. Test má 90 otázek. Každá nabízí 4 možné odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že v tomto testu získáme alespoň 20 bodů.

7. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0,\\ 0{,}04x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 5\rangle,\\ 1 & \text{pro } x > 5, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0,\\ \sin x & \text{pro } x \geq 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{pro } x = 0,\\ 0{,}8 & \text{pro } x = 1,\\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

4.4.3 Variantní zadání C

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^4 - 4x - 3\cos 2x = 0$ a dále $2x^2 + 3x - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle -2, -1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:
$$\begin{aligned} ax - 12y + 4z &= 6\\ 2x - 16y - 11z &= 2\\ 5x + 4y + 15z &= 4 \end{aligned}$$
Z nabídky $a = 7$, $a = 21$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení (volbu zdůvodněte). Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' + 2y = x^2,\ \ y(2) = 4.$$
S krokem $h = 0{,}25$ najděte hodnotu $y(3)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete $P(EU - 1{,}5 < U < EU)$ numericky složenou lichoběžníkovou metodou s 5 dílky. *Pro U platí, že hustota* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{2, 3, 4, 5\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(3) = 0{,}4$, $p(4) = 0{,}1$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 3,2. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 4{,}5$.

6. Test má 90 otázek. Každá nabízí 6 možných odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že v tomto testu získáme nejvýše 12 bodů.

7. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } x < 0,\\ 1 & \text{pro } x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0,\\ x^4 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle,\\ 1 & \text{pro } x > 1, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{pro } x = 0,\\ 0{,}9 & \text{pro } x = 1,\\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

4.4.4 Variantní zadání D

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^4+4x-3\cos 2x=0$ a dále $5x^2+3x-2\mathrm{e}^{2x}=0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle -2,-1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon=0{,}1$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:
$$\begin{aligned} ax-13y+2z&=9\\ 2x-17y+13z&=6\\ 4x+4y-11z&=3 \end{aligned}$$
Z nabídky $a=-18$, $a=6$ vyberte tu hodnotu, pro kterou soustava může mít právě jedno řešení (zdůvodněte, proč si druhou z hodnot vybrat nemůžete; existenci *právě jednoho* řešení u „správné“ hodnoty ověřovat nemusíte). Pak tuto hodnotu a dosaďte do soustavy a pro počáteční aproximaci $x^{(0)}=0, y^{(0)}=0, z^{(0)}=0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy. *Zaručte konvergenci použité metody.*

3. Je dána počáteční úloha
$$y'+2y=x^2,\ y(2)=-1.$$
S krokem $h=0{,}25$ najděte hodnotu $y(3)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu U, která má standardizované normální rozdělení, určete $P(\mathrm{E}U<U<\mathrm{D}U)$ numericky složenou lichoběžníkovou metodou se 4 dílky. *Pro U platí, že hustota $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{1,2,3,4\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(2)=0{,}1$, $p(3)=0{,}4$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 3,1. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x=3{,}5$.

6. Test má 90 otázek. Každá nabízí 4 možné odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že v tomto testu získáme alespoň 20 bodů.

7. Jedna z následujících funkcí je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X. Určete $\mathrm{E}X$.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x<0,\\ 0{,}04x^2 & \text{pro } x\in\langle 0,5\rangle,\\ 1 & \text{pro } x>5, \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} \sin x & \text{pro } x\in\langle 0,10\pi\rangle,\\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{pro } x = 0, \\ 0{,}8 & \text{pro } x = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

4.5 Zadání

1. Je dána rovnice $10\sin(2x - 0{,}1) - x - 1 = 0$. Seřaďme její kladná řešení podle velikosti od nejmenšího po největší a označme je $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}1$ najděte x_1 této posloupnosti. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána elipsa se středem v bodě $[0,0]$, hlavní poloosou (na ose x) délky 3 a vedlejší poloosou (na ose y) délky 2. V bodech s x–ovými souřadnicemi $-2, -1, 0, 1, 2$ aproximujte část elipsy ležící nad osou x nejvhodnější parabolou (ve smyslu metody nejmenších čtverců). *Stačí, když napíšete rovnici paraboly v obecném tvaru a sestavíte soustavu rovnic pro výpočet jejích koeficientů. Koeficienty již počítat nemusíte.*

3. Je dána počáteční úloha
$$y' + 2y = x^2,\ y(1) = -3.$$
S krokem $h = 0{,}25$ najděte hodnotu $y(2)$ Eulerovou metodou.

4. Je dána pravděpodobnostní funkce nějaké náhodné veličiny X
$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,7^x & \text{pro } x \in \{2, 3, \ldots\}, \\ 0 & \text{jinak} . \end{cases}$$
Najděte koeficient k a poté desetinným číslem vyjádřete $P(X > 3)$ a $F(3{,}5)$.

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{1, 4, 6, 10\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(4) = 0{,}1$, $p(6) = 0{,}3$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 6,4. Určete směrodatnou odchylku náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 7{,}5$.

6. V průběhu pracovního týdne (má se na mysli $5 \times 24 = 120$ hodin od pondělí do pátku) dojde v nějaké oblasti ČR průměrně ke 30 dopravním nehodám jistého typu, které jsou nahlášeny policii. Určete pravděpodobnost, že v průběhu příštího pracovního týdne bude první taková nehoda v této oblasti policii nahlášena během prvních čtyř hodin (tj. že doba čekání na nahlášení první nehody nepřesáhne čtyři hodiny).

7. Je dána distribuční funkce nějaké spojité náhodné veličiny X
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ -\sin x & \text{pro } x \in \langle a, \frac{3}{2}\pi\rangle, \\ 1 & \text{pro } x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$
Určete konstantu a a poté vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.

Komentář

Zadání podobné zadání příkladu 1 je v současné době uvedeno v učebním textu jako ukázka „reálného požadavku" při separaci kořenů jedné nelineární rovnice. Volba metody je ponechána na studentovi – náročnost řešení příkladu si tedy řídí ten, kdo příklad řeší. Pro metodu řešení je tedy nutné se rozhodnout se znalostí všech pro a proti. Poznámka kurzívou míří zejména na *Newtonovu metodu*.

Příklad 2 je zadání týkající se metody nejmenších čtverců. Je řečeno, jak postupovat a pomocí čeho aproximovat. Tyto informace jsou však bezcenné v případě, že student neumí sestavit rovnici příslušné elipsy (protože pak není možné dopočítat y–ové souřadnice zadaných bodů). To je však látka střední školy. V příkladu není nutné příslušnou soustavu rovnic řešit – pouze by to prodlužovalo dobu řešení a jednalo by se o *dva příklady v jednom*, což zde vůbec není nutné.

Příklad 3 je standardní zadání. Výpočet je redukován na prosté dosazování do vzorce – ovšem poté, co student úlohu přeformuluje do tvaru používaném v učebním textu. To je ostatně i případ podobných příkladů v zadáních 4.2 nebo 4.4.

Úspěšné vypracování řešení příkladu 4 vyžaduje znalost vlastností *pravděpodobnostní funkce* a *distribuční funkce* náhodné veličiny X. V řešení je nutné využít vzorce pro součet nekonečné geometrické řady, což je ovšem látka prvního ročníku – teoretická i tam aplikovaná (v partiích o funkcích komplexní proměnné v letním semestru).

Příklad 5 je variantou příkladu 5 ze zadání 4.4.

Příklad 6 je standardní zadání na *Poissonovo*, resp. *exponenciální rozdělení pravděpodobnosti*. Podobná zadání se vyskytují jak v učebním textu tak i ve sbírce příkladů.

Řešení příkladu 7 vyžaduje znalost vlastností *distribuční funkce* náhodné veličiny. Vlastní určení hodnoty a je triviální aplikací těchto vlastností, výpočet střední hodnoty předpokládá schopnost integrování per partes, což je látka prvního semestru.

Výsledky

1) 10,5; **2)** $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$, kde c_0, c_1, c_2 jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 5c_0 + 2c_1 + 10c_2 &= 8,7527 \\ 2c_0 + 10c_1 + 2c_2 &= 3,7712 \\ 10c_0 + 2c_1 + 34c_2 &= 15,6969 \end{aligned}$$

3) 0,9883; **4)** 0,49; **5)** $\sqrt{\mathrm{D}X} = 3{,}4117$; $F(7{,}5) = 0{,}6$; **6)** 0,6321; **7)** $a = \pi$; $\mathrm{E}X = 3{,}7124$

4.5.1 Variantní zadání A

1. Je dána rovnice $10\sin(2x - 0{,}1) - x - 2 = 0$. Seřaďme její kladná řešení podle velikosti od nejmenšího po největší a označme je $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}1$ najděte x_1 této posloupnosti. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána elipsa se středem v bodě $[0,0]$, hlavní poloosou (na ose x) délky 4 a vedlejší poloosou (na ose y) délky 2. V bodech s x–ovými souřadnicemi $-2, -1, 0, 1, 2$ aproximujte část elipsy ležící nad osou x nejvhodnější parabolou (ve smyslu metody nejmenších čtverců). *Stačí, když napíšete rovnici paraboly v obecném tvaru a sestavíte soustavu rovnic pro výpočet jejích koeficientů. Koeficienty již počítat nemusíte.*

3. Je dána počáteční úloha
$$y' + 2y = x^2,\ y(1) = -1.$$
S krokem $h = 0{,}25$ najděte hodnotu $y(2)$ Eulerovou metodou.

4. Je dána pravděpodobnostní funkce nějaké náhodné veličiny X
$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,7^x & \text{pro } x \in \{1, 2, \ldots\}, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$
Najděte koeficient k a poté desetinným číslem vyjádřete $P(X > 3)$ a $F(3{,}5)$.

5. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{2, 4, 6, 7\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(4) = 0{,}1$, $p(6) = 0{,}2$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná 4. Určete směrodatnou odchylku náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 6{,}5$.

6. V průběhu pracovního týdne (má se na mysli $5 \times 24 = 120$ hodin od pondělí do pátku) dojde v nějaké oblasti ČR průměrně ke 40 dopravním nehodám jistého typu, které jsou nahlášeny policii. Určete pravděpodobnost, že v průběhu příštího pracovního týdne bude první taková nehoda v této oblasti policii nahlášena během prvních pěti hodin(tj. že doba čekání na nahlášení první nehody nepřesáhne pět hodin).

7. Je dána distribuční funkce nějaké spojité náhodné veličiny X
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < b, \\ -\sin x & \text{pro } x \in \langle b, \frac{3}{2}\pi \rangle, \\ 1 & \text{pro } x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$
Určete konstantu b a poté vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.

4.6 Zadání

1. Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{pro } x \in (0,1) \\ 0,2 & \text{pro } x \in (2,3) \\ mx & \text{pro } x \in (4,5) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

   a) Určete konstantu m tak, aby funkce f byla hustotou pravděpodobnosti nějaké spojité náhodné veličiny.

   b) Udejte příklad intervalu, na němž je distribuční funkce této náhodné veličiny konstantní avšak nenulová.

   c) Udejte příklad intervalu, na němž distribuční funkce této náhodné veličiny není konstantní a má právě jedno minimum, a to v jiném než krajním bodě. Odpověď zdůvodněte.

2. Házeme běžnou šestistěnnou kostkou, dokud nepadne *čtyřka* nebo *liché číslo*, nejvýše však pětkrát. Náhodná veličina X udává počet provedených hodů.

   a) Určete její pravděpodobnostní funkci.

   b) Určete její distribuční funkci.

   c) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet právě čtyřikrát,

   d) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet alespoň čtyřikrát.

3. Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 9,5 kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,03$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

4. Udejte příklad polynomu, který má alespoň 3 různá nenulová reálná řešení a zdůvodněte, proč má právě tato řešení. Poté libovolné z těchto řešení nalezněte Newtonovou metodou s přesností $\varepsilon = 0{,}1$. Beze zbytku ověřte podmínky konvergence.

5. Křivku $y = x^3+x^2-4x+2$ chcete v uzlových bodech $-1, 0, 1, 2$ nahradit přirozeným kubickým splajnem. Napište obecný tvar tohoto splajnu ve formátu dle skript a poté určete alespoň třetinu potřebných koeficientů a_i, b_i, c_i, d_i. U každé části splajnu napište, pro který interval je platná.

6. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + 20y + 3z &= 12 \\ 2x + 2y + 41z &= 21 \end{aligned}$$

$$ax + 22y + 44z \quad = \quad 33$$

Z nabídky $a = 4$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení. Výběr zdůvodněte. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

7. Je dána počáteční úloha

$$y' - y = e^x, \;\; y(1{,}2) = 2$$

S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}4)$. Postupujte jinou metodou než Eulerovou metodou (modifikace jsou povoleny).

Komentář

V příkladě 1 požadujeme, aby student znal vlastnosti dvou základních pojmů pravděpodobnosti a statistiky – *pravděpodobnostní* a *distribuční funkce* – a aby je uměl aplikovat na konkrétní zadání. Příklad 2 je do značné míry podobný.

Příklad 3 je standardním zadáním typu statistického testu probíraného v předmětu. Podobná zadání lze nalézt jak v učebním textu tak i ve sbírce příkladů.

Příklad 4 dává studentům volnost sestavit si vlastní zadání. Pak je mj. zřejmé, na jakém intervalu toto řešení leží. Student má tedy jasnou kontrolu, zda pracoval správně.

Příklad 5 předpokládá, že student je schopen se orientovat ve způsobu výpočtu přirozeného kubického splajnu. Pokud ano, uvědomí si, že požadavek je triviální a že výpočet se redukuje na prosté dosazení, resp. odečtení defaultní hodnoty.

Příklad 6 je variantou příkladu ze zadání 4.4. Příklad 7 je triviální variantou příkladu ze zadání 4.5, proto zakazujeme použití Eulerovy metody.

Výsledky

Uvádíme výsledky pouze u těch příkladů, kde jsou odpovědi jednoznačné.

1) $m = \frac{1}{9}$; **2)** a) $p(k) = (\frac{2}{6})^{k-1}(\frac{4}{6})$ pro $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p(5) = 1 - p(1) - p(2) - p(3) - p(4)$, $p(k) = 0$ jinak; b) distribuční funkce dle definice $F(x) = P(X \leq x)$; c) 0,0247; d) 0,037; **3)** hypotézu přijímáme; **6)** např. Jacobiho metodou $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{3}{8}, \frac{6}{10}, \frac{21}{41})$; **7)** např. metodou Runge–Kutty 4. řádu $y(1{,}4) = 3{,}2538$

4.7 Zadání

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x + \cos 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 8y + 2z &= 12 \\ 2x + 3y + 20z &= 23 \\ ax + 11y + 22z &= 33 \end{aligned}$$

   Z nabídky $a = 44$, $a = 5$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha

$$y' - y = e^x, \ \ y(1{,}4) = 2$$

   S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(2{,}2)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0, 1)$ určete jednoduchou Simpsonovou metodou $P(2EU < U < 2DU)$. *Pro U platí, že* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Máme následující tvrzení:

   a) Šestkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padla šestka. Pravděpodobnost, že šestka padne při třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

   b) Šestkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne při prvním a zároveň třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

   c) Šestkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát je $\frac{1}{36}$.

   d) Máme 5 pravých a 2 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ (tj. pravděpodobnost, že expert pravou bankovku prohlásí za falešnou = pravděpodobnost, že falešnou bankovku prohlásí za pravou = $\frac{1}{5}$). Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou, je $\frac{8}{35}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

6. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 3, 8, 20, 23, 38, 345, 528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.

(a) Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X.

(b) Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje 25 až 110 prvočísel.

7. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{1,4,6,8\} \\ 0,05 & x \in \{3,5,7,9\} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Komentář

Příklady 1 a 2 jsou variantami zadání 4.1. U příkladu 2 se nabízí vydělení jedné z rovnic vhodným číslem a poté přeskládání pořadí rovnic tak, aby byla zajištěna konvergence metod, které byly v předmětu probírány. To je jedna z možností, jak splnit požadavek, aby postup byl „vedoucí k nalezení řešení této soustavy“.

Zadání příkladu 3 je také podobné příkladu 3 ze zadání 4.1, avšak na rozdíl od něj používá desetinná čísla, a to jak v počáteční podmínce, tak i při určování požadované hodnoty. Je tedy zejména nutné vědět, jak je celá úloha o numerickém řešení počátečních úloh definována, co považujeme za její řešení a na co se v zadání vlastně ptáme.

Předpokladem pro řešení příkladu 4 je znalost symboliky. Zadání samotné je velmi jednoduché a výpočet krátký.

Příklad 5 je zadáním na klasickou, resp. podmíněnou pravděpodobnost. Jedná se o krátké testové úlohy, z nichž každá je hodnocena zvlášť.

Předpokladem pro nalezení správného řešení příkladu 6 je orientace v myšlence *rozdělení pravděpodobnosti*. Pokud student ví, jak jsou definována nejčastěji využívána rozdělení pravděpodobnosti, pak zjistí, že výpočet první odrážky je prostou aplikací jednoho z triviálních vzorců. U druhé odrážky je nutné si uvědomit, že aplikovat totéž rozdělení je sice možné, avšak není to příliš vhodné, protože jednodušší je provést náhradu jednoho rozdělení jiným. Základním předpokladem pro nalezení správných výsledků ovšem je, aby student uměl v nabídce identifikovat prvočísla – to je však záležitostí střední, resp. základní školy.

Příklad 7 testuje schopnost rozpoznat mezi zadanými funkcemi tu, která má vlastnosti jedné z velmi často používaných používaných funkcí. Každá nesprávná nabídka je svým způsobem zavádějící (máme-li např. identifikovat *hustotu pravděpodobnosti*, pak se v nabídce vyskytuje také funkce, která je *pravděpodobnostní funkcí* nějaké náhodné veličiny apod.), nebo funkce, která má jen některé z požadovaných vlastností. Vlastní výpočet hledané pravděpodobnosti zahrnuje integrování metodou per partes, což je látka 1. ročníku.

Výsledky

1) 0,74; **2)** např. Jacobiho metodou $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{23}{30})$; **3)** 9,9049; **4)** 0,4736; **5)** a) $\frac{1}{6}$, b) ano, c) 0,2009, d) $\frac{13}{35}$; **6)** a) 50, b) bez korekce 0,8759 (lze i s korekcí); **7)** 0,4597

4.7.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x + \sin 2x - 4 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + 20y + 3z &= 12 \\ 2x + 2y + 41z &= 21 \\ ax + 22y + 44z &= 33 \end{aligned}$$

   Z nabídky $a = 4$, $a = 88$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha

$$y' - y = e^x,\ \ y(1{,}6) = 2$$

   S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(2{,}4)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete jednoduchou Simpsonovou metodou $P(EU < U < 2DU)$. *Pro U platí, že* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padla šestka. Pravděpodobnost, že šestka padne při třetím hodu je $\frac{1}{36}$.
   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne při prvním a zároveň třetím hodu je $\frac{1}{36}$.
   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát je $\frac{1}{36}$.
   d) Máme 5 pravých a 2 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ (tj. pravděpodobnost, že expert pravou bankovku prohlásí za falešnou = pravděpodobnost, že falešnou bankovku prohlásí za pravou = $\frac{1}{5}$). Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou, je $\frac{8}{35}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

6. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 3, 7, 20, 22, 38, 345, 528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.

- Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X.
- Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje 25 až 110 prvočísel.

7. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,1 & x \in \{3,5\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

4.7.2 Variantní zadání B

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 5\sin 2x - 3 = 0$ a dále $\ln 2x + 4x^3 - 2 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 2,3 \rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 20y + 15z &= 10 \\ 2x + 5y + 10z &= 20 \\ ax + 25y + 25z &= 30 \end{aligned}$$

   Z nabídky $a = 5$, $a = 60$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' - y = e^x, \ y(0{,}8) = 2$$
   S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}6)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete jednoduchou Simpsonovou metodou $P(3EU < U < 3DU)$. *Pro U platí, že $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padla pětka. Pravděpodobnost, že pětka padne při třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

b) Šestkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne při prvním a zároveň třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že dvojka padne právě dvakrát je $\frac{1}{36}$.

d) Máme 5 pravých a 2 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ (tj. pravděpodobnost, že expert pravou bankovku prohlásí za falešnou = pravděpodobnost, že falešnou bankovku prohlásí za pravou = $\frac{1}{5}$). Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou, je $\frac{8}{35}$.

U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

6. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 5, 7, 20, 22, 36, 345, 528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.
   - Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X.
   - Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje 25 až 110 prvočísel.

7. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,3 & x \in \{3,9\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = x \text{ pro } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

4.7.3 Variantní zadání C

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $x^2 + 3\sin 2x - 3 = 0$ a dále $\ln 3x + 4x^3 - 1 = 0$. Jedna z nich má na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$ řešení. Libovolnou metodou s přesností $\varepsilon = 0,01$ ho najděte. *Jestliže si zvolíte metodu, u které je nutné ověřit konvergenci, pak ji beze zbytku ověřte.*

2. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 10y + 1z &= 10 \\ x + 5y + 9z &= 20 \\ ax + 15y + 10z &= 30 \end{aligned}$$

Z nabídky $a = 4$, $a = 30$ vyberte tu hodnotu, pro kterou má soustava právě jedno řešení. Pak pro počáteční aproximaci $x^{(0)} = 0, y^{(0)} = 0, z^{(0)} = 0$ proveďte jeden krok iterační metody vedoucí k nalezení řešení této soustavy.

3. Je dána počáteční úloha
$$y' - y = e^x,\ y(1{,}1) = 1$$
S krokem $h = 0,2$ najděte hodnotu $y(1{,}9)$ Eulerovou metodou.

4. Pro náhodnou veličinu $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ určete jednoduchou Simpsonovou metodou $P(\frac{EU}{DU} < U < 2DU)$. *Pro U platí, že* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek.*

5. Máme následující tvrzení:

   a) Čtyřikrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padla trojka. Pravděpodobnost, že trojka padne při třetím hodu je $\frac{1}{36}$.

   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že čtyřka padne při prvním a zároveň druhém hodu je $\frac{1}{36}$.

   c) Šestkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne právě třikrát je $\frac{1}{216}$.

   d) Máme 5 pravých a 2 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$ (tj. pravděpodobnost, že expert pravou bankovku prohlásí za falešnou = pravděpodobnost, že falešnou bankovku prohlásí za pravou = $\frac{1}{5}$). Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou, je $\frac{8}{35}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

6. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 5, 7, 9, 28, 33, 34, 216\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.

   - Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny X.
   - Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje 25 až 110 prvočísel.

7. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,3 & x \in \{3,9\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \langle \pi, \frac{3}{2}\pi \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

4.8 Zadání

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ a dále $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, které představují dva geometrické útvary v rovině. Chcete najít ten jejich průsečík, jehož obě složky jsou kladné. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k nalezení tohoto průsečíku. Za počáteční aproximaci přitom volte bod, jehož souřadnice jsou $[a, b]$, kde a je délka vedlejší poloosy elipsy a b je průměr kružnice. *Podmínky konvergence není nutné ověřovat.*

2. Při měření veličiny v, která závisí na veličině t podle vzorce $v = a + bt$, jsme zjistili následující údaje:

v	1	2	3.1	3.4	3.9	4	4
t	0.3	0.9	2.5	2.9	3.8	3.9	4.1

   Metodou nejmenších čtverů určete konstanty a, b.

3. Je dán polygon s následujícími vrcholy ve struktuře $[x, y]$: $[1,1]$, $[2,2]$, $[3,3]$, $[5,1]$, $[6,2]$, $[5,-3]$, $[4,-4]$, $[2,-1]$. Body, které leží nad osou x, proložte vhodnou křivku. Křivka musí být jen jedna a je možné ji udat ve tvaru součtu konstanta krát součin jednočlenů $(x - a_i)$, kde a_i jsou konkrétní čísla.

4. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X < EX)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,2 & x \in \{2,4,6,8\} \\ 0,1 & x \in \{3,5\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad h(x) = 1 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

5. Pro $X \sim Exp(3)$ víte, že $F(T) = 0,85$. Určete T.

6. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{0,1,2,3\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(1) = 0,2$, $p(3) = 0,4$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná dvěma. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x = 1$.

7. Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5$kg a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 8,5 kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,02$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

Komentář

V prvním příkladu požadujeme provést jeden krok řešení soustavy nelineárních rovnic. Předtím je však nutné soustavu převést do tvaru, který odpovídá formulaci úlohy z učebního textu (aby bylo možné aplikovat příslušné vzorce). Dále je nutné zvolit požadovanou počáteční aproximaci – to však předpokládá znalost terminologie používané na střední škole a schopnost identifikovat potřebné geometrické útvary.

Zadání příkladu 2 přímo říká, že požadavkem je aplikovat metodu nejmenších čtverců. Pomocí čeho aproximovat však neříká. Je to nicméně zřejmé z uvedeného vzorce $v = a+bt$, který je jen jiným zápisem vyjádření přímky používaného v učebním textu. Pro studenta znalého metody nejmenších čtverců by skutečnost, že se dvě hodnoty x_i v zadání rovnají, neměla představovat problém.

Podobně je nutné „dešifrovat" zadání příkladu 3: zde se říká, že máme danými body proložit interpolační polynom, přičemž jej nemusíme upravovat do tvaru $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Bodů je sice zadáno 8, nicméně pracovat máme pouze s pěti z nich. Vzhledem k tomu, že není nutné interpolační polynom upravovat do kanonického tvaru, je srovnatelně náročné hledat jej v Lagrangeově i v Newtonově tvaru. U Lagrangeova tvaru je pouze nutné vzájemně vynásobit číselné konstanty.

Příklad 4 je variantou příkladu 7 ze zadání 4.7.

Příklad 5 předpokládá znalost symboliky používané v předmětu. Vlastní výpočet pomocí distribuční funkce je poté standardním výpočtem.

Příklad 6 je do jisté míry opakem příkladu 5. Zde veškeré pojmy vypisujeme slovně. Student si je musí se symboly používanými v předmětu provázat sám. Zadání navíc záměrně kombinuje provázané vlastnosti čtyř nejběžnějších pojmů. K úspěšnému vyřešení zadání je potřeba umět využít vlastností každého z nich.

Příklad 7 je standardním zadáním statistického textu jednoho z typů, které jsou v předmětu probírány. Ve variantním zadání je tento příklad nahrazen (opět standardním) zadáním na aproximaci binomického rozdělení pravděpodobnosti normálním.

Výsledky

1) $\mathbf{x}^{(1)} = (1{,}9211; 3{,}6579)$; **2)** $v = -1{,}3205 + 1{,}2917t$; **3)** lze řešit více způsoby, sestavte interpolační polynom, použijte jen body, jejichž druhá složka je kladná; **4)** 0,4597; **5)** 0,6324; **6)** $\mathrm{D}X = 1$, $F(1) = 0{,}3$ (využíváme definici $F(x) = P(X \leq x)$, tj. definici z aktualizovaného učebního textu); **7)** hypotézu přijímáme

4.8.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány tyto dvě rovnice: $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ a dále $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$, které představují dva geometrické útvary v rovině. Chcete najít ten jejich průsečík, jehož obě složky jsou kladné. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k nalezení tohoto průsečíku. Za počáteční aproximaci přitom volte bod, jehož souřadnice jsou $[a,b]$, kde a je délka vedlejší poloosy elipsy a b je průměr kružnice. *Podmínky konvergence není nutné ověřovat.*

2. Při měření veličiny v, která závisí na veličině t podle vzorce $v=a+bt$, jsme zjistili následující údaje:

v	1	2	2.1	2.4	3.9	4	4
t	0.3	0.9	2.5	2.9	3.8	3.9	4.1

   Metodou nejmenších čtverů určete konstanty a,b.

3. Je dán polygon s následujícími vrcholy ve struktuře $[x,y]$: $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[5,2]$, $[6,1]$, $[5,-5]$, $[4,-2]$, $[2,-3]$. Body, které leží nad osou x, proložte vhodnou křivku. Křivka musí být jen jedna a je možné ji udat ve tvaru součtu konstanta krát součin jednočlenů $(x-a_i)$, kde a_i jsou konkrétní čísla.

4. Jedna z následujících funkcí je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X. Určete $P(X<EX)$.

$$f(x)=\begin{cases}0,1 & x\in\{2,4,6,8\}\\ 0,3 & x\in\{3,5\}\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\sin x & x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}\qquad h(x)=1 \text{ pro } x\in\mathbb{R}.$$

5. Pro $X\sim Exp(2)$ víte, že $F(T)=0,75$. Určete T.

6. Pro náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot z množiny $\{0,1,2,3\}$, známe některé hodnoty pravděpodobnostní funkce. Víme, že $p(1)=0,2$, $p(3)=0,4$. Dále víme, že střední hodnota náhodné veličiny X se rovná $1,6$. Určete rozptyl náhodné veličiny X a dále hodnotu distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě $x=1$.

7. Test má 100 otázek. Každá nabízí 5 možných odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že se od počtu bodů, které lze při náhodném tipování v tomto testu očekávat, bude náš výsledek odlišovat alespoň o 7.

4.9 Zadání

1. Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	3	a
y	-0,364	4,356	57,876	0

Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,1x^2 + 1,36x - 1,104$ byl interpolačním polynomem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádku x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnice se středem $S_k = [-1, -1]$ a poloměrem $r = 2$ a elipsy se středem $S_e = [-2, 1]$, hlavní poloosou (tj. rovnoběžnou s osou x) $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. Za počáteční aproximaci volte bod $[0, 0]$.

3. Proveďte 2 kroky Gauss-Seidelovy metody vedoucí k nalezení řešení soustavy rovnic pro $x^{(0)} = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} -x - y + z &= -1 \\ x - y + 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(3)$. Jednoduchou Simpsonovou metodou vypočtěte $P(X < 3)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Test má 100 otázek. Každá nabízí 5 možných odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že získáme nejvýše polovinu bodů, které lze při náhodném tipování v tomto testu očekávat.

6. Je dána distribuční funkce $F(x)$ nějaké náhodné veličiny X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \sin x & \text{pro } x \in (0, k) \\ 1 & \text{pro } x \geq k \end{cases}$$

Desetinným číslem vyjádřete $P(X \in (\frac{\pi}{3}, \pi))$. *V případě, že pravděpodobnost nebude vyjádřena desetinným číslem, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů.*

7. Je dána pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nějaké náhodné veličiny X:

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,8^x & \text{pro } x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Desetinným číslem vyjádřete $F(3{,}5)$. *V případě, že výsledek bude udán v jiném tvaru než jako desetinné číslo, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů.*

Komentář

Příklad 1 je zadáním na interpolační polynom pouze zdánlivě. Ve skutečnosti využijeme vlastností interpolačního polynomu (tedy, že prochází zadanými body) k tomu, abychom mohli najít řešení jedné nelineární rovnice. Separace kořenů je přitom velmi jednoduchá, protože potřebné funkční hodnoty již máme vypočtené. Metoda řešení není zadaná, proto lze jistě volit tu, kterou student považuje za nejjednodušší.

Příklad 2 je variantou příkladu 1 ze zadání 4.2 – pouze není předepsána metoda a místo dvou kružnic pracujeme s kružnicí a elipsou. Počáteční aproximace je dána, což usnadňuje výpočet.

Příklad 3 je standardním zadáním – pouze je nutné si uvědomit, že je nutné splnit požadavek na postup „vedoucí k nalezení řešení“. Bez vynásobení soustavy maticí $\mathbf{A}^T$ ho splnit nelze.

Příklad 4 využívá jak poznatků z teorie pravděpodobnosti tak z numerických metod. Vlastní výpočet je jednoduchý – ovšem jen za předpokladu, že si student uvědomí, co znamená zápis $X \sim \mathrm{Exp}(2)$, jaká je v tomto případě hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X a jak s její pomocí vypočítat hledanou pravděpodobnost.

Příklady 5 – 7 jsou standardní zadání, která se objevují jak v učebním textu tak i ve sbírce příkladů. Požadavek na vyjádření výsledku desetinným číslem u příkladů 6 a 7 není možné splnit bez vyčíslení konstanty k. Její nalezení v příkladu 7 předpokládá schopnost umět sečíst nekonečnou geometrickou řadu. To je však dovednost, kterou bylo nutno prokázat již ve 2. semestru v předmětu *Matematika 2* při rozvoji funkce do Laurentovy řady. Požadavek na určení hodnoty distribuční funkce v bodě, ve kterém pravděpodobnostní funkce nabývá hodnoty 0, by neměl překvapit.

Výsledky

1) 0,4, příp. $-2{,}3$, příp. $-1{,}2$; **2)** např. Newtonovou metodou $\mathbf{x}^{(1)} = (-0{,}2727; -0{,}7273)$; **3)** $\mathbf{x}^{(2)} = (1{,}75; -0{,}7593; 0{,}1188)$; **4)** 1,5668 (výsledek je sice nesmyslný, ale je numericky správný, protože integrujeme numericky); **5)** 0,0063 (bez korekce; lze i s korekcí); **6)** 0,134; **7)** 0,5904

4.9.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	2	a
y	-0,364	4,356	22,016	0

   Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,1x^2 + 1,36x - 1,104$ byl interpolačním polynomem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádku x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnice se středem $S_k = [1, -1]$ a poloměrem $r = 2$ a elipsy se středem $S_e = [-2, 1]$, hlavní poloosou (tj. rovnoběžnou s osou x) $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. Za počáteční aproximaci volte bod $[0, 1]$.

3. Proveďte 2 kroky Gauss-Seidelovy metody vedoucí k nalezení řešení soustavy rovnic pro $x^{(0)} = (0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 3 \\ 2x - y + z &= 6 \end{aligned}$$

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(2)$. Jednoduchou Simpsonovou metodou vypočtěte $P(X < 1,8)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Test má 100 otázek. Každá nabízí 5 možných odpovědí, přičemž správně je vždy právě 1. Každá správná odpověď je hodnocena 1 bodem, špatná odpověď 0 body. Zadání vůbec nerozumíme, proto náhodně tipujeme. Určete pravděpodobnost, že získáme alespoň polovinu bodů, které lze při náhodném tipování v tomto testu očekávat.

6. Je dána distribuční funkce $F(x)$ nějaké náhodné veličiny X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \sin x & \text{pro } x \in (0, k) \\ 1 & \text{pro } x \geq k \end{cases}$$

   Desetinným číslem vyjádřete $P(X \in (\frac{\pi}{6}, \pi))$. *V případě, že pravděpodobnost nebude vyjádřena desetinným číslem, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů.*

7. Je dána pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nějaké náhodné veličiny X:

$$p(x) = \begin{cases} k \cdot 0,7^x & \text{pro } x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Desetinným číslem vyjádřete $F(2, 5)$. *V případě, že výsledek bude udán v jiném tvaru než jako desetinné číslo, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů.*

4.10 Zadání

1. Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	1,5	a
y	-0,364	4,356	11,286	0

Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,1x^2 + 1,36x - 1,104$ byl interpolačním polynomem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádku x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnice se středem $S_k = [1, -1]$ a poloměrem $r = 2$ a elipsy se středem $S_e = [-2, 1]$, hlavní poloosou (tj. rovnoběžnou s osou x) $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. Za počáteční aproximaci volte bod $[-1, -1]$.

3. Je dána počáteční úloha $y' = x - y$, $y(1) = 2$. Eulerovou metodou nejprve s krokem $0,2$ a poté s krokem $0,1$ určete $y(1,4)$.

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(2)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte $P(X < 2)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Šestkrát za sebou opakujeme náhodný nezávislý pokus. Víme, že pravděpodobnost toho, že úspěch nastane nejvýše pětkrát, je $\frac{728}{729}$. Určete pravděpodobnost, že úspěch nastane méně často, než lze očekávat. Výslednou pravděpodobnost vyjádřete desetinným číslem.

6. Je dána funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle \\ ax + b & \text{pro } x \in (0, c) \\ 1 & \text{pro } x \ge c \end{cases}$$

Určete a, b, c tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X, a poté desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že $X \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{c}{3} \rangle$.

7. Stokrát za sebou náhodně najednou vybereme 4 karty z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Zajímá nás, zda jsme vybrali alespoň jedno eso nebo alespoň jednoho krále. Určete pravděpodobnost, že alespoň jedno eso nebo alespoň jednoho krále vybereme nejméně 65-krát avšak nejvýše 80-krát.

Komentář

Příklady 1, 2, 4 a 6 jsou variantami příkladů ze zadání 4.9, jen u příkladu 4 požadujeme řešení složenou metodou. Avšak jednodušší a pro nízký počet dílků, takže časová náročnost řešení je srovnatelná. Při řešení příkladu 6 využíváme stejný postup, jen máme za úkol nalézt více koeficientů.

Příklad 3 je standardním zadáním – pouze je nutné si uvědomit, že se ptáme na jednu konkrétní hodnotu, která bude pro různé kroky obecně různá.

Příklady 5 a 7 jsou slovní zadání na procvičení základů teorie pravděpodobnosti. V příkladu 5 je pravděpodobnost vyjádřená zlomkem pro snazší manipulaci a výpočet. Řešení probíhá ve dvou krocích – v prvním je třeba určit pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu, ve druhém pak odpovědět na zadanou otázku. Podobně „rozfázovaně“ je třeba řešit také příklad 7. Zde v posledním kroku využijeme aproximaci jednoho rozdělení pravděpodobnosti jiným. Zejména je však nutné situaci na začátku správně analyzovat a uvědomit si, že ji lze popsat vhodným rozdělením pravděpodobnosti.

Výsledky

1) 0,4, příp. $-2{,}3$, příp. $-1{,}2$; **2)** např. Newtonovou metodou $\mathbf{x}^{(1)} = (-1; -1{,}6875)$; **3)** 1,68, resp. 1,7122; **4)** 1,0622 (výsledek je sice nesmyslný, ale je numericky správný, protože integrujeme numericky); **5)** 0,1317; **6)** 0,4167; **7)** 0,8647

4.10.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	2	a
y	-0,784	4,896	23,936	0

   Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,4x^2 + 1,84x - 1,344$ byl interpolačním polynomem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádku x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnice se středem $S_k = [1,1]$ a poloměrem $r = 2$ a elipsy se středem $S_e = [-2,-1]$, hlavní poloosou (tj. rovnoběžnou s osou x) $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. Za počáteční aproximaci volte bod $[0,-1]$.

3. Je dána počáteční úloha $y' = x - y$, $y(1) = 3$. Eulerovou metodou nejprve s krokem $0,2$ a poté s krokem $0,1$ určete $y(1,4)$.

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(3)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte $P(X < 1)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Sedmkrát za sebou opakujeme náhodný nezávislý pokus. Víme, že pravděpodobnost toho, že úspěch nastane nejvýše šestkrát, je $\frac{2186}{2187}$. Určete pravděpodobnost, že úspěch nastane méně často, než lze očekávat. Výslednou pravděpodobnost vyjádřete desetinným číslem.

6. Je dána funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle \\ ax + b & \text{pro } x \in (0, c) \\ 1 & \text{pro } x \ge c \end{cases}$$

   Určete a, b, c tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X, a poté desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že $X \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{c}{3} \rangle$.

7. Stokrát za sebou náhodně najednou vybereme 4 karty z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Zajímá nás, zda jsme vybrali alespoň jedno eso nebo alespoň jednu desítku. Určete pravděpodobnost, že alespoň jedno eso nebo alespoň jednu desítku vybereme nejméně 65-krát avšak nejvýše 80-krát.

4.10.2 Variantní zadání B

1. Jsou dány tyto body v rovině:

x	-1	1	3	a
y	-0,784	4,896	61,776	0

   Doplňte a (s přesností na 2 desetinná místa) tak, aby polynom $P_3(x) = x^3 + 3,4x^2 + 1,84x - 1,344$ byl interpolačním polynomem pro výše uvedené body. *Hodnoty v řádku x přitom nemusejí být uspořádány vzestupně!*

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnice se středem $S_k = [-1, 1]$ a poloměrem $r = 2$ a elipsy se středem $S_e = [2, -1]$, hlavní poloosou (tj. rovnoběžnou s osou x) $a = 2$ a vedlejší poloosou $b = 3$. Za počáteční aproximaci volte bod $[0, -1]$.

3. Je dána počáteční úloha $y' = x - y$, $y(1) = 4$. Eulerovou metodou nejprve s krokem $0,2$ a poté s krokem $0,1$ určete $y(1,4)$.

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \mathrm{Exp}(3)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte $P(X < 0,8)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Pětkrát za sebou opakujeme náhodný nezávislý pokus. Víme, že pravděpodobnost toho, že úspěch nastane nejvýše čtyřikrát, je $\frac{3124}{3125}$. Určete pravděpodobnost, že úspěch nastane alespoň tak často, jak lze očekávat. Výslednou pravděpodobnost vyjádřete desetinným číslem.

6. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle \\ ax + b & \text{pro } x \in (0, c) \\ 1 & \text{pro } x \geq c \end{cases}$$
   Určete a, b, c tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X, a poté desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že $X \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{c}{2} \rangle$.

7. Stokrát za sebou náhodně najednou vybereme 4 karty z běžného balíčku 32 karet. Po každém výběru karty vrátíme a balíček promícháme. Zajímá nás, zda jsme vybrali alespoň jednu pikovou kartu. Určete pravděpodobnost, že alespoň jednu pikovou kartu vybereme nejméně 60-krát avšak nejvýše 75-krát.

4.11 Zadání

1. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 3)$. Nalezněte první aproximaci koeficientů a, b, c takových, aby platilo
$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k},$$
kde $\vec{k} = (1, 2, 1)$. Přitom za počáteční aproximaci volte $\vec{k}^{(0)} = (0, 0, 0)$. *Nápověda:* Nejprve ze zadané podmínky sestavte soustavu rovnic. Ověřte podmínky konvergence, resp. převeďte do tvaru zaručujícího konvergenci.

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnic $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ a $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Za počáteční aproximaci volte bod $[-1, -2]$.

3. Je dána počáteční úloha $y' = x - y$, $y(1) = 5$. Některou z modifikací Eulerovy metody s krokem $0,2$ určete $y(1{,}4)$. Uveďte, jaké vzorce používáte.

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(2)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte $P(X < 0,8)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Do jisté emailové schránky přijdou průměrně 2 emaily za hodinu. Určete pravděpodobnost, že a) během čtyř hodin nepřijde žádný email; b) během dvou hodin přijdou více než dva emaily; c) uveďte, jaká je střední hodnota veličiny Y, která měří dobu mezi dvěma následnými příchody emailu.

6. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle \\ ax + b & \text{pro } x \in (0, c) \\ 1 & \text{pro } x \geq c \end{cases}$$
Určete a, b, c tak, aby $F(x)$ splňovala všechny podmínky kladené na distribuční funkci spojité náhodné veličiny X, a poté desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že $X \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{c}{2} \rangle$.

7. Doba procesu zvaného mitóza (proces dělení jedné buňky na dvě dceřinné buňky) má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 40$ minut a směrodatnou odchylkou $\sigma = 10$ minut. Určete a) jaká je pravděpodobnost, že buňka se rozdělí pomaleji než za 35 minut; b) interval $(-T + 40; 40 + T)$, během něhož proběhne mitóza u 70% buněk.

Komentář

Příklad 1 se týká hledání řešení soustav lineárních rovnic. Vlastní řešení je relativně krátké a jednoduché (požadován je pouze jeden krok metody, i když po prověření podmínek konvergence). Problematické může být sestavení soustavy – zde je však vyžadována pouze schopnost násobit vektory konstantou a sčítat vektory. Je také nutné znát podmínky konvergence, resp. umět soustavu převést do tvaru zaručujícho konvergenci. To je nutné provést násobením soustavy maticí $\mathbf{A}^T$.

Příklad 2 je téměř standardní úlohou. Jediným požadavkem nad rámec zadání ze sbírky příkladů je převední úlohy do tvaru v učebním textu (vynulování pravé strany).

Příklad 3 požaduje určit 6 hodnot, přičemž každou z nich lze získat prostým dosazením do vzorce.

Příklady 4 a 6 jsou variantami příkladů 4 a 6 ze zadání 4.10.

Příklady 5 a 7 jsou standardními zadáními na *exponenciální*, příp. *Poissonovo*, resp. na *normální rozdělení pravděpodobnosti* z učebního textu, resp. ze sbírky příkladů.

Výsledky

1) např. Jacobiho metodou $\mathbf{x}^{(2)} = (0{,}5714; 0{,}1633; -0{,}1589)$; **2)** např. Newtonovou metodou $\mathbf{x}^{(1)} = (-0{,}8571; -1{,}7857)$; **3)** $y(1{,}4) = 3{,}762$ oběma modifikacemi; **4)** 0,8087; **5)** a) $0,0003$, b) $0,9084$, c) 30 minut; **6)** $\frac{1}{2}$; **7)** a) 0,6915, b) $\langle 29,6; 50{,}4\rangle$

4.11.1 Variantní zadání A

1. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 3)$. Nalezněte první aproximaci koeficientů a, b, c takových, aby platilo
$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k},$$
kde $\vec{k} = (1, 2, 5)$. Přitom za počáteční aproximaci volte $\vec{k}^{(0)} = (0, 0, 0)$. *Nápověda:* Nejprve ze zadané podmínky sestavte soustavu rovnic. Ověřte podmínky konvergence, resp. převeďte do tvaru zaručujícího konvergenci.

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnic $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ a $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Za počáteční aproximaci volte bod $[0, -1]$.

3. Je dána počáteční úloha $y' = x - y$, $y(1) = 4$. Některou z modifikací Eulerovy metodou s krokem $0{,}2$ určete $y(1{,}4)$. Uveďte, jaké vzorce používáte.

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \mathrm{Exp}(3)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte $P(X < 0{,}8)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Do jisté emailové schránky přijdou průměrně 3 emaily za hodinu. Určete pravděpodobnost, že a) během dvou hodin nepřijde žádný email; b) během hodiny přijdou méně než tři emaily; c) uveďte, jaký je rozptyl veličiny Z, která měří dobu mezi dvěma následnými příchody emailu.

6. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle \\ ax + b & \text{pro } x \in (0, c) \\ 1 & \text{pro } x \geq c \end{cases}$$
Určete a, b, c tak, aby $F(x)$ splňovala všechny podmínky kladené na distribuční funkci spojité náhodné veličiny X, a poté desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že $X \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{c}{2}\rangle$.

7. Doba procesu zvaného mitóza (proces dělení jedné buňky na dvě dceřinné buňky) má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 60$ minut a směrodatnou odchylkou $\sigma = 5$ minut. Určete a) jaká je pravděpodobnost, že buňka se rozdělí pomaleji než za 50 minut; b) takové x_0, že u 80% buněk bude dělení trvat déle než x_0 minut od jeho začátku.

4.11.2 Variantní zadání B

1. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 3)$. Nalezněte první aproximaci koeficientů a, b, c takových, aby platilo
$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{k},$$
kde $\vec{k} = (3, 2, 2)$. Přitom za počáteční aproximaci volte $\vec{k}^{(0)} = (0, 0, 0)$. *Nápověda:* Nejprve ze zadané podmínky sestavte soustavu rovnic. Ověřte podmínky konvergence, resp. převeďte do tvaru zaručujícího konvergenci.

2. Proveďte jeden krok numerické metody vedoucí k úspěšnému nalezení průsečíku kružnic $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ a $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Za počáteční aproximaci volte bod $[-1, 0]$.

3. Je dána počáteční úloha $y' = x - y$, $y(1) = 3$. Některou z modifikací Eulerovy metody s krokem $0,2$ určete $y(1{,}4)$. Uveďte, jaké vzorce používáte.

4. Je dána náhodná veličina $X \sim \text{Exp}(3)$. Složenou lichoběžníkovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte $P(X < 1)$. *Hodnocen bude pouze numericky získaný výsledek. Výsledek získaný jiným způsobem může sloužit nanejvýš pro vaši potřebu jako jistá „kontrola“ správnosti výpočtu.*

5. Do jisté emailové schránky přijdou průměrně 4 emaily za hodinu. Určete pravděpodobnost, že a) během dvou hodin nepřijde žádný email; b) během čtyř hodin přijdou více než tři emaily; c) uveďte, jaká je střední hodnota veličiny Z, která měří dobu mezi dvěma následnými příchody emailu.

6. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, 0\rangle \\ ax + b & \text{pro } x \in (0, c) \\ 1 & \text{pro } x \geq c \end{cases}$$
Určete a, b, c tak, aby $F(x)$ byla splňovala všechny podmínky kladené na distribuční funkci spojité náhodné veličiny X, a poté desetinným číslem vyjádřete pravděpodobnost, že $X \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{c}{3} \rangle$.

7. Doba procesu zvaného mitóza (proces dělení jedné buňky na dvě dceřinné buňky) má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 70$ minut a směrodatnou odchylkou $\sigma = 10$ minut. Určete a) jaká je pravděpodobnost, že buňka se rozdělí pomaleji než za 55 minut; b) interval $(-T + 70; 70 + T)$, během něhož proběhne mitóza proběhne mitóza u 80% buněk.

4.12 Zadání

1. Newtonovou metodou s přesností na tři des. místa vyřešte rovnici $2x-4-\sin x=0$.

2. Metodou nejmenších čtverců aproximujte pomocí **paraboly** funkci zadanou tabulkou bodů:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1,2	1,4	-2	-1	1

3. Složenou Simpsonovou metodou pro $m=4$ vypočtěte

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sin x}dx.$$

4. Je dána diferenciální rovnice $y'=x(y-1)$ s počáteční podmínkou $y(1)=2$. Eulerovou metodou s krokem $h=0,2$ nalezněte řešení na intervalu $\langle 1;2\rangle$.

5. Příklad z historie: Vytáčení telefonického připojení k internetu je maximálně pětkrát opakováno (tj. po úspěšném připojení, respektive po pěti neúspěšných vytáčeních se v pokusu o spojení nepokračuje). Jednotlivá vytáčení jsou navzájem nezávislá. Pravděpodobnost správného připojení je při každém vytáčení rovna 0,9. Veličina X udává počet vytáčení při daném pokusu o spojení.

   a) určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$ veličiny X; (6 bodů)

   b) určete střední hodnotu (2 body) a rozptyl (2 body) veličiny X.

6. Životnost zařízení lze popsat exponenciálním rozdělením. Průměrná doba životnosti je 100 hodin.

   a) Určete pst, že k selhání zařízení dojde v časovém intervalu $\langle 50 \text{ hod}; 90 \text{ hod}\rangle$ po jeho uvedení do provozu. (5 bodů)

   b) Určete časový okamžik t_0, aby pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v intervalu $\langle 0 \text{ hod}; t_0 \text{ hod}\rangle$ po svém uvedení do provozu, byla rovna 0,8. (5 bodů)

7. Výrobce klikových hřídelí zajímá, jaké je opotřebení hřídelí po sto tisících kilometrů provozu motoru při nové technologii výroby. Opotřebení hřídele při starší technologii výroby mělo normální rozdělení N($\mu=3,\sigma=0{,}9$). U patnácti hřídelí vyrobených novou technologií je průměr opotřebení $\overline{x}=2{,}78$ jednotek, dále předpokládáme, že odchylka opotřebení každé vyrobené hřídele je stále stejná: $\sigma=0{,}9$ jednotek. Na hladině významnosti $\alpha=0{,}20$ ověřte oboustranným testem, zda střední hodnota průměru opotřebení je statisticky významně nižší (volte $H_0: \quad \mu=3$, $H_1: \quad \mu\neq 3$).

Komentář

Toto zadání je ukázkou zadání, které obsahuje pouze standardní příklady z učebního textu, příp. sbírek příkladů. Každá úloha je vždy jasně zformulována – u příkladů z numerických metod je dána standardní formulace z učebního textu, je zadána metoda, krok, případně další relevantní údaje. Analogicky u příkladů z pravděpodobnosti jsou jasně popsány všechny požadavky. Postup řešení je pouhou mechanickou aplikací příslušných vzorců.

U příkladu 7 mluvíme u normálního rozdělení o *směrodatné odchylce*, nikoli o *rozptylu*!

Výsledky

1) 2,354; **2)** $y = -1,0229 - 0,28x + 0,57143x^2$; **3)** 0,7067; **4)** $y(1{,}2) = 2{,}2$, $y(1{,}4) = 2{,}488$, $y(1{,}6) = 2{,}9046$, $y(1{,}8) = 3{,}5141$, $y(2) = 4{,}4192$; **5)** $p(k) = 0{,}1^{k-1}(0{,}9)$ pro $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p(5) = 0{,}1^4$, $p(k) = 0$ jinak, $\mathrm{E}X = 1{,}1111$, $\mathrm{D}X = 0{,}1234$; **6)** a) 0,1999, b) $t_0 = 160{,}94$; **7)** není

4.12.1 Variantní zadání A

1. Newtonovou metodou s přesností na tři des. místa vyřešte rovnici $2x+2-\mathrm{arctg}x = 0$.
2. Metodou nejmenších čtverců aproximujte pomocí **paraboly** funkci zadanou tabulkou bodů:

x_i	-3	-1	0	1	3
y_i	1	0	-0,4	2	3,8

3. Složenou Simpsonovou metodou pro $m = 4$ vypočtěte
$$\int_0^1 \frac{1}{1+\cos x} dx.$$
4. Je dána diferenciální rovnice $y' = x(y-3)$ s počáteční podmínkou $y(2) = 1$. Eulerovou metodou s krokem $h = 0,2$ nalezněte řešení na intervalu $\langle 2; 3\rangle$.
5. Příklad z historie: Vytáčení telefonického připojení k internetu je maximálně šestkrát opakováno (tj. po úspěšném připojení, respektive po šesti neúspěšných vytáčeních se v pokusu o spojení nepokračuje). Jednotlivá vytáčení jsou navzájem nezávislá. Pravděpodobnost správného připojení při každém vytáčení je rovna 0,6. Veličina X udává počet vytáčení při daném pokusu o spojení.
   a) určete pravděpodobnostní funkci $p(x)$ veličiny X; (6 bodů)
   b) určete střední hodnotu (2 body) a rozptyl (2 body) veličiny X.
6. Životnost zařízení lze popsat exponenciálním rozdělením. Průměrná doba životnosti je 90 hodin.
   a) Určete pst, že k selhání zařízení dojde v časovém intervalu $\langle 30$ hod; 80 hod$\rangle$ po jeho uvedení do provozu. (5 bodů)
   b) Určete časový okamžik t_0, aby pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v intervalu $\langle 0$ hod; t_0 hod$\rangle$ po svém uvedení do provozu, byla rovna 0,6. (5 bodů)
7. Výrobce klikových hřídelí zajímá, jaké je opotřebení hřídelí po sto tisících kilometrů provozu motoru při nové technologii výroby. Opotřebení hřídele při starší technologii výroby mělo normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu = 3, \sigma = 0{,}9)$. U patnácti hřídelí vyrobených novou technologií je průměr opotřebení $\overline{x} = 2{,}78$ jednotek, dále předpokládáme, že odchylka opotřebení každé vyrobené hřídele je stále stejná: $\sigma = 0{,}9$ jednotek. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}15$ ověřte oboustranným testem, zda střední hodnota průměru opotřebení je statisticky významně nižší (volte $H_0: \ \mu = 3$, $H_1: \ \mu \neq 3$).

4.13 Zadání

1. Najděte uzavřený interval, na kterém existuje nějaké řešení rovnice (stačí jedno řešení)

$$\ln(x-1) + x^2 = 1.$$

a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!!*

2. Zjistěte, zda-li se jedná o kvadratický splajn:

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ 2x^2 + 2x + 1, & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 4x^2 + 1, & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

3. Metodou Runge–Kutta 4. řádu řešte počáteční úlohu

$$y' - y = e^x, \;\; y(1) = 2$$

na intervalu $\langle 1, 1.4 \rangle$ s krokem $h = 0.2$.

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při druhém hodu padla pětka. Pravděpodobnost, že pětka padne při čtvrtém hodu je $\frac{1}{36}$.
   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že při prvním a zároveň třetím hodu padne pětka nebo šestka je $\frac{1}{9}$.
   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že jednička padne právě dvakrát je $\frac{1}{36}$.
   d) Máme 5 pravých a 3 falešné bankovek. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou bankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$. Expert má v ruce jednu bankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za falešnou, je $\frac{3}{10}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 3, 7, 16, 22, 38, 345, 528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.

   (a) Náhodná veličina X udává počet šestnáctek mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu veličiny X.
   (b) Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje alespoň jedno prvočíslo.

6. Najděte konstantu a tak, aby funkce
$$f(x) = \begin{cases} a(3x-6) & x \in \langle 0,3 \rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$
byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, její střední hodnotu a rozptyl.

7. Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 9,5 kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,03$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

Komentář

Na rozdíl od zadání 4.12 obsahuje toto zadání i příklady, které je možné považovat za „teoretičtější“. V příkladu 2 je nutné provést ověření vlastností splajnu (avšak jedná se pouze o kvadratický splajn, tj. ověřování není mnoho) a v příkladu 6 ověření vlastností *funkce hustoty* spojité náhodné veličiny.

Příklad 1 nepředepisuje žádnou metodu ani způsob separace kořenů. Naopak vyžaduje, aby nalezený výsledek měl požadovanou přesnost. Velmi proto záleží na zvolené strategii řešení. Převedením některých členů v rovnici na úplný čtverec je např. možné získat relativně velmi krátký interval, na kterém leží řešení. Tento interval je možné efektivně zkracovat např. metodou půlení intervalů. (Toto platí pro některá z variantních zadaní, v některých ani tato úprava není nutná a interval je možno určit okamžitě.)

V příkladu 3 je nejprve nutné úlohu převést do tvaru, s jakým pracujeme v učebním textu. I tak se ovšem jedná o zadání, které se skládá zejména ze standardních jasně formulovaných úloh.

Jistou výjimku ze standardních sbírkových úloh tvoří příklad 5. Předpokladem pro nalezení správného řešení je zde orientace v myšlence *rozdělení pravděpodobnosti*. Pokud student ví, jak jsou definována nejčastěji využívána rozdělení pravděpodobnosti, pak zjistí, že výpočet první odrážky je prostou aplikací jednoho z triviálních vzorců. Podobný příklad je obsažen v zadání 4.7, avšak podobnost je pouze v první odrážce. Zatímco druhou odrážku v zadání 4.7 je vhodné řešit pomocí aproximace binomického rozdělení normálním, v tomto zadání je vhodné využít základních vlastností pravděpodobnosti.

Výsledky

1) 1,39; **2)** ne; **3)** $y(1{,}2) = 3{,}1068$, $y(1{,}4) = 4{,}6057$; **4)** a) $\frac{1}{6}$, b) ano, c) 0,134, d) $\frac{17}{40}$; **5)** a) 50, b) $\doteq 1$ (ale je nutné provést výpočet, ne jen dovodit, že je „zřejmé“); **6)** nelze; **7)** hypotézu přijímáme

4.13.1 Variantní zadání A

1. Najděte uzavřený interval, na kterém leží menší z kořenů rovnice

$$\ln(x-1) - x^2 + 4x = 3.$$

a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!*

2. Zjistěte, zda-li se jedná o kvadratický splajn:

$$s(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 2, & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ 4x^2 + 3x + 2, & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 5x^2 + 2x + 2, & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$$

3. Metodou Runge–Kutta 4. řádu řešte počáteční úlohu

$$y' - 3y = -e^{x-y}, \; y(2) = 3$$

na intervalu $\langle 2, 2.4 \rangle$ s krokem $h = 0.2$.

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padlo prvočíslo. Pravděpodobnost, že to byla jednička je $\frac{1}{6}$.

   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne jenom při prvním hodu je $\frac{1}{36}$.

   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne právě pětkrát je 1.

   d) Máme 7 pravých a 3 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{6}{7}$. Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji prohlásí za pravou, je $\frac{3}{5}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 5, 13, 17, 51, 126, 344, 525, 680\}$. Generátor vygeneruje 450 čísel.
   - Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu veličiny X.
   - Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje alespoň jedno číslo dělitelné pěti beze zbytku.

6. Najděte konstantu a tak, aby funkce
$$f(x) = \begin{cases} a(5x-9) & x \in \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$
byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, střední hodnotu a rozptyl.

7. Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 50 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 9 kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,06$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

4.13.2 Variantní zadání B

1. Najděte uzavřený interval, na kterém existuje nějaké řešení rovnice (stačí jedno řešení)
$$\ln(x+1) + x^2 + 4x = -3.$$
a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!*

2. Zjistěte, zda-li se jedná o kvadratický splajn:
$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{pro } x \in \langle -2, -1 \rangle, \\ x^2 - 1, & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ 2x^2 + 3x - 1, & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

3. Metodou Runge–Kutta 4. řádu řešte počáteční úlohu
$$\frac{y'}{x} = e^{2x-y}, \; y(1) = 1$$
na intervalu $\langle 1, 1.4 \rangle$ s krokem $h = 0.2$.

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padlo prvočíslo. Pravděpodobnost, že to byla dvojka je 0.

   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že při prvním hodu padne čtyřka je $\frac{1}{6}$.

   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne právě třikrát je $\frac{1}{6^3}$.

   d) Máme 4 pravé a 3 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{5}{7}$. Expert označil eurobankovku za falešnou. Pravděpodobnost, že uvedená eurobankovka je opravdu falešná je $\frac{3}{7}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 11, 13, 19, 51, 125, 342, 524, 681\}$. Generátor vygeneruje 450 čísel.

   - Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu veličiny X.
   - Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje aspoň jedno číslo dělitelné třemi beze zbytku.

6. Najděte konstantu a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} a(13x - 14) & x \in \langle 0, 4\rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$

   byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, střední hodnotu a rozptyl.

7. Je známo, že hmotnost půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7,5kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 50 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 8,5 kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,02$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

4.13.3 Variantní zadání C

1. Najděte uzavřený interval, ve kterém leží menší z kořenů rovnice

$$\ln(x + 1) - x^2 = -1.$$

a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!*

2. Zjistěte, zda-li se jedná o kvadratický splajn:

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{pro } x \in \langle -2, -1 \rangle, \\ 2x^2 + 3x + 1, & \text{pro } x \in \langle -1, 0 \rangle, \\ x^2 + 3x + 1, & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle. \end{cases}$$

3. Metodou Runge–Kutta 4. řádu řešte počáteční úlohu

$$\frac{y'}{x} = e^{3x-y}, y(2) = 2$$

na intervalu $\langle 2, 2.4 \rangle$ s krokem $h = 0.2$.

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu padlo sudé číslo. Pravděpodobnost, že to byla dvojka je $\frac{1}{6}$
   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že při posledním hodu padne šestka je $\frac{1}{6}$.
   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne alespoň třikrát je $\frac{1}{6^3}$.
   d) Máme 6 pravých a 3 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{7}{9}$. Expert označil eurobankovku za pravou. Pravděpodobnost, že uvedená eurobankovka je opravdu pravá je $\frac{14}{27}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 7, 11, 19, 23, 51, 126, 342, 524, 684\}$. Generátor vygeneruje 500 čísel.

   - Náhodná veličina X udává počet jedniček mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu veličiny X.
   - Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje aspoň jedno číslo dělitelné čtyřmi beze zbytku.

6. Najděte konstantu a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} a(3x - 7) & x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

   byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, střední hodnotu a rozptyl.

7. Je známo, že délku půlročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 72cm$ a rozptylem $\sigma^2 = 4$. Náhodně vybranému vzorku 150 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná délka dětí z uvedeného vzorku byla v půlroce věku 74 cm. Na hladině významnosti $\alpha = 0,08$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na délku dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

4.14 Zadání

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 5y - 8z &= -6,5 \\ 10x + 4y - 5z &= 1.5 \\ x + 12y - 10z &= -2,5 \end{aligned}$$

   Dále je dáno $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Proveďte dva kroky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovy metody *vedoucí k nalezení řešení* této soustavy. *Jasně vyznačte, kterou metodu používáte. Řešení bez uvedení metody bude hodnoceno nejvýše 5 body.*

2. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + 2y^3 - x + y + 1 &= 0 \\ x^3 + 4y^2 + x - y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

   Dále je dáno $x^{(0)} = (1, -1)$. Proveďte jeden krok Newtonovy metody.

3. Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{x}{7} \mathrm{d}x$$

   a) přesně, tj. analyticky,

   b) s přesností 0,0001 Simpsonovou metodou.

4. V uzlových bodech x_i jsme získali následující hodnoty y_i:

x_i	1	2	3	4
y_i	1	2	4	8

   Najděte **buď** nejvhodnější křivku $y = k \cdot a^x$ **nebo** nejvhodnější parabolu, kterou lze vystihnout závislost y na x. *Obě možnosti jsou pro účely zkoušky chápány jako rovnocenné, zvolte si právě jednu. Ať si vyberete kteroukoliv možnost, za svůj výběr nebudete ze strany vyučujících nijak penalizováni. Maximální bodové hodnocení za tento příklad je 10 bodů, a to i v případě, že si vyberete obě možnosti současně.*

5. Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0,3 & \text{pro } x \in (0, 1) \\ 0,2 & \text{pro } x \in (2, 3) \\ mx & \text{pro } x \in (4, 5) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

   a) Určete konstantu m tak, aby funkce f byla hustotou pravděpodobnosti nějaké spojité náhodné veličiny.

   b) Udejte příklad intervalu, na němž je distribuční funkce této náhodné veličiny konstantní avšak nenulová.

c) Udejte příklad intervalu, na němž distribuční funkce této náhodné veličiny není konstantní a má právě jedno minimum, a to v jiném než krajním bodě. Odpověď zdůvodněte.

6. Házeme běžnou šestistěnnou kostkou, dokud nepadne *šestka* nebo *číslo dělitelné třemi*, nejvýše však pětkrát. Náhodná veličina X udává počet provedených hodů.

   a) Určete její pravděpodobnostní funkci.

   b) Určete její distribuční funkci.

   c) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet právě čtyřikrát,

   d) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet alespoň čtyřikrát.

7. V technických specifikacích nového televizoru je uveden následující údaj: *Životnost: 100.000 hodin.* Označme X dobu životnosti tohoto typu televizoru a předpokládejme, že $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

   a) Určete pravděpodobnost, že takový televizor bude fungovat právě 0 nebo právě 1 nebo právě 2 nebo ... nebo právě 100.000 hodin.

   b) Jaký je *rozptyl* životnosti tohoto typu televizoru, víme-li, že údaj 100.000 hodin značí střední dobu životnosti a $P(X > 99000) = 0,99$?

Komentář

Podobně jako zadání 4.12 obsahuje i toto zadání zejména příklady, které je možno považovat za standardní a jasně formulované a za varianty příkladů ze sbírek příkladů, resp. z učebního textu.

Požadavek na přesnost v příkladu 3 sice vypadá poněkud hrozivě, nicméně zadaná funkce je na tomto intervalu „téměř úsečkou“, takže požadované přesnosti lze dosáhnout v podstatě okamžitě.

V příkladu 4 lze postupovat oběma navženými způsoby. Při volbě aproximace parabolou vyvstává nutnost řešit soustavu 3 rovnic o 3 neznámých. Při volbě aproximace pomocí křivky $y = k \cdot a^x$ postačí řešit soustavu 2 rovnic o 2 neznámých. Ani jedno však nemusí být nutné, pokud si uvědomíme, že všechny body leží na křivce $y = 2^{x-1}$.

Odpověď na odrážku a) u příkladu 7 je možné psát okamžitě. Vzhledem k vlastnostem funkce hustoty spojité náhodné veličiny není žádný výpočet nutný.

Výsledky

1) např. Jaocbiho metodou $\mathbf{x}^{(0)} = (0{,}6396; 0{,}4562; 0{,}7010)$; **2)** $\mathbf{x}^{(1)} = (1{,}0727; -0{,}7455)$; **3)** 0,04401 (analyticky i např. jednoduchou Simpsonovou metodou); **4)** $y = \frac{1}{2}2^x$ nebo $y = 1{,}75 - 1{,}45x + 0{,}75x^2$; **5)** a) $m = \frac{1}{9}$, c) nelze; **6)** a) $p(k) = (\frac{2}{3})^{k-1}(\frac{1}{3})$ pro $k \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$p(5) = (\frac{2}{3})^4$, $p(0) = 0$ jinak, b) funkce na intervalech mezi zadanými hodnotami X konstantní, příslušné součty podle vzorce $F(x) = P(X \leq x)$, c) 0,0988, d) 0,2963; **7)** a) 0, b) 184199, resp. 182628 (podle toho, kterou hraniční hodnotu odečteme z tabulky; tabulky pracují s kvantily na 2 desetinná místa)

4.14.1 Variantní zadání A

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 5y - 10z &= -9,5 \\ 10x + 2y - 5z &= 0,5 \\ x + 12y - 10z &= -2,5 \end{aligned}$$

Dále je dáno $x^{(0)} = (0,0,0)$. Proveďte dva kroky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovy metody *vedoucí k nalezení řešení* této soustavy. *Jasně vyznačte, kterou metodu používáte. Řešení bez uvedení metody bude hodnoceno nejvýše 5 body.*

2. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^3 + 4y^2 + x - y - 4 &= 0 \\ x^4 + 2y^3 - x + y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Dále je dáno $x^{(0)} = (-1,1)$. Proveďte jeden krok Newtonovy metody.

3. Vypočtěte

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{x}{9}\mathrm{d}x$$

a) přesně, tj. analyticky,

b) s přesností 0,0001 Simpsonovou metodou.

4. V uzlových bodech x_i jsme získali následující hodnoty y_i:

x_i	1	2	3	4
y_i	4	8	16	32

Najděte **buď** nejvhodnější křivku $y = k \cdot a^x$ **nebo** nejvhodnější parabolu, kterou lze vystihnout závislost y na x. *Obě možnosti jsou pro účely zkoušky chápány jako rovnocenné, zvolte si právě jednu. Ať si vyberete kteroukoliv možnost, za svůj výběr nebudete ze strany vyučujících nijak penalizováni. Maximální bodové hodnocení za tento příklad je 10 bodů, a to i v případě, že si vyberete obě možnosti současně.*

5. Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{pro } x \in (0,1) \\ 0,4 & \text{pro } x \in (2,3) \\ kx & \text{pro } x \in (4,5) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a) Určete konstantu k tak, aby funkce f byla hustotou pravděpodobnosti nějaké spojité náhodné veličiny.

b) Udejte příklad intervalu, na němž je distribuční funkce této náhodné veličiny konstantní avšak nenulová.

c) Udejte příklad intervalu, na němž distribuční funkce této náhodné veličiny není konstantní a má právě jedno minimum, a to v jiném než krajním bodě. Odpověď zdůvodněte.

6. Házeme běžnou šestistěnnou kostkou, dokud nepadne *pětka* nebo *liché prvočíslo*, nejvýše však pětkrát. Náhodná veličina X udává počet provedených hodů.

   a) Určete její pravděpodobnostní funkci.

   b) Určete její distribuční funkci.

   c) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet právě čtyřikrát,

   d) Vypočtěte pravděpodobnost, že budeme muset házet alespoň čtyřikrát.

7. V technických specifikacích nového televizoru je uveden následující údaj: *Životnost: 110.000 hodin.* Označme X dobu životnosti tohoto typu televizoru a předpokládejme, že $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

   a) Určete pravděpodobnost, že takový televizor bude fungovat právě 100.000 nebo právě 100.001 nebo právě 100.002 nebo . . . nebo právě 110.000 hodin.

   b) Jaký je *rozptyl* životnosti tohoto typu televizoru, víme-li, že údaj 110.000 hodin značí střední dobu životnosti a $P(X > 109000) = 0,99$?

4.15 Zadání

1. Najděte uzavřený interval, na kterém leží menší z kořenů rovnice

$$\ln(x-2) - x^2 + 6x = 8.$$

   a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!*

2. Je dána následující tabulka uzlů x_i a hodnot y_i v nich:

x_i	2	3	5	7	11
y_i	2	4	8	16	32

   Proložte jimi interpolační polynom v Newtonově tvaru.
   Polynom nemusíte *převádět do tvaru* $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

3. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + 5y - 10z &= -9,5 \\ 10x + 2y - 5z &= 0,5 \\ x + 12y - 10z &= -2,5 \end{aligned}$$

   Dále je dáno $x^{(0)} = (0,0,0)$. Proveďte dva kroky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovy metody *vedoucí k nalezení řešení* této soustavy. *Jasně vyznačte, kterou metodu používáte. Řešení bez uvedení metody bude hodnoceno nejvýše 5 body.*

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu nepadlo prvočíslo. Pravděpodobnost, že to byla jednička, je $\frac{1}{6}$.

   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne alespoň jednou, je $\frac{1}{36}$.

   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že trojka padne právě při pátém hodu, je 1.

   d) Máme 7 pravých a 3 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{6}{7}$. Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji neprohlásí za pravou, je $\frac{3}{5}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1, 5, 23, 37, 51, 126, 344, 525, 680\}$. Generátor vygeneruje 450 čísel.
   (a) Náhodná veličina X udává počet 23 mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu veličiny X.
   (b) Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje nejvýše jedno číslo dělitelné pěti beze zbytku.
6. Najděte konstantu a tak, aby funkce
$$f(x) = \begin{cases} a(7-4x) & x \in \langle 0, 4 \rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$
   byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, střední hodnotu a rozptyl.
7. V technických specifikacích nového televizoru je uveden následující údaj: *Životnost: 110.000 hodin*. Označme X dobu životnosti tohoto typu televizoru a předpokládejme, že $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
   a) Doplňte tečky v závorce tak, aby v zadání: „Vypočtěte $P(X \dots)$“ byl požadovaný výsledek **přesně nula**.
   b) Doplňte tečky v závorce tak, aby v zadání: „Vypočtěte $P(X \dots)$“ byl požadovaný výsledek **menší než** $0,001$ **avšak různý od nuly**.
   c) Jaký je *rozptyl* životnosti tohoto typu televizoru, víme-li, že údaj 110.000 hodin značí střední dobu životnosti a $P(X > 109000) = 0,99$?

Komentář

Příklady v tomto zadání je možné nalézt v různých předcházejících zadáních. Vesměs se jedná o standardní zadání ze sbírkek příkladů, resp. z učebního textu.

Komentář k příkladům 1 a 5 viz zadání 4.13; odrážku a) příkladu 7 srovnej s příkladem 7 ze zadání 4.14. Odrážka b) u příkladu 7 je motivována vlastnostmi funkce hustoty standardizovaného normálního rozdělení. Pokud si tuto souvislost uvědomíme, odpověď je zřejmá.

U příkladu 3 je možné jak záměna pořadí rovnic, tak i násobení maticí $\mathbf{A}^T$ – jednodušší je pochopitelně záměna pořadí rovnic.

Výsledky

1) 2,48; **2)** $P_4(x) = 2+2(x-2)+0{,}1(x-2)(x-3)(x-5)-0{,}01806(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)$; **3)** $\mathbf{x}^{(2)} = (-8{,}6860; 2{,}7674; -0{,}4328)$; **4)** a) $\frac{1}{3}$, b) $0,5981$, c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{5}{14}$; **5)** a) 50, b) $\doteq 0$ (ale je nutné provést výpočet, ne jen dovodit, že je „zřejmé“); **6)** nelze; **7)** c) 184199, resp. 182628 (podle toho, kterou hraniční hodnotu odečteme z tabulky; tabulky pracují s kvantily na 2 desetinná místa)

4.15.1 Variantní zadání A

1. Najděte uzavřený interval, na kterém existuje nějaké řešení rovnice (stačí jedno řešení)
$$\ln(x-2)+x^2=4.$$
a určete toto řešení s přesností na dvě desetinná místa jakoukoli metodou. *Jestliže použijete Newtonovu metodu nebo metodu prosté iterace, najděte interval obsahující řešení, pro který je splněna podmínka konvergence – ověřte ji!!*

2. Je dána následující tabulka uzlů x_i a hodnot y_i v nich:

x_i	1	3	5	7	11
y_i	2	5	8	16	32

Proložte jimi interpolační polynom v Newtonově tvaru.
Polynom nemusíte *převádět do tvaru* $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.

3. Je dána soustava rovnic
$$\begin{aligned} 2x+5y-8z &= -6,5\\ 10x+4y-5z &= 1.5\\ x+12y-10z &= -2,5 \end{aligned}$$
Dále je dáno $x^{(0)}=(0,0,0)$. Proveďte dva kroky Jacobiho nebo Gauss-Seidelovy metody *vedoucí k nalezení řešení* této soustavy. *Jasně vyznačte, kterou metodu používáte. Řešení bez uvedení metody bude hodnoceno nejvýše 5 body.*

4. Máme následující tvrzení:

   a) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Víme, že při prvním hodu nepadla šestka. Pravděpodobnost, že šestka nepadne při třetím hodu, je $\frac{1}{36}$.
   b) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne právě při prvním a třetím hodu, je $\frac{1}{36}$.
   c) Pětkrát házíme klasickou hrací kostkou. Pravděpodobnost, že šestka padne nejméně dvakrát, je $\frac{1}{36}$.
   d) Máme 5 pravých a 2 falešné eurobankovky. Expert dokáže na první pohled rozeznat pravou eurobankovku od falešné s pravděpodobností $\frac{4}{5}$. Expert má v ruce jednu eurobankovku. Pravděpodobnost, že ji neprohlásí za falešnou, je $\frac{8}{35}$.

   U každého z nich rozhodněte, zda je pravdivé nebo ne. Pokud není, opravte příslušnou hodnotu pravděpodobnosti.

5. Generátor náhodných čísel generuje čísla z množiny $\{1,3,17,26,32,38,345,528\}$. Generátor vygeneruje 400 čísel.

   - Náhodná veličina X udává počet 17 mezi vygenerovanými čísly. Určete střední hodnotu veličiny X.

- Určete pravděpodobnost, že generátor vygeneruje nejvýše jedno prvočíslo.

6. Najděte konstantu a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} a(2x-5) & x \in \langle 0, 3 \rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$

byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny, její střední hodnotu a rozptyl.

7. V technických specifikacích nového televizoru je uveden následující údaj: *Životnost: 100.000 hodin*. Označme X dobu životnosti tohoto typu televizoru a předpokládejme, že $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

   a) Doplňte tečky v závorce tak, aby v zadání: „Vypočtěte $P(X \ldots)$“ byl požadovaný výsledek **přesně nula**.

   b) Doplňte tečky v závorce tak, aby v zadání: „Vypočtěte $P(X \ldots)$“ byl požadovaný výsledek **větší než** $0,999$.

   c) Jaký je *rozptyl* životnosti tohoto typu televizoru, víme-li, že údaj 100.000 hodin značí střední dobu životnosti a $P(X > 99000) = 0,99$?

4.16 Zadání

1. Náhodně vybíráme dvě reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Označíme je tak, aby platilo $x \geq y$. Jaká je pravděpodobnost, že jsou zároveň splněny následující podmínky: $x - y > \frac{1}{2}$ a $x + y < 1$? *Výpočet, který nebude podložen správným náčrtkem, bude hodnocen 0 body.*

2. Najděte konstantu a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1\rangle \\ x - 1 & x \in (1, a\rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$

byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny a porovnejte hodnoty $P(X \in (-EX, EX))$ a $P(X \in \langle -EX, EX\rangle)$.

3. O diskrétní náhodné veličině X popisující počet pozdních příchodů studenta AB na cvičení z INM známe následující údaje:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	0,01	0,2	?	0,04	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,03	0,1	0,01	0,05

V semestru, který nás zajímá, proběhlo 12 cvičení. Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

4. Je známo, že porodní váhu novorozenců lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 3500g$ a rozptylem $\sigma^2 = 250$. Náhodně vybranému vzorku 30 matek, z nichž každá poté porodila právě jedno dítě, byl v těhotenství podáván nový vitaminový přípravek. Porodní váha novorozenců těchto matek činila v průměru 3900g. Na hladině významnosti $\alpha = 0,04$ testujte hypotézu, že nový vitaminový přípravek má vliv na porodní váhu novorozenců. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že porodní váhu mohlo ovlivnit pouze podávání vitaminového přípravku. Proveďte oboustranný test.*

5. Libovolnou numerickou metodou, která je uvedena ve skriptech (kromě metody sečen), najděte s přesností $\epsilon = 0,01$ řešení rovnice

$$f(x) = e^{x-1} - (x + 1)^2 + 2.$$

Má-li rovnice řešení více, stačí najít jen jedno z nich. *Pokud si vyberete metodu, při níž je nutno ověřit podmínky konvergence, a tyto podmínky* beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud nebude volba počáteční aproximace podložena správným náčrtkem, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Proveďte jeden krok Newtonovy metody vedoucí k nalezení jednoho z řešení soustavy rovnic

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Řešení vycházející z volby počáteční aproximace, která nebude podložena správným náčrtkem, bude vyhodnoceno jako zcela chybné.

7. Některou z numerických metod vypočtěte $\int_{-0,5}^{0,7} 3\cos 2x \mathrm{d}x$. Uveďte, jakou metodu používáte. *Výsledek, který se bude od skutečné hodnoty integrálu lišit o více než 20%, bude vyhodnocen jako chybný. Pokud neuvedete, jakou metodou příklad řešíte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

Komentář

Příklad 1 je zadáním na geometrickou pravděpodobnost. Požadavek na náčrtek má za cíl usnadnit postup řešení – nejedná se tedy o komplikaci a „práci navíc". Správný výsledek vyplývá z náčrtku téměř okamžitě.

Příklad 2 je standardním ověřováním vlastností jedné ze základních funkcí teorie pravděpodobnosti. Požadavek na porovnání hodnot je – vzhledem k tomu, že se jedná o spojitou náhodnou veličinu – triviální. Hledání distribuční funkce z daného funkčního předpisu funkce hustoty patří ke standardním zadáním uváděným jak v učebním textu tak ve sbírce příkladů.

Příklad 3 je elementárním výpočtem dle známého vzorce – za předpokladu, že je student schopen z vlastností pravděpodobnostní funkce určit chybějící hodnotu.

Příklady 4 a 6 jsou standardními zadáními z učebního textu, resp. sbírek příkladů. U příkladu 6 je nutné nejprve úlohu převést do tvaru, který koresponduje s formulací úlohy uváděnou v učebním textu. Požadujeme provedení jednoho kroku, tedy výpočet není nijak časově náročný.

V příkladu 5 dáváme na výběr jak metodu, tak příslušné řešení (rovnice má dvě řešení). Separaci kořenů lze provést nejlépe náčrtkem – i když bude proveden „od ruky", získaný interval bude dostatečně krátký. Případně lze využít jednoduché úvahy vycházející z vlastností průběhu funkce $y = \mathrm{e}^x$ a paraboly.

U příkladu 7 lze přesný výsledek získat velmi rychle (předpokladem je zvládnutí látky 1. semestru). Je tak k dispozici kontrola přesnosti numerického výpočtu. Ta však ani není nutná, protože z vlastnosti grafu funkce $\cos x$ vyplývá, že vhodné bude použití Simpsonovy metody. Graf je na zadaném intervalu „téměř parabolou". Splnit požadavek zadání tedy není obtížné – je uveden víceméně jen proto, aby vylučoval použití jednoduché lichoběžníkové metody, tedy nejjednodušší metody, která byla v předmětu probírána.

Výsledky

1) $\frac{1}{16}$; **2)** $a = 2$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & x \in \langle 1, 2) \\ 1 & x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

3) 3,7; **4)** hypotézu přijímáme; **5)** rovnice má tři řešení, a sice $x_0 \doteq -2{,}43$, $x_1 \doteq 0{,}64$, $x_3 \doteq 4{,}23$; **6)** závisí na zvolené počáteční aproximaci; **7)** 2,74038

4.16.1 Variantní zadání A

1. Náhodně vybíráme dvě reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Označíme je tak, aby platilo $x \geq y$. Jaká je pravděpodobnost, že jsou zároveň splněny následující podmínky: $x - y > \frac{1}{2}$ a $x + y < 1$? *Výpočet, který nebude podložen správným náčrtkem, bude hodnocen 0 body.*

2. Najděte konstantu a tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1\rangle \\ a - x & x \in (1, a\rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$

byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny a porovnejte hodnoty $P(X \in (-EX, EX))$ a $P(X \in \langle -EX, EX\rangle)$.

3. O diskrétní náhodné veličině X popisující počet pozdních příchodů studenta AB na cvičení z INM známe následující údaje:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	0,01	0,2	0,15	0,04	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,03	?	0,01	0,05

V semestru, který nás zajímá, proběhlo 12 cvičení. Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

4. Je známo, že porodní délku novorozenců lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 51cm$ a rozptylem $\sigma^2 = 2$. Náhodně vybranému vzorku 30 matek, z nichž každá poté porodila právě jedno dítě, byl v těhotenství podáván nový vitaminový přípravek. Porodní délka novorozenců těchto matek činila v průměru 55cm. Na hladině významnosti $\alpha = 0,04$ testujte hypotézu, že nový vitaminový přípravek má vliv na porodní délku novorozenců. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že porodní délku mohlo ovlivnit pouze podávání vitaminového přípravku. Proveďte oboustranný test.*

5. Libovolnou numerickou metodou, která je uvedena ve skriptech (kromě metody sečen), najděte s přesností $\epsilon = 0,01$ řešení rovnice

$$f(x) = e^{x+1} + (x - 1)^2 - 6.$$

Má-li rovnice řešení více, stačí najít jen jedno z nich. *Pokud si vyberete metodu, při níž je nutno ověřit podmínky konvergence, a tyto podmínky* beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud nebude volba počáteční aproximace podložena správným náčrtkem, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Proveďte jeden krok Newtonovy metody vedoucí k nalezení jednoho z řešení soustavy rovnic
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$$
Řešení vycházející z volby počáteční aproximace, která nebude podložena správným náčrtkem, bude vyhodnoceno jako zcela chybné.

7. Některou z numerických metod vypočtěte $\int\limits_{-0{,}7}^{0{,}5} 2\cos 2x \mathrm{d}x$. Uveďte, jakou metodu používáte. *Výsledek, který se bude od skutečné hodnoty integrálu lišit o více než 20%, bude vyhodnocen jako chybný. Pokud neuvedete, jakou metodou příklad řešíte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

4.16.2 Variantní zadání B

1. Náhodně vybíráme dvě reálná čísla z intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Označíme je tak, aby platilo $x \geq y$. Jaká je pravděpodobnost, že jsou zároveň splněny následující podmínky: $x - y > 1$ a $x + y < 2$? *Výpočet, který nebude podložen správným náčrtkem, bude hodnocen 0 body.*

2. Najděte konstantu a tak, aby funkce
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & x \in (1, a\rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$
byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny a porovnejte hodnoty $P(X \in (-DX, DX))$ a $P(X \in \langle -DX, DX\rangle)$.

3. O diskrétní náhodné veličině X popisující počet pozdních příchodů studenta AB na cvičení z INM známe následující údaje:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	0,01	0,2	0,15	0,08	0,01	0,03	0,01	0,02	0,01	0,03	0,05	0,01	?

V semestru, který nás zajímá, proběhlo 12 cvičení. Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

4. Je známo, že hmotnost ročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 10kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 100 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v jednom roce 12kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,04$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

5. Libovolnou numerickou metodou, která je uvedena ve skriptech (kromě metody sečen), najděte s přesností $\epsilon = 0,01$ řešení rovnice
$$f(x) = e^x + (x-2)^2 - 6.$$
Má-li rovnice řešení více, stačí najít jen jedno z nich. *Pokud si vyberete metodu, při níž je nutno ověřit podmínky konvergence, a tyto podmínky* beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud nebude volba počáteční aproximace podložena správným náčrtkem, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Proveďte jeden krok Newtonovy metody vedoucí k nalezení jednoho z řešení soustavy rovnic
$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-2)^2 &= 4\\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 9\end{aligned}$$
Řešení vycházející z volby počáteční aproximace, která nebude podložena správným náčrtkem, bude vyhodnoceno jako zcela chybné.

7. Některou z numerických metod vypočtěte $\int_{-0,6}^{0,6} 3\cos 2x\mathrm{d}x$. Uveďte, jakou metodu používáte. *Výsledek, který se bude od skutečné hodnoty integrálu lišit o více než 20%, bude vyhodnocen jako chybný. Pokud neuvedete, jakou metodou příklad řešíte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

4.16.3 Variantní zadání C

1. Náhodně vybíráme dvě reálná čísla z intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Označíme je tak, aby platilo $x \geq y$. Jaká je pravděpodobnost, že jsou zároveň splněny následující podmínky: $x - y < 1$ a $x + y < 2$? *Výpočet, který nebude podložen správným náčrtkem, bude hodnocen 0 body.*

2. Najděte konstantu a tak, aby funkce
$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in \langle 0,1\rangle \\ x-1 & x \in (1,a\rangle \\ 0 & jinak \end{cases}$$
byla funkcí hustoty nějaké spojité náhodné veličiny X. Poté najděte distribuční funkci této náhodné veličiny a porovnejte hodnoty $P(X \in (-DX, DX))$ a $P(X \in \langle -DX, DX\rangle)$.

3. O diskrétní náhodné veličině X popisující počet pozdních příchodů studenta AB na cvičení z INM známe následující údaje:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	0,01	0,2	0,15	?	0,07	0,03	0,01	0,02	0,01	0,03	0,05	0,01	0,02

V semestru, který nás zajímá, proběhlo 12 cvičení. Určete střední hodnotu náhodné veličiny X.

4. Je známo, že hmotnost ročního dítěte lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 10kg$ a rozptylem $\sigma^2 = 1$. Náhodně vybranému vzorku 50 dětí byla podávána nová umělá výživa. Průměrná hmotnost dětí z uvedeného vzorku byla v jednom roce 12kg. Na hladině významnosti $\alpha = 0,03$ testujte hypotézu, že nová umělá výživa má vliv na váhu dětí. *Tento příklad je zjednodušením reálné situace – předpokládejme, že váhu mohlo ovlivnit pouze podávání nového typu umělé výživy. Proveďte oboustranný test.*

5. Libovolnou numerickou metodou, která je uvedena ve skriptech (kromě metody sečen), najděte s přesností $\epsilon = 0,01$ řešení rovnice

$$f(x) = e^{x-2} + (x-2)^2 - 3.$$

   Má-li rovnice řešení více, stačí najít jen jedno z nich. *Pokud si vyberete metodu, při níž je nutno ověřit podmínky konvergence, a tyto podmínky* beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud nebude volba počáteční aproximace podložena správným náčrtkem, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Proveďte jeden krok Newtonovy metody vedoucí k nalezení jednoho z řešení soustavy rovnic

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

   Řešení vycházející z volby počáteční aproximace, která nebude podložena správným náčrtkem, bude vyhodnoceno jako zcela chybné.

7. Některou z numerických metod vypočtěte $\int_{-0,8}^{0,4} 2\cos 2x \mathrm{d}x$. Uveďte, jakou metodu používáte. *Výsledek, který se bude od skutečné hodnoty integrálu lišit o více než 20%, bude vyhodnocen jako chybný. Pokud neuvedete, jakou metodou příklad řešíte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

4.17 Zadání

1. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \\ \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \in (0, 1\rangle \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & \text{pro } x \in (1, 2\rangle \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$
Předpokládejte, že se jedná o distribuční funkci nějaké spojité náhodné veličiny X. Najděte hustotu pravděpodobnosti této náhodné veličiny. Ověřte, že takto získaná funkce je skutečně hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny. *V případě, že místo ověřování, zda je nějaká funkce hustotou pravděpodobnosti, budete ověřovat, zda je $F(x)$ distribuční funkcí, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

2. Najednou hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Za úspěch považujeme, jestliže alespoň na jedné z nich padne liché číslo. Jaká je pravděpodobnost, že ve 100 takových hodech dvěma kostkami nastane úspěch v alespoň 85 případech?

3. Je dána následující tabulka hodnot pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X, o níž víme, že $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	$\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$	?	$\frac{1}{4^5}$

Určete EX a DX. *Hodnoty je třeba určit* naprosto *přesně. Pokud se některá z Vámi vypočtených hodnot bude od skutečné hodnoty jakkoliv lišit, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů. Hodnoty mohou být uvedeny ve formě zlomku, ale nesmějí se v nich vyskytovat kombinační čísla.*

4. Je dána funkce $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Přesně *(5 bodů)* a poté numericky s krokem $h = 0,1$ *(5 bodů)* určete hodnoty $y'(1)$ a $y''(1)$. *Jasně uveďte, jaké hodnoty a do kterého vzorce dosazujete.*

5. Je dána následující soustava polynomů:
$$\begin{aligned} S_0(x) &= x^3 \text{ pro } x \in \langle 0; 1\rangle \\ S_1(x) &= 3x^3 - 2 \text{ pro } x \in \langle 1; 2\rangle \\ S_2(x) &= 2x^3 + 6 \text{ pro } x \in \langle 2; 3\rangle \end{aligned}$$
Rozhodněte, zda se jedná o kubický splajn. *Není třeba ověřovat, zda se jedná o* přirozený *kubický splajn. Slovem „rozhodněte" se rozumí, že své závěry správným a úplným způsobem zdůvodníte.*

6. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 10y - 5z &= 8 \\ 20x + 4y + 6z &= 30 \\ x - y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ a proveďte 2 kroky Jacobiho metody vedoucí k nalezení řešení dané soustavy.

7. Je dána počáteční úloha $y' = e^{3x} + 2y$, $y(0) = 2$. Metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0{,}2$ určete $y(0{,}4)$.

Komentář

Příklad 1 patří ke standardním zadáním, které se v této sbírce v různých podobách již několikrát objevilo. V této variantě vyžadujeme přesnou posloupnost kroků, protože chceme, aby studenti prokázali schopnost integrovat.

Příklad 2 využívá náhradu binomického rozdělení pravděpodobnosti normálním – nejprve je však nutné, aby student identifikoval, že při popisu situace lze použít binomické rozdělení, a správně určil jeho parametry.

Zdánlivě krkolomné zadání a maximalistický požadavek na přesné určení hodnot v příkladu 3 ve skutečnosti řešení velmi zjednodušuje a zejména poskytuje návod na řešení. Student, který v zadání pozná vzorec pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení pravděpodobnosti (jednoho ze tří probíraných diskrétních rozdělení), může výsledky psát téměř okamžitě.

V příkladu 4 vyjímečně testujeme numerické derivování. Jedná se o elementární dosazování do vzorců.

Při řešení příkladu 5 je třeba ověřit spojitost funkce a spojitost první a druhé derivace.

V příkladu 6 je metoda výpočtu zadána. Vyhovění požadavku na postup „vedoucí k nalezení řešení“ znamená přeskládání pořadí rovnic. Požadavek na dva kroky je uveden proto, aby bylo možné testovat, zda student rozlišuje Jacobiho a Gauss–Seidelovu metodu.

Příklad 7 je standardním zadáním. Úkolem je najít 10 hodnot, z nichž každé získáme dosazením do triviálního vzorce. Úloha je (na rozdíl od některých dřívějších zadání) ve tvaru uváděném v učebním textu, což snižuje riziko chyb.

Výsledky

1) $f(x) = x$ pro $x \in (0; 1\rangle$, $f(x) = 2 - x$ pro $x \in (1; 2\rangle$, $f(x) = 0$ jinak; je hustota; **2)** 0,0104; **3)** $\mathrm{E}X = \frac{5}{4}$, $\mathrm{D}X = \frac{15}{16}$; **4)** přesné hodnoty $y'(1) = 0{,}7071$, $y''(1) = 0{,}35356$; **5)** ne; **6)** $\mathbf{x}^{(2)} = (1{,}04; 0{,}85; 0{,}86)$; **7)** $y(0{,}4) = 5{,}5447$

4.17.1 Variantní zadání A

1. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \\ \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \in (0, 1\rangle \\ x - \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (1, 2\rangle \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$
Předpokládejte, že se jedná o distribuční funkci nějaké spojité náhodné veličiny X. Najděte hustotu pravděpodobnosti této náhodné veličiny. Ověřte, že takto získaná funkce je skutečně hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny. *V případě, že místo ověřování, zda je nějaká funkce hustotou pravděpodobnosti, budete ověřovat, zda je $F(x)$ distribuční funkcí, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

2. Najednou hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Za úspěch považujeme, jestliže alespoň na jedné z nich padne liché číslo. Jaká je pravděpodobnost, že ve 100 takových hodech dvěma kostkami nastane úspěch v alespoň 80 případech?

3. Je dána následující tabulka hodnot pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X, o níž víme, že $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	$\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$	$\binom{5}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$	?	$\binom{5}{4} \cdot \frac{3}{4^5}$	$\frac{1}{4^5}$

Určete EX a DX. *Hodnoty je třeba určit* naprosto *přesně. Pokud se některá z Vámi vypočtených hodnot bude od skutečné hodnoty jakkoliv lišit, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů. Hodnoty mohou být uvedeny ve formě zlomku, ale nesmějí se v nich vyskytovat kombinační čísla.*

4. Je dána funkce $y = \sqrt{x^2 + 2}$. Přesně *(5 bodů)* a poté numericky s krokem $h = 0,1$ *(5 bodů)* určete hodnoty $y'(2)$ a $y''(2)$. *Jasně uveďte, jaké hodnoty a do kterého vzorce dosazujete.*

5. Je dána následující soustava polynomů:
$$\begin{aligned} S_0(x) &= 2x^3 \text{ pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ S_1(x) &= x^3 + 1 \text{ pro } x \in \langle 1, 2\rangle \\ S_2(x) &= 2x^3 - 7 \text{ pro } x \in \langle 2, 3\rangle \end{aligned}$$
Rozhodněte, zda se jedná o kubický splajn. *Není třeba ověřovat, zda se jedná o* přirozený *kubický splajn. Slovem „rozhodněte“ se rozumí, že své závěry správným a úplným způsobem zdůvodníte.*

6. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 10y - 5z &= 8 \\ 20x + 4y + 6z &= 30 \\ 2x - y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ a proveďte 2 kroky Jacobiho metody vedoucí k nalezení řešení dané soustavy.

7. Je dána počáteční úloha $y' = e^{3x} + 3y$, $y(0) = 1$. Metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0{,}2$ určete $y(0{,}4)$.

4.17.2 Variantní zadání B

1. Je dána funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \\ \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \in (0, 1\rangle \\ 1 + \frac{x^2}{2} - x & \text{pro } x \in (1, 2\rangle \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Předpokládejte, že se jedná o distribuční funkci nějaké spojité náhodné veličiny X. Najděte hustotu pravděpodobnosti této náhodné veličiny. Ověřte, že takto získaná funkce je skutečně hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny. *V případě, že místo ověřování, zda je nějaká funkce hustotou pravděpodobnosti, budete ověřovat, zda je $F(x)$ distribuční funkcí, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

2. Najednou hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Za úspěch považujeme, jestliže alespoň na jedné z nich padne liché číslo. Jaká je pravděpodobnost, že ve 100 takových hodech dvěma kostkami nastane úspěch v alespoň 75 případech?

3. Je dána následující tabulka hodnot pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X, o níž víme, že $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	$\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$	$\binom{5}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$	?	$\frac{15}{4^5}$	$\frac{1}{4^5}$

Určete EX a DX. *Hodnoty je třeba určit* naprosto *přesně. Pokud se některá z Vámi vypočtených hodnot bude od skutečné hodnoty jakkoliv lišit, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů. Hodnoty mohou být uvedeny ve formě zlomku, ale nesmějí se v nich vyskytovat kombinační čísla.*

4. Je dána funkce $y = \sqrt{x^2 + 3}$. Přesně *(5 bodů)* a poté numericky s krokem $h = 0,1$ *(5 bodů)* určete hodnoty $y'(3)$ a $y''(3)$. *Jasně uveďte, jaké hodnoty a do kterého vzorce dosazujete.*

5. Je dána následující soustava polynomů:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 2x^3 + x \text{ pro } x \in \langle 0,1\rangle \\ S_1(x) &= x^3 + 2 \text{ pro } x \in \langle 1,2\rangle \\ S_2(x) &= x^3 + x \text{ pro } x \in \langle 2,3\rangle \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda se jedná o kubický splajn. *Není třeba ověřovat, zda se jedná o* přirozený *kubický splajn. Slovem „rozhodněte“ se rozumí, že své závěry správným a úplným způsobem zdůvodníte.*

6. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 4x + 10y - 5z &= 9 \\ 20x + 4y + 6z &= 30 \\ 2x - y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = (0,0,0)$ a proveďte 2 kroky Jacobiho metody vedoucí k nalezení řešení dané soustavy.

7. Je dána počáteční úloha $y' = e^{4x} + 2y$, $y(0) = 1$. Metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0{,}2$ určete $y(0{,}4)$.

4.17.3 Variantní zadání C

1. Je dána funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \\ x - \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \in (0,1\rangle \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 & \text{pro } x \in (1,2\rangle \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Předpokládejte, že se jedná o distribuční funkci nějaké spojité náhodné veličiny X. Najděte hustotu pravděpodobnosti této náhodné veličiny. Ověřte, že takto získaná funkce je skutečně hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny. *V případě, že místo ověřování, zda je nějaká funkce hustotou pravděpodobnosti, budete ověřovat, zda je $F(x)$ distribuční funkcí, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

2. Najednou hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Za úspěch považujeme, jestliže alespoň na jedné z nich padne liché číslo. Jaká je pravděpodobnost, že ve 100 takových hodech dvěma kostkami nastane úspěch v alespoň 70 případech?

3. Je dána následující tabulka hodnot pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X, o níž víme, že $X \in \{0,1,2,3,4,5\}$:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	?	$\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{64}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\frac{15}{4^5}$	$\frac{1}{4^5}$

Určete EX a DX. *Hodnoty je třeba určit* naprosto *přesně. Pokud se některá z Vámi vypočtených hodnot bude od skutečné hodnoty jakkoliv lišit, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů. Hodnoty mohou být uvedeny ve formě zlomku, ale nesmějí se v nich vyskytovat kombinační čísla.*

4. Je dána funkce $y = \sqrt{x^2+4}$. Přesně *(5 bodů)* a poté numericky s krokem $h = 0,1$ *(5 bodů)* určete hodnoty $y'(2)$ a $y''(2)$. *Jasně uveďte, jaké hodnoty a do kterého vzorce dosazujete.*

5. Je dána následující soustava polynomů:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= x^3 + x^2 \text{ pro } x \in \langle 0,1\rangle \\ S_1(x) &= 2x^3 \text{ pro } x \in \langle 1,2\rangle \\ S_2(x) &= x^3 + x^2 + 2x \text{ pro } x \in \langle 2,3\rangle \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda se jedná o kubický splajn. *Není třeba ověřovat, zda se jedná o* přirozený *kubický splajn. Slovem „rozhodněte“ se rozumí, že své závěry správným a úplným způsobem zdůvodníte.*

6. Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} 4x + 10y - 5z &= 9 \\ 30x + 4y + 6z &= 40 \\ x - y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

Zvolte počáteční aproximaci $x^{(0)} = (0,0,0)$ a proveďte 2 kroky Jacobiho metody vedoucí k nalezení řešení dané soustavy.

7. Je dána počáteční úloha $y' = e^{2x} + y$, $y(0) = 3$. Metodou Runge-Kutta 4. řádu s krokem $h = 0.2$ určete $y(0.4)$.

4.18 Zadání

1. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x) = \begin{cases} 8x - 3 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je hustotou nějaké náhodné veličiny X.

2. Opravili jsme 10 písemek, ze kterých bylo 6 úspěšných. Náhodně bez vracení vybereme 4 písemky z uvedených 10. Náhodná veličina X udává počet úspěšných písemek v našem výběru 4 písemek. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.

3. Zkoušku z matematiky dělalo 600 studentů. Bylo zjištěno, že jejich úspěšnost lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou 450 a rozptylem 49. Určete

   a) pravděpodobnost, že počet úspěšných studentů je větší než 400,

   b) pravděpodobnost, že počet úspěšných studentů je větší než 500.

4. Při jistém měření jste získali následující dvojice hodnot:

x	0,5	1,2	2	2,3	2,5	2,9
y	3	5	6,4	7,2	7,6	8,7

   Ze zkušenosti víte, že závislost veličiny y na veličině x je lineární. Určete ji.

5. Je dána rovnice $(x+1)^2 + \sin 2x = 2$. S přesností $\epsilon = 0,01$ najděte jeden její záporný kořen. *Pokud volbu počáteční aproximace nebo intervalu, na němž hledáte řešení, nedoložíte smysluplným a správným náčrtkem nebo zdůvodněním, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud si vyberete metodu, při níž je třeba ověřit podmínky konvergence a tyto podmínky* beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Chcete řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} e^{(x^2-y^2)} + x^2y - 1 &= 0 \\ \sin(x^2 - y) - xy^3 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

   Bylo zjištěno, že vhodná počáteční aproximace je $x^{(0)} = (1, 1)$. Newtonovou metodou najděte $x^{(1)}$.

7. Libovolnou metodou najděte na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,1$ řešení počáteční úlohy $y' = x^3 + 2y, y(0) = 1$. *Napište, jakou metodu používáte. Pokud název metody neuvedete, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů.*

Komentář

Příklad 1 je vyžaduje jednoduché ověření vlastností *funkce hustoty.* Příklady 2 a 3 jsou standardními zadáními ze sbírky příkladů, resp. učebního textu. Totéž se týká příkladu 4, kde jediným požadavkem nad rámec standardního zadání je převést slovo „lineární“ na vyjádření $y = c_0 + c_1 x$.

Požadavek u příkladu 5 víceméně poskytuje návod na řešení, není tedy „prací navíc“ ale nápovědou.

Příklad 6 je standardním zadáním. Co však tento příklad činí obtížnějším než jiné podobné příklady tohoto typu uváděné v některých dřívějších zadáních, je tvar funkcí a s ním spojené případné komplikace při hledání parciálních derivací. To je ovšem látka 2. semestru.

Příklad 7 je variantou příkladů z některých dřívějších zadání. Úloha je ve tvaru z učebního textu. Navíc, student má na výběr metodu dle svého uvážení, a tedy i možnost vybrat si tu nejkratší a nejjednodušší.

Výsledky

1) ne; **2)** $P(X = 0) = \frac{1}{210}$, $P(X = 1) = \frac{4}{35}$, $P(X = 2) = \frac{3}{7}$, $P(X = 3) = \frac{8}{21}$, $P(X = 4) = \frac{1}{14}$, $F(x)$ po částech konstantní funkce podle vzorce $F(x) = P(X \leq x)$, přitom $F(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F(x) = 1$ pro $x \geq 4$; **3)** a) $\doteq 1$, b) $\doteq 0$; **4)** $y = 1{,}982 + 2{,}2841x$; **5)** $-2{,}07$; **6)** $\mathbf{x}^{(1)} = (0{,}8; 1{,}2)$; **7)** např. první modifikací Eulerovy metody $y(0) = 1$, $y(0{,}1) = 1{,}22$, $y(0{,}2) = 1{,}4888$, $y(0{,}3) = 1{,}8179$, $y(0{,}4) = 2{,}2224$, $y(0{,}5) = 2{,}7211$, $y(0{,}6) = 3{,}3377$, $y(0{,}7) = 4{,}1016$, $y(0{,}8) = 5{,}0495$, $y(0{,}9) = 6{,}2270$, $y(1) = 7{,}6899$ (jednodušší a kratší je ovšem pochopitelně použít Eulerovu metodu bez modifikace)

4.18.1 Variantní zadání A

1. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x) = \begin{cases} 12x - 5 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

   je hustotou nějaké náhodné veličiny X.

2. Opravili jsme 10 písemek, ze kterých bylo 6 úspěšných. Náhodně bez vracení vybereme 5 písemek z uvedených 10. Náhodná veličina X udává počet úspěšných písemek v našem výběru. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.

3. Zkoušku z matematiky dělalo 800 studentů. Bylo zjištěno, že jejich úspěšnost lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou 650 a rozptylem 81. Určete

   a) pravděpodobnost, že počet úspěšných studentů je větší než 300,

   b) pravděpodobnost, že počet úspěšných studentů je větší než 700.

4. Při jistém měření jste získali následující dvojice hodnot:

x	0,5	1,2	2	2,2	2,4	2,9
y	3	5	6,8	7,4	7,6	8,7

   Ze zkušenosti víte, že závislost veličiny y na veličině x je lineární. Určete ji.

5. Je dána rovnice $(x+1)^2 + \sin 2x = 4$. S přesností $\epsilon = 0,01$ najděte jeden její záporný kořen. *Pokud volbu počáteční aproximace nebo intervalu, na němž hledáte řešení, nedoložíte smysluplným a správným náčrtkem nebo zdůvodněním, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud si vyberete metodu, při níž je třeba ověřit podmínky konvergence a tyto podmínky* beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Chcete řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} e^{(x^2-y^2)} - xy^2 - 1 &= 0 \\ \sin(x^2 - y) - xy^3 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

   Bylo zjištěno, že vhodná počáteční aproximace je $x^{(0)} = (2, 1)$. Newtonovou metodou najděte $x^{(1)}$.

7. Libovolnou metodou najděte na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s krokem $h = 0,1$ řešení počáteční úlohy $y' = x^3 + 2y, y(0) = 2$. *Napište, jakou metodu používáte. Pokud název metody neuvedete, bude maximální bodové hodnocení za tento příklad pouze 5 bodů.*

4.19 Zadání

1. Udejte příklad funkce, která není hustotou pravděpodobnosti žádné náhodné veličiny. Zdůvodněte, proč se nejedná o hustotu pravděpodobnosti. *Pokud nebude uvedeno správné zdůvodnění, bude příklad hodnocen 0 body.*

2. O náhodné veličině X víme, že $X \sim \mathrm{Bi}(8, \frac{1}{4})$. Určete $P(X < EX)$. *Výsledek vyjádřete desetinným číslem.*

3. Náhodná veličina Y popisuje výskyt jisté události za týden. Okolnosti jsou takové, že $Y \sim \mathrm{Po}(14)$. Určete pravděpodobnost, že v období tří po sobě jdoucích dnů dojde k události alespoň dvakrát. *Výsledek vyjádřete desetinným číslem.*

4. Výsledky testu lze popsat normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 60$ bodů a rozptylem $\sigma^2 = 49$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný respondent získá v testu alespoň 75 bodů? *Výsledek vyjádřete desetinným číslem.*

5. Libovolnou numerickou metodou, která je uvedena ve skriptech (kromě metody sečen), najděte s přesností $\epsilon = 0,01$ větší z řešení rovnice

$$e^{x-1} + (x+1)^2 - 2 = 0$$

Pokud si vyberete metodu, při níž je nutno ověřit podmínky konvergence, a tyto podmínky beze zbytku *neověříte, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů. Pokud nebude volba počáteční aproximace podložena správným náčrtkem, je maximální bodové hodnocení za tento příklad sníženo o 5 bodů.*

6. Je dána následující tabulka hodnot:

x_i	-4	-2	0	1
y_i	-1	0	2	3

Zadanými hodnotami proložte interpolační polynom.
Polynom upravte do obvyklého tvaru $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

7. Složenou lichoběžníkovou metodou vypočtěte $\int_1^2 e^{x^2} \mathrm{d}x$. Interval $\langle 1; 2\rangle$ rozdělte na 4 dílky.

Komentář

V několika dřívějších zadáních bylo úkolem ověřovat, zda zadaná funkce má nebo nemá jisté vlastnosti. V příkladu 1 je nyní požadováno, aby student *udal příklad* funkce s danými vlastnostmi. To je sice zdánlivě totéž, reálně je to však obtížnější.

Naopak, příklad 2 je jednoduchý, protože jde o prostou aplikaci vzorců. Podobně příklady 3, 4, 6 a 7 jsou standardními zadáními, které se vyskytují jak v učebním textu, tak i ve sbírce příkladů.

Totéž se týká i příkladu 5, ovšem s tím rozdílem, že podobně jako v některých dřívějších zadáních dáváme na výběr, jakou metodu si student zvolí. Tento výběr pochopitelně značně ovlivňuje jak délku řešení, tak i nároky na jeho provedení. Provedení separace kořenů není nijak obtížné – funkce je volena tak, aby i obrázek načrtnutý „od ruky“ poskytnul dostatek relevantních informací.

Výsledky

2) 0,3671; **3)** 0,4422; **4)** 0,0161; **5)** 0,2; **6)** $P_3(x) = -0{,}025x^3 - 0{,}025x^2 + 1{,}05x + 2$; **7)** 19,073

4.20 Bonusové zadání pro dobře připravené

Toto zadání u zkoušky sice nenajdete, nicméně i tak si jej můžete zkusit vypočítat.

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} 100x + 4y + 5z &= 137 \\ 6x + 95y + z &= 296 \\ x - 2y + 110z &= 545 \end{aligned}$$

   Určete její řešení s přesností na 1 desetinné místo nějakou iterační metodou.

2. Uvažme řešení minulého příkladu ve tvaru (x, y, z). Každou hodnotu zaokrouhlete na jednotky, čímž získáme řešení (x_r, y_r, z_r). Uvažme dále čísla $a = x_r + y_r$, $b = y_r - z_r$. Konečně uvažme elipsu se středem v bodě $[0, 0]$, hlavní poloosou délky z_r a vedlejší poloosou délky y_r. Najděte nejvhodnější parabolu, která v uzlových bodech x_r, y_r, z_r, a, b nahrazuje část elipsy nad osou x. Přitom pracujte s hodnotami v uzlových bodech zaokrouhlenými na jedno desetinné místo.

3. Celou část koeficientu u absolutního členu v rovnici paraboly z příkladu 2 označme k. Pravou stranu té rovnice, ve které jako jeden z koeficientů v příkladu 2 figuruje počet uzlových bodů, označme jako l. Číslo l zaokrouhleme na jednotky a označme l_z. Uvažme funkci $f(x) = x \cos x$. Určete

$$\int_k^{l_z} f(x) \mathrm{d}x,$$

   a to

   (a) jednoduchou lichoběžníkovou metodou (část výsledku před desetinnou čárkou – včetně znaménka – označte L),

   (b) jednoduchou Simpsonovou metodou (část výsledku před desetinnou čárkou – včetně znaménka – označte S),

   (c) přesně (část výsledku před desetinnou čárkou – včetně znaménka – označte A).

4. Uvažme diferenciální rovnici $y' + \frac{L-1}{A-3} y = Sx$ a podmínku $y(2) = A$, kde L, S, A jsou hodnoty z předcházejícího příkladu. Řešte tuto počáteční úlohu na intervalu $\langle 2; 3 \rangle$ s krokem $h = 0{,}2$ Eulerovou metodou.

5. Každou y–ovou hodnotu z předcházejícího příkladu zaokrouhlete na jedno desetinné místo. Získanými body proložte interpolační polynom. Určete hodnotu tohoto polynomu v bodě 2,6 (označme ji d) a v bodě 3 (označme ji h).

6. Uvažme spojitou náhodnou veličinu X, která má hustotu pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{8}x$ pro $x \in (0; t)$, $f(x) = 0$ jinak. Určete $P(X \in \langle d; h \rangle)$ (výsledek označte μ) a $P(X \in \langle -d; h \rangle)$ (výsledek označte σ^2).

7. Předpokládejme náhodnou veličinu $Y \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, kde parametry normálního rozdělení jsou hodnoty z předcházejícího příkladu. Určete $P(X \in \langle -0{,}29; 0{,}29 \rangle)$.

Výsledky

Dílčí výsledky by vaši práci příliš usnadňovaly. Pro kontrolu nicméně uveďme, že $l_z - k = 7$, $\frac{L-1}{A-3} \in \mathbb{N}$, $3t \leq S$. Celkový výsledek je 0,2281838.

5 Odkazy

Kromě odkazů na doplňkové elektronické zdroje uvedené ve 2. kapitole můžete využít také následujících odkazů:

1. B.Fajmon, I. Hlavičková, M. Novák, *Matematika 3*, Brno, VUT, 2014 (základní studijní literatura k předmětu)
2. Učební texty a doplňkové elektronické zdroje pro další matematické předměty
3. novakm@feec.vutbr.cz (kontakt na autora)