

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

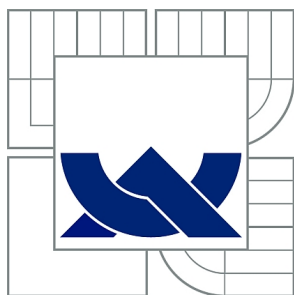
NEJISTOTY MĚŘENÍ STANOVENÉ METODOU MONTE CARLO

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

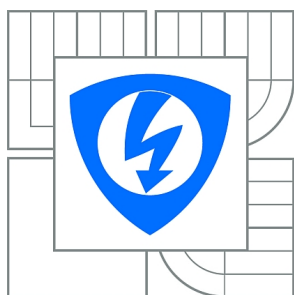
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ROMAN KREJČÍ

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ**
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

NEJISTOTY MĚŘENÍ STANOVENÉ METODOU MONTE CARLO

MEASUREMENT UNCERTAINTIES DETERMINED BY THE MONTE CARLO METHOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

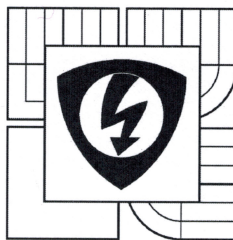
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ROMAN KREJČÍ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. SOŇA ŠEDIVÁ, Ph.D.

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor
Automatizační a měřicí technika

Student: Roman Krejčí

Ročník: 3

ID: 136551

Akademický rok: 2012/13

NÁZEV TÉMATU:

Nejistoty měření stanovené metodou Monte Carlo

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Proveďte literární rešerši v oblasti stanovení nejistot u přímých i nepřímých měření. Detailněji se zaměřte na výpočet nejistot měření pomocí metody Monte Carlo.
2. Navrhněte metodiku stanovení nejistoty nepřímého měření elektrického odporu metodou Monte Carlo.
3. Proveďte experimentální měření a stanovení nejistoty nepřímého měření elektrického odporu pomocí měřicích přístrojů, které jsou dostupné na ÚAMT. Ověřte vliv teploty a dále vliv přesnosti použitých měřicích přístrojů na hodnotu nejistoty měření.
4. Porovnejte hodnoty získaných nejistot měření metodou Monte Carlo a klasickou metodou výpočtu nejistot.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

PALENČÁR, R. - VDOLEČEK, F. - HALAJ, M.: Nejistoty v měření I až V, soubor článků v časopise AUTOMA, č. 7-8/2001, č. 10/2001, č. 12/2001, č. 4/2002 a č. 5/2002

Termín zadání: 11.2.2013

Termín odevzdání: 27.5.2013

Vedoucí práce: Ing. Soňa Šedivá, Ph.D.

Konzultanti bakalářské práce:

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.

předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv, osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.



ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá stanovením nejistot u přímých a nepřímých měření. Zaměřuje se na výpočet nejistot metodou Monte Carlo i klasickou numerickou metodou. Praktická část práce pojednává o stanovení nejistot nepřímého měření odporu Ohmovou metodou. Vypočítané nejistoty jsou porovnávány na základě vlivu metody, přesnosti použitých přístrojů a teploty.

KLÍČOVÁ SLOVA

Metoda Monte Carlo, nejistoty měření, nepřímé měření odporu, Ohmova metoda, teplotní závislost elektrického odporu

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with the determination of the uncertainties of direct and indirect measurements. It focused on the uncertainty calculation by Monte Carlo method and GUM uncertainty framework. The practical part deals with the determination of uncertainties indirect measurement of resistance Ohm's method. The calculated uncertainties are compared on the basis of the influence of the method, accuracy used devices and the temperature.

KEYWORDS

Monte Carlo Method, measurement uncertainty, indirect measurement of resistance, Ohm's method, temperature dependence of resistivity

KREJČÍ, Roman *Nejistoty měření stanovené metodou Monte Carlo*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2013. 64 s. Vedoucí práce byl Ing. Soňa Šedivá, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Nejistoty měření stanovené metodou Monte Carlo“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....
(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucí mé bakalářské práce Ing. Soně Šedivé, Ph.D. za ochotu, čas strávený konzultacemi a za odborné rady při zpracování mé bakalářské práce.

Brno

.....

(podpis autora)

OBSAH

Úvod	9
1 Nejistoty měření	10
1.1 Typy nejistot [1],[2],[5],[6],[7],[9]	10
1.1.1 Standardní nejistota typu A	10
1.1.2 Standardní nejistota typu B	10
1.1.3 Kombinovaná nejistota	11
1.1.4 Rozšířená nejistota	12
1.1.5 Nejistoty nepřímých měření	12
2 Metoda Monte Carlo	13
2.1 Příklad metody MC - výpočet Ludolfova čísla	13
2.2 Výpočet nejistot metodou Monte Carlo	14
2.3 Schéma metody Monte Carlo	15
2.4 Generování náhodných čísel	15
2.5 Software pro metodu Monte Carlo	16
2.6 Výhody a nevýhody metody Monte Carlo	16
3 Teplotní závislost elektrického odporu	17
4 Úvod k praktické části	19
5 Nepřímé měření odporu Ohmovou metodou - vliv použité metody	20
5.1 Ohmova metoda pro velké odpory	21
5.1.1 Měření odporu $500\text{k}\Omega$	21
5.1.2 Měření odporu 20Ω	23
5.2 Ohmova metoda pro malé odpory	24
5.2.1 Měření odporu 20Ω	25
5.2.2 Měření odporu $500\text{k}\Omega$	27
5.3 Ohmova metoda pro velké odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo	28
5.3.1 Výpočet nejistot měření odporu 20Ω	28
5.3.2 Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$	29
5.4 Ohmova metoda pro malé odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo	30
5.4.1 Výpočet nejistot měření odporu 20Ω	30
5.4.2 Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$	31

5.5	Porovnání vypočtených nejistot klasickou numerickou metodou a metodou Monte Carlo v závislosti na metodě měření	32
6	Nepřímé měření odporu Ohmovou metodou - vliv přesnosti použitých přístrojů	34
6.1	Ohmova metoda pro velké odpory	35
6.1.1	Měření odporu $500\text{k}\Omega$ číslicovými přístroji	35
6.1.2	Měření odporu $500\text{k}\Omega$ analogovými přístroji	36
6.2	Ohmova metoda pro malé odpory	37
6.2.1	Měření odporu $500\text{k}\Omega$ číslicovými přístroji	37
6.2.2	Měření odporu $500\text{k}\Omega$ analogovými přístroji	38
6.3	Ohmova metoda pro velké odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo	39
6.3.1	Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$ číslicovými přístroji . .	39
6.3.2	Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$ analogovými přístroji .	41
6.4	Ohmova metoda pro malé odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo	42
6.4.1	Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$ číslicovými přístroji . .	42
6.4.2	Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$ analogovými přístroji .	43
6.5	Porovnání vypočtených nejistot klasickou numerickou metodou a metodou Monte Carlo v závislosti na přesnosti přístrojů	44
7	Nepřímé měření odporu Ohmovou metodou - vliv teploty	46
7.1	Výpočet nejistoty měření teplotního čidla Pt1000 v závislosti na teplotě	46
7.2	Výpočet nejistoty měření teplotního čidla Pt1000 v závislosti na teplotě pomocí metody Monte Carlo	48
7.3	Shrnutí nepřímého měření odporu Ohmovou metodou v závislosti na vlivu teploty	50
8	Závěr	51
	Literatura	53
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	55
	Seznam příloh	57
A	Ukázkové příklady z Matlabu	58
A.1	Ukázkový příklad kódu Matlabu při zapojení pro velké odpory	58
A.2	Ukázkový příklad kódu Matlabu při zapojení pro malé odpory	60

A.3 Ukázkový příklad kódu Matlabu pro výpočet nejistoty měření odporu se závislostí na teplotě	62
B Přiložené CD	64

ÚVOD

Je známo, že žádné měřicí přístroje ani měřicí metody nejsou vždy absolutně přesné, proto nelze měřenou hodnotu pouze odečíst z displeje přístroje. V posledních letech se proto zavedl pojem nejistota měření, podle které lze výsledné hodnoty měření posuzovat.

V teoretické části této bakalářské práce bude čtenáři vysvětlena metodika stanovení nejistot. Práce není zaměřena pouze na výpočet nejistot numerickou metodou, ale také metodou Monte Carlo, která pro výpočet používá velké množství náhodně generovaných čísel. Metoda dostala název podle města hazardu Monte Carla, jelikož je inspirována ruletou. K výpočtu je potřeba velké množství dat, což v dobách, kdy výpočetní technika nebyla na tak vysoké úrovni, byl problém. V současnosti je metoda běžně používána a její využití je v nepřeberném množství oblastí, tedy i na výpočet nejistot. Použití metody Monte Carlo je výhodné zejména v případech, kdy veličiny mají různá pravděpodobnostní rozdělení. Další výhodou je její jednoduchost. Ta spočívá v tom, že není nutné počítat parciální derivace, které jsou při numerické metodě nutné k výpočtu.

V praktické části se věnuji stanovení nejistot nepřímého měření odporu Ohmovou metodou. Tyto nejistoty jsou vždy vypočteny numerickou metodou a metodou Monte Carlo a následně porovnávány. Při měření je posuzován vliv použité metody na velikost nejistot, vliv přesnosti použitých přístrojů a také vliv teploty.

1 NEJISTOTY MĚŘENÍ

V dřívějších letech se k posouzení přesnosti měření používaly pojmy *chyba měření* a *pravá hodnota*. Tuto hodnotu však nedokážeme přesně určit, proto se zavedl pojem *konvenčně pravá hodnota*, která je určena přesnějšími přístroji či dokonalejšími metodami měření. Při určení konvenčně pravé hodnoty nastává problém, protože výrobci uvádějí různé parametry. Proto se v poslední době zavedl pojem *nejistota měření*. Nejistota měření je parametr související s výsledkem měření a charakterizuje rozptyl hodnot, které lze přiřadit k měřené veličině s určitou pravděpodobností. Pro vyjádření nejistoty měření je důležité, aby bylo jednotné. Díky tomu se mohou porovnávat naměřené hodnoty v různých částech světa. [5],[6]

1.1 Typy nejistot [1],[2],[5],[6],[7],[9]

Nejistoty měření dělíme na dvě základní skupiny - nejistoty typu A a typu B.

1.1.1 Standardní nejistota typu A

Nejistota typu A se určuje statistickým zpracováním opakovaných měření za stále stejných podmínek a představuje rozptyl hodnot opakovaných měření. Počet opakování n by měl být co největší, minimálně deset. Mírou nejistoty typu A je *výběrová směrodatná odchylka výběrového průměru*.

$$u_A(x) = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1.1)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.2)$$

kde

$u_A(x)$ je standardní nejistota typu A,

$s_{\bar{x}}$ výběrová směrodatná odchylka výběrového průměru,

n počet opakování měření,

x_i jednotlivé naměřené hodnoty,

$\bar{x}$ aritmetický průměr naměřených hodnot.

1.1.2 Standardní nejistota typu B

Vyhodnocení nejistot typu B je založeno na jiném než statistickém zpracování série měření. Standardní nejistota u_B se určí podle úsudku založeného na všech dostupných informacích o měřené veličině a jejích změnách.

Zdroje informací mohou být:

- výsledky z předchozích měření,
- informace od výrobce měřicí techniky,
- údaje z certifikátů a kalibračních listů,
- nejistoty referenčních údajů,
- zkušenosti a všeobecné znalosti s vlastnostmi chování materiálu a měřicí techniky.

Při výpočtu nejistoty typu B se vychází z dílčích nejistot jednotlivých zdrojů, kde hodnota D_{max} je maximální odchylka zdroje nejistoty.

$$u_{BZ}(x) = \frac{D_{max}}{\chi} \quad (1.3)$$

Koeficient χ je příslušný k rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých zdrojů. Pro normální rozdělení je koeficient roven $\chi = 2$ a pro rovnoměrné rozdělení $\chi = \sqrt{3}$. Více hodnot koeficientu χ lze nalézt v [6]. Celková nejistota typu B je pak dána geometrickým součtem jednotlivých zdrojů v případě, že jednotlivé zdroje jsou nekorelované.

$$u_B(x) = \sqrt{\sum_{Z=1}^n u_{BZ}(x)^2} \quad (1.4)$$

Pokud jsou některé zdroje nejistot ve vzájemné korelaci, je třeba určit výběrový korelační koeficient r_B a vztah pro celkovou nejistotu typu B bude:

$$u_B(x) = \sqrt{\sum_{Z=1}^n A_Z^2 u_B(x_Z)^2 + 2 \sum_{Z=1}^{n-1} \sum_{i>Z}^n A_Z A_i u_B(x_Z) u_B(x_i) r_B(x_Z, x_i)} \quad (1.5)$$

kde

A_Z, A_i jsou citlivostní koeficienty a

r_B je výběrový korelační koeficient. Nabývá hodnot $-1 \leq r_B(x_Z, x_i) \leq 1$. Pokud jsou odhady x_Z a x_i nezávislé je $r_B = 0$. Při silné závislosti odhadů se bude r_B blížit 1 či -1 .

1.1.3 Kombinovaná nejistota

Kombinovaná nejistota je dána geometrickým součtem standardních nejistot typu A a B.

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)} \quad (1.6)$$

Tato nejistota vyjadřuje interval, ve kterém se hodnota měřené veličiny vyskytuje s pravděpodobností 68% pro normální rozdělení.

1.1.4 Rozšířená nejistota

Pro běžná měření je požadována větší hodnota spolehlivosti blíží se 100%. Toho lze dosáhnout zvětšením intervalu možných hodnot. Koeficient k_r se nejčastěji volí $k_r = 2$ pro rozšíření na 95%.

$$U(x) = k_r \cdot u_C(x) \quad (1.7)$$

1.1.5 Nejistoty nepřímých měření

U nepřímých měření se měřená veličina Y vypočítá z dílčích přímých měření. Platí:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (1.8)$$

kde f je známá funkce. Pro odhad y výstupní veličiny Y platí:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1.9)$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_N$ jsou odhady vstupních veličin $X_1, X_2, \dots, X_N$. V případě, že mezi vstupními veličinami není závislost, vypočítáme nejistotu nepřímého měření podle vztahu:

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u_{xi} \right)^2 \quad (1.10)$$

2 METODA MONTE CARLO

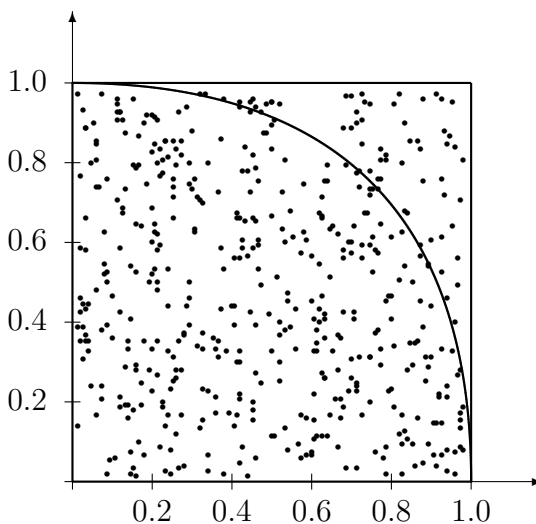
Metoda Monte Carlo je třída algoritmů pro simulaci systémů [11]. Mezi tvůrce metody patří John von Neumann, Stanislaw Marcin Ulam a Nicholas Metropolis. Neumann a Ulam zkoumali s využitím metody Monte Carlo v Národní laboratoři Los Alamos chování neutronů a využili metodu při vývoji atomové bomby v rámci projektu Manhattan. Metoda je založena na provádění náhodných pokusů s modelem systému a jejich vyhodnocení. Výhodou metody je její snadná implementace na různé typy úloh. [10]

Příklady použití metody:

- řešení diferenciálních rovnic,
- řešení určitých integrálů,
- modelování stochastických systémů,
- **výpočet nejistot.**

2.1 Příklad metody MC - výpočet Ludolfova čísla

Jako ukázkový příklad použití metody Monte Carlo použijeme výpočet čísla π . Mějme čtverec, do kterého je vepsána čtvrtkružnice. Obsah čtvrtkružnice je $S_1 = \frac{\pi r^2}{4}$ a obsah čtverce je $S_2 = r^2$. Do čtverce umísťujeme náhodně body. Body ležící ve čtverci označíme N a body ležící ve čtverci i čtvrtkružnici označíme M .



Obr. 2.1: Ukázka výpočtu Ludolfova čísla

Dále platí:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} \Rightarrow \pi = 4 \frac{S_1}{S_2} \quad (2.1)$$

Pro π tedy platí:

$$\pi = 4 \frac{M}{N} \quad (2.2)$$

Se zvětšujícím se počtem bodů se zvětšuje i přesnost čísla π . Zvýšením řádu opakování se obvykle získá jedna cifra čísla π . [10]

2.2 Výpočet nejistot metodou Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je realizována pomocí algoritmu, který můžeme shrnout následujícím postupem:

1. Nejprve je nutné vytvořit matematický model měření $Y = f(\mathbf{X})$, kde Y je skalární výstupní veličina a $\mathbf{X}$ reprezentuje N vstupních veličin. Každá veličina X_i je považována za náhodnou veličinu s možnou hodnotou ξ_i , se střední hodnotou x_i a hustotou pravděpodobnosti $g(\xi_i)$. Y je náhodná veličina s možnou hodnotou η , střední hodnotou y a hustotou pravděpodobnosti $g(\eta)$. Dále je nutné si zvolit počet opakování M metody Monte Carlo a pravděpodobnost pokrytí p .
2. Pro každou vstupní X_i veličinu se vygeneruje M náhodných vektorů $\mathbf{x}_r$, $r = 1, \dots, M$ podle hustoty rozdělení nejistot. Je tedy vygenerováno $M \cdot N$ čísel.
3. Vygenerovaná čísla jsou dosazena do modelu měření $y_r = f(\mathbf{x}_r)$, $r = 1, \dots, M$. V modelu měření r -tý prvek $\mathbf{x}_r$ obsahuje $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$, $x_{i,r}$ je náhodné číslo podle hustoty rozdělení nejistot.
4. Proveďte se seřazení hodnot y_r , $r = 1, \dots, M$ do neklesajícího pořadí. Tento seřazený model si označíme jako $y_{(r)}$, $r = 1, \dots, M$. Ze souboru hodnot $y_{(r)}$ se poté určí diskrétní distribuční funkce G .
5. Vypočítá se průměr $\tilde{y}$

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r \quad (2.3)$$

a směrodatná odchylka

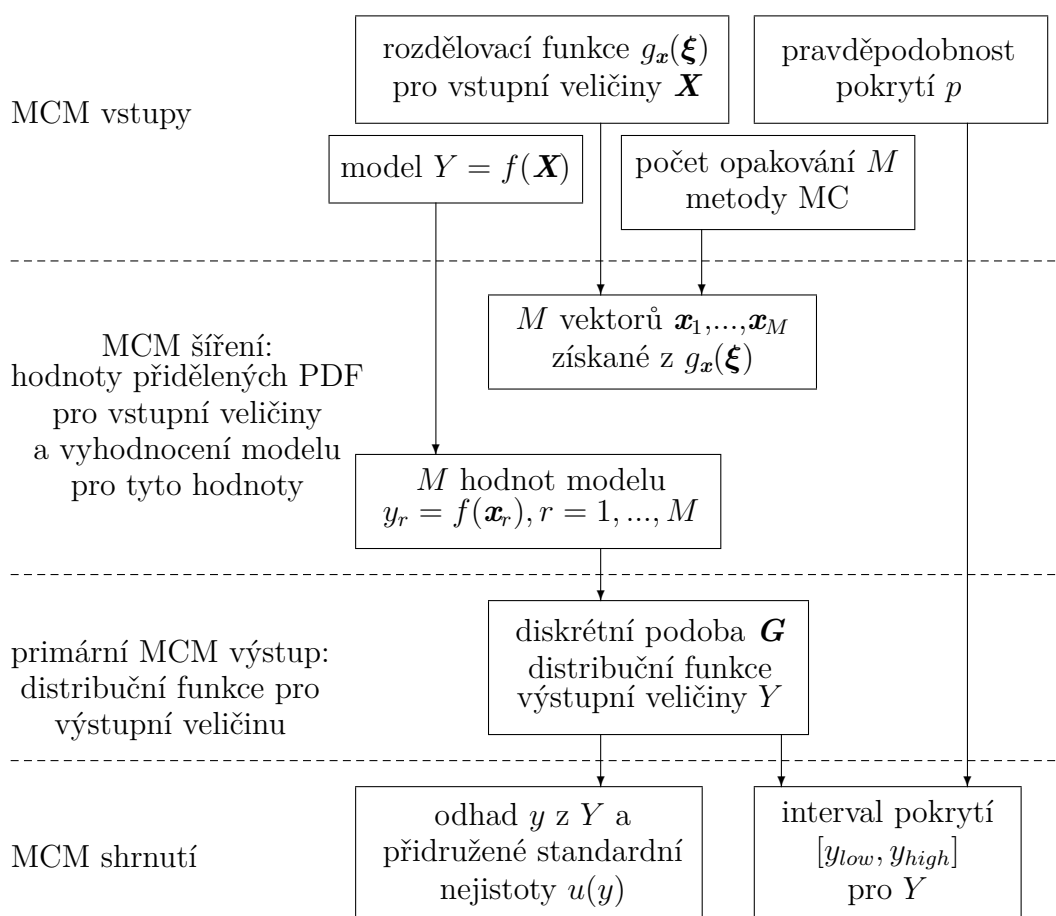
$$u(\tilde{y}) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \tilde{y})^2}. \quad (2.4)$$

Respektive odhad y z Y a přidružená standardní nejistota $u(y)$.

6. Určí se interval pokrytí pro Y určený z diskrétní podoby G . Vypočítá se $q = pM$, pak $[y_{low}, y_{high}]$ je $100p$ % interval pokrytí pro Y , kde $y_{low} = y_{(r)}$ a $y_{high} = y_{(r+q)}$ pro $r = 1, \dots, M - q$. Pravděpodobnostně symetrický $100p$ % interval pokrytí je vypočítán podle $r = (M - q)/2$.

[8],[10]

2.3 Schéma metody Monte Carlo



Obr. 2.2: Schéma metody Monte Carlo [8], [11]

2.4 Generování náhodných čísel

Metoda Monte Carlo je založena na práci s náhodnými čísly. Tato náhodná čísla je nutno nějakým způsobem získat. Nejčastější možnosti získání náhodných čísel jsou tyto:

- **Fyzikální generátory náhodných čísel** - Tyto generátory patří mezi nejdokonalější. Jsou založeny na náhodných fyzikálních procesech. Náhodná čísla mohou být získána například z náhodných šumů na polovodičovém přechodu či rozpadu atomového jádra izotopu. Jejich výhodou je generování opravdu náhodných čísel. Nevýhodou těchto generátorů je jejich relativní pomalost.

- **Tabulky náhodných čísel** - Fyzikální generátory vyprodukovaly náhodná čísla, která se pak uložila na nějaké médium (vytištěné tabulky, děrné či magnetické pásky). Tato metoda je však opět pomalá a s nástupem výpočetní techniky přestala vyhovovat.
- **Vypočítaná náhodná čísla** - Tato metoda generování náhodných čísel se používá až do současné doby. Generátory, které vypočítávají posloupnost čísel, se nazývají generátory pseudonáhodných čísel. Generují čísla například pomocí systémového času. Vygenerovaná čísla nejsou dokonale náhodná a po uplynutí tzv. periody p se začnou opakovat. Je proto nutné, aby perioda p byla co největší.

[12]

2.5 Software pro metodu Monte Carlo

Předpoklad softwaru pro metodu Monte Carlo je zpracování velkého množství dat. Je vhodné použití programu MATLAB, či jeho volně šiřitelné napodobeniny Octave. Vhodný je také matematický software R. Jde o software zaměřený na statistické zpracování dat a je také zdarma. Dále program OpenBUGS, který se zaměřuje přímo na metodu Monte Carlo. OpenBUGS je volně šiřitelná verze programu WinBUGS.

Některý software je přímo navržen na výpočet nejistot, příkladem může být program GUM Workbench Pro, který má ve verzi 2.4 integrovanou simulaci metodou Monte Carlo. Další možností může být použití programu QMSys GUM Professional.

Nevhodné je použití tabulkových procesorů kancelářských balíků. Příkladem nevhodného softwaru je Microsoft Excel 2000 a Excel 2003.

[10]

2.6 Výhody a nevýhody metody Monte Carlo

Výhody

- lze počítat nejistoty i přes komplikované rozdělení vstupních veličin,
- lze počítat i s komplexními čísly,
- snadná implementace na různé modely.

Nevýhody

- nelze počítat na papíře,
- nutnost vhodného softwaru a kvalitního generátoru náhodných čísel.

[10],[11]

3 TEPLOTNÍ ZÁVISLOST ELEKTRICKÉHO OD- PORU

Je známo, že elektrický odpor kovových vodičů je také ovlivněn teplotou okolí. Při zvýšení teploty dochází ke zvětšení amplitud kmitání krystalové mřížky a vzroste tak pravděpodobnost srážek s ionty v uzlech mřížky.

Závislost elektrického odporu vodiče na teplotě je přibližně lineární v širokém pásmu teplot a lze jí vyjádřit vztahem [15]

$$R = R_0[1 + \alpha(t - t_0)], \quad [\Omega] \quad (3.1)$$

kde

R $[\Omega]$ je odpor při teplotě t ,

R_0 $[\Omega]$ je odpor při teplotě t_0 ,

α $[K^{-1}]$ je teplotní součinitel elektrického odporu,

t $[^{\circ}C]$ je obecná teplota a

t_0 $[^{\circ}C]$ je referenční teplota.

Obdobný vztah lze také získat pomocí rezistivity

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(t - t_0)], \quad [\Omega m] \quad (3.2)$$

kde

ρ $[\Omega m]$ rezistivita při teplotě t a

ρ_0 $[\Omega m]$ rezistivita při teplotě t_0 .

Tab. 3.1: Rezistivity a teplotní součinitelé některých odporových materiálů [13]

Látka	ρ_0 $[\mu\Omega m](20^{\circ}C)$	α $[10^{-3}K^{-1}]$
Platina (3850)	0,105	3,85
Platina (3911)	0,105	3,91
Nikl (5000)	0,069	5,00
Nikl (6180)	0,069	6,18
Měď	0,017	4,27 až 4,33
Molybden	0,053	5,50

Teplotní součinitel elektrického odporu α udává poměrnou změnu odporu materiálu při změně teploty o $1^{\circ}C$ a vypočítá se podle vztahu

$$\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{R - R_0}{t - t_0} \quad [K^{-1}] \quad (3.3)$$

Hodnoty α pro nejčastěji používané odporové materiály jsou uvedeny v tabulce 3.1:

V mém pokusu budu posuzovat vliv teploty na velikost odporu čidla teploty Pt1000.

Závislost čidla na teplotě v tomto případě není zcela lineární, v literatuře se uvádí vztah pro teploty vyšší než nula: [14]

$$R = R_0 \cdot (1 + A \cdot t + B \cdot t^2), \quad [\Omega] \quad (3.4)$$

kde

$$A = 3,9083 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$B = -5,775 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ\text{C}^{-2}$$

4 ÚVOD K PRAKTICKÉ ČÁSTI

V praktické části budu nepřímo měřit odpor Ohmovou metodou. Použita je Ohmova metoda pro malé odpory i Ohmova metoda pro velké odpory. Následně jsou vypočítány velikosti nejistot měření odporu. Tyto nejistoty jsou vypočítány klasickou numerickou metodou a také metodou Monte Carlo. Vždy na konci kapitol se poté nachází shrnutí kapitoly, ve kterém jsou porovnávány hodnoty těchto nejistot vypočítaných podle obou metod. Také se zde nachází grafy, které znázorňují průběh hustoty pravděpodobnosti měřeného odporu. Svislými čarami jsou pak znázorněny intervaly pokrytí, ve kterých se měřený odpor nachází s pravděpodobností 95%. V jednotlivých kapitolách posuzuji postupně vliv použité Ohmovy metody na velikost nejistot měření odporu, vliv přesnosti použitých přístrojů a také vliv teploty.

5 NEPŘÍMÉ MĚŘENÍ ODPORU OHMOVOU METODOU - VLIV POUŽITÉ METODY

V této kapitole budu posuzovat vliv použité metody na velikost nejistoty nepřímého měření odporu. Dále budu porovnávat nejistoty měření odporu vypočtené klasickou numerickou metodou s nejistotami zjištěnými metodou Monte Carlo. Výpočet nejistot pomocí metody Monte Carlo jsem prováděl podle postupu popsáném v podkapitole 2.2. Veškeré výpočty a simulace metody Monte Carlo byly prováděny v programu MATLAB R2010a. Pro měření jsem použil odpory na dekádě $20\ \Omega$ a $500\ k\Omega$, které jsem proměřil Ohmovou metodou pro malé odpory a velké odpory. Pro každé měření odporu jsem provedl 10 opakování měření. Měření proběhlo za následujících podmínek:

Tab. 5.1: Podmínky měření

Teplota	Tlak	Vlhkost
$23^\circ\ C$	$1006\ hPa$	26 %

Během měření jsem použil přístroje, které jsou uvedeny v následující tabulce:

Tab. 5.2: Tabulka použitých měřicích přístrojů

Přístroj	Typ	Výrobní číslo	Poznámky
Ampérmetr	Agilent 34401A	MY41003303	Vnitřní odpor $R_A = 5\ \Omega$
Voltmetr	Fluke 1577	16500076	Vnitřní odpor $R_V = 10\ M\Omega$
Zdroj ss napětí	Agilent 33220A	MY44024565	

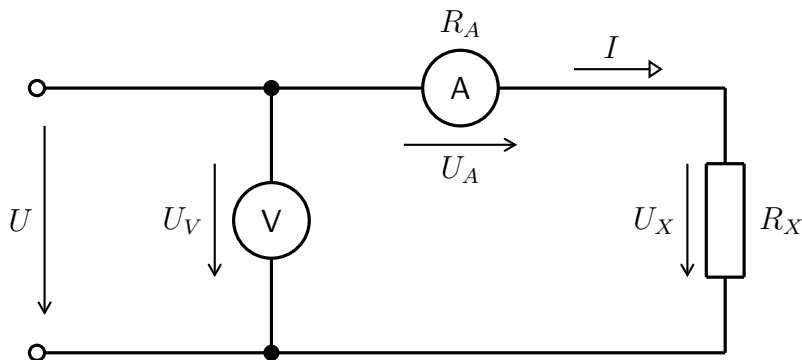
Přesnost měření stejnosměrného napětí multimetrem Fluke 1577 pro všechny rozsahy napětí je $\pm (0,2\% \text{ rdg} + 2 \text{ digit})$. Přesnosti měření stejnosměrného proudu multimetrem Agilent 34401A jsou uvedeny v následující tabulce:

Tab. 5.3: Přesnosti měření stejnosměrného proudu multimetrem Agilent 34401A

Rozsah	Přesnost $\pm(\% \text{ rdg} + \% \text{ rozsahu})$
10 mA	$0,005 + 0,010$
100 mA	$0,010 + 0,004$
1 A	$0,050 + 0,006$
3 A	$0,100 + 0,020$

5.1 Ohmova metoda pro velké odpory

Ampérmetr měří přímo proud protékající měřeným odporem R_x . Voltmetr měří úbytek napětí na odporu ampérmetru R_A a na měřeném odporu R_x .



Obr. 5.1: Ohmova metoda pro velké odpory

5.1.1 Měření odporu $500k\Omega$

Odpor vypočítaný přímo z údajů přístrojů viz. tabulka 5.4:

$$R'_{Xi} = \frac{U_V}{I} = \frac{8,98}{0,0180 \cdot 10^{-3}} = 498,889 k\Omega, \quad (5.1)$$

kde

$U_V [V]$ je údaj voltmetru a

$I [A]$ je údaj ampérmetru.

Pro skutečnou hodnotu měřeného odporu platí:

$$R_{Xi} = \frac{U_V}{I} - R_A = \frac{8,98}{0,0180 \cdot 10^{-3}} - 5 = 498,884 k\Omega, \quad (5.2)$$

kde $R_A[\Omega]$ je vnitřní odpor ampérmetru.

Odhad hodnoty měřeného odporu $\overline{R_X}$ je dán aritmetickým průměrem hodnot R_{Xi} :

$$\overline{R_X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{Xi} = \frac{1}{10} (498,884 + 498,884 + \dots + 496,680) = 498,944 k\Omega \quad (5.3)$$

Stejným způsobem se získá odhad napětí $\overline{U_V}$ a odhad proudu $\overline{I}$:

$$\overline{U_V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{Vi} = 8,986 V \quad (5.4)$$

Tab. 5.4: Naměřené hodnoty pro měřený odpor $500\text{ k}\Omega$

i	$U_V[V]$	$I[mA]$	$R'_{Xi}[k\Omega]$	$R_{Xi}[k\Omega]$
1	8,98	0,0180	498,889	498,884
2	8,98	0,0180	498,889	498,884
3	8,98	0,0179	501,676	501,671
4	8,99	0,0180	499,444	499,439
5	8,99	0,0180	499,444	499,439
6	8,99	0,0180	499,444	499,439
7	8,99	0,0181	496,685	496,480
8	8,99	0,0180	499,444	499,439
9	8,98	0,0180	498,889	498,884
10	8,99	0,0181	496,685	496,680

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = 0,0180\text{ mA} \quad (5.5)$$

Standardní nejistota typu A měření odporu se určí podle vztahu:

$$u_A(R_X) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_{Xi} - \bar{R}_X)^2} = \quad (5.6)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{90} [(498,884 - 498,944)^2 + \dots + (496,680 - 498,944)^2]} = 0,456\text{ k}\Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru Δp_U :

$$\Delta p_U = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,2 \cdot 8,986 + 0,05 \cdot 60}{100} = 0,048\text{ V} \quad (5.7)$$

Standardní nejistota typu B měření napětí u_{BU} :

$$u_{BU} = \frac{D_{max}}{\chi} = \frac{\Delta p_U}{\chi} = \frac{0,048}{\sqrt{3}} = 0,028\text{ V} \quad (5.8)$$

Absolutní chyba ampérmetru Δp_I :

$$\Delta p_I = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,005 \cdot 0,018 \cdot 10^{-3} + 0,01 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{100} = 1,001\text{ }\mu A \quad (5.9)$$

Standardní nejistota typu B měření proudu u_{BI} :

$$u_{BI} = \frac{D_{max}}{\chi} = \frac{\Delta p_I}{\chi} = \frac{1,001 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} = 0,578\text{ }\mu A \quad (5.10)$$

Standardní nejistota typu B měření odporu se určí podle vztahu:

$$u_B(R_X) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial U_V} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial I} \cdot u_{BI}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial R_A} \cdot u_{BRA}\right)^2} \quad (5.11)$$

u_{BRA} je standardní nejistota typu B vnitřního odporu ampérmetru a lze ji zanedbat.

Standardní nejistota typu B měření odporu tedy přejde do tvaru:

$$u_B(R_X) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial U_V} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial I} \cdot u_{BI}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(-\frac{U_V}{I^2} \cdot u_{BI}\right)^2} = \quad (5.12)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{0,018 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,028\right)^2 + \left(-\frac{8,986}{(0,018 \cdot 10^{-3})^2} \cdot 0,578 \cdot 10^{-6}\right)^2} = 16,106 \text{ k}\Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu:

$$u_C(R_X) = \sqrt{u_A^2(R_X) + u_B^2(R_X)} = \sqrt{(0,456 \cdot 10^3)^2 + (16,106 \cdot 10^3)^2} = 16,112 \text{ k}\Omega \quad (5.13)$$

Rozšířená nejistota měření odporu:

$$U(R_X) = k_r \cdot u_C(R_X) = 2 \cdot 16,112 \cdot 10^3 = 32,224 \text{ k}\Omega \quad (5.14)$$

5.1.2 Měření odporu 20Ω

Postup je obdobný jako při výpočtu nejistot pro měřený odpor 500 kΩ.

Podle vztahů 5.1 až 5.6 jsem vypočítal hodnoty:

$$R'_{Xi} = 26,446 \Omega$$

$$R_{Xi} = 21,446 \Omega$$

$$\overline{R_X} = 21,422 \Omega$$

$$\overline{U_V} = 3,108 \text{ V}$$

$$\overline{I} = 117,618 \text{ mA}$$

$$u_A(R_X) = 0,006 \Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru Δp_U :

$$\Delta p_U = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,2 \cdot 3,108 + 0,05 \cdot 6}{100} = 9,216 \text{ mV} \quad (5.15)$$

Tab. 5.5: Naměřené hodnoty pro měřený odpor $20\ \Omega$

i	$U_V[V]$	$I[mA]$	$R'_X[\Omega]$	$R_X[\Omega]$
1	3,110	117,596	26,446	21,446
2	3,110	117,595	26,447	21,447
3	3,108	117,618	26,425	21,425
4	3,108	117,618	26,425	21,425
5	3,108	117,617	26,425	21,425
6	3,108	117,616	26,425	21,425
7	3,107	117,615	26,417	21,417
8	3,107	117,614	26,417	21,417
9	3,107	117,613	26,417	21,417
10	3,104	117,679	26,377	21,377

Standardní nejistota měření napětí se vypočítá podle vztahu 5.8:

$$u_{BU} = 5,321\ mV$$

Absolutní chyba ampérmetru Δp_I :

$$\Delta p_I = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,05 \cdot 117,618 \cdot 10^{-3} + 0,006 \cdot 1}{100} = 118,809\ \mu A \quad (5.16)$$

Podle vztahu 5.10 se určí standardní nejistota typu B měření proudu:

$$u_{BI} = 68,594\ \mu A$$

Podle vztahů 5.11 až 5.14 se vypočítají následující nejistoty:

Standardní nejistota typu B měření odporu:

$$u_B(R_X) = 0,048\ \Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu:

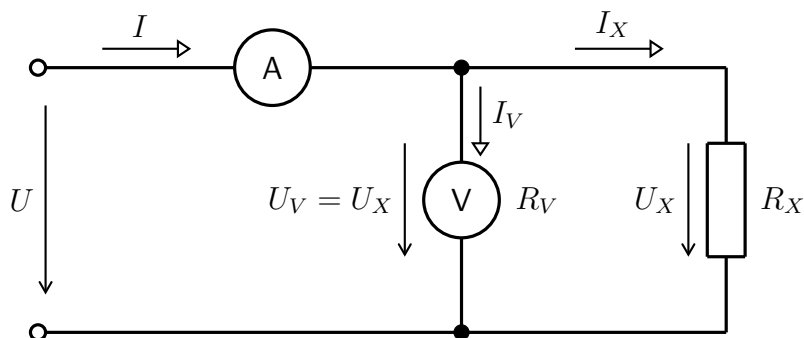
$$u_C(R_X) = 0,048\ \Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu:

$$U(R_X) = 0,096\ \Omega$$

5.2 Ohmova metoda pro malé odpory

V tomto zapojení měří voltmetr přímo napětí na měřeném odporu R_X a ampérmetr měří součet proudů protékajících voltmetrem a měřeným odporem R_X .



Obr. 5.2: Ohmova metoda pro malé odpory

5.2.1 Měření odporu 20Ω

Tab. 5.6: Naměřené hodnoty pro měřený odpor 20Ω

i	$U_V[V]$	$I[mA]$	$R'_X[\Omega]$	$R_X[\Omega]$
1	2,466	117,642	20,962	20,962
2	2,466	117,642	20,962	20,962
3	2,468	117,614	20,984	20,984
4	2,467	117,618	20,975	20,975
5	2,467	117,620	20,974	20,974
6	2,467	117,621	20,974	20,974
7	2,467	117,621	20,974	20,974
8	2,467	117,622	20,974	20,974
9	2,467	117,621	20,974	20,974
10	2,467	117,620	20,974	20,974

Odpor R'_{Xi} vypočítaný z údajů přístrojů:

$$R'_{Xi} = \frac{U_V}{I} = \frac{2,466}{117,642 \cdot 10^{-3}} = 20,962 \Omega \quad (5.17)$$

Skutečná hodnota měřeného odporu R_{Xi} :

$$R_{Xi} = \frac{U_V}{I - \frac{U_V}{R_V}} = \frac{2,466}{117,642 \cdot 10^{-3} - \frac{2,466}{10 \cdot 10^6}} = 20,962 \Omega \quad (5.18)$$

Podle vztahů 5.3 až 5.5 jsem určil odhady veličin:

$$\overline{R_X} = 20,973 \Omega$$

$$\overline{U_V} = 2,467 V$$

$$\bar{I} = 117,624 mA$$

Standardní nejistota typu A měření odporu:

Podle vztahu 5.6:

$$u_A(R_X) = 0,002 \Omega$$

Výpočet standardní nejistoty typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru Δp_U se určí podle vztahu 5.15:

$$\Delta p_U = 7,934 mV$$

Standardní nejistota typu B měření napětí se vypočítá podle vztahu 5.8:

$$u_{BU} = 4,581 mV$$

Absolutní chyba ampérmetru Δp_I podle vztahu 5.16:

$$\Delta p_I = 118,812 \mu A$$

Podle vztahu 5.10 se určí standardní nejistota typu B měření proudu:

$$u_{BI} = 68,596 \mu A$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

$$u_B(R_X) = \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial U_X} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial I} \cdot u_{BI}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial R_V} \cdot u_{BR_V}\right)^2}, \quad (5.19)$$

kde standardní nejistotu hodnoty odporu voltmetru u_{BR_V} lze zanedbat a vztah 5.19 přejde do tvaru:

$$\begin{aligned} u_B(R_X) &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial U_X} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial I} \cdot u_{BI}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{I \cdot u_{BU}}{\left(I - \frac{U_V}{R_V}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{U_V \cdot u_{BI}}{\left(I - \frac{U_V}{R_V}\right)^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{117,624 \cdot 10^{-3} \cdot 4,581 \cdot 10^{-3}}{\left(117,624 \cdot 10^{-3} - \frac{2,467}{10 \cdot 10^6}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{2,467 \cdot 68,596 \cdot 10^{-6}}{\left(117,624 \cdot 10^{-3} - \frac{2,467}{10 \cdot 10^6}\right)^2}\right)^2} = 0,041 \Omega \end{aligned} \quad (5.20)$$

Kombinovaná nejistota měření odporu se vypočítá podle vztahu 5.13:

$$u_C(R_X) = 0,041 \Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu podle vztahu 5.14:

$$U(R_X) = 0,082 \Omega$$

5.2.2 Měření odporu $500k\Omega$

Tab. 5.7: Naměřené hodnoty pro měřený odpor $500k\Omega$

i	$U_V[V]$	$I[mA]$	$R'_X[\Omega]$	$R_X[\Omega]$
1	8,980	0,0186	482,796	507,287
2	8,980	0,0186	482,796	507,287
3	8,980	0,0187	480,214	504,438
4	8,980	0,0186	482,796	507,287
5	8,980	0,0187	480,214	504,438
6	8,980	0,0187	480,214	504,438
7	8,980	0,0187	480,214	504,438
8	8,980	0,0186	482,796	507,287
9	8,980	0,0187	480,214	504,438
10	8,980	0,0188	477,660	501,620

Podle vztahů 5.17 a 5.18 jsem určil hodnoty odporů R'_{Xi} a R_{Xi} :

$$R'_{Xi} = 482,796 k\Omega$$

$$R_{Xi} = 507,287 k\Omega$$

Dále odhady veličin:

$$\overline{U_V} = 8,980 V$$

$$\overline{I} = 0,0187 mA$$

$$\overline{R_X} = 505,296 k\Omega$$

Standardní nejistota měření odporu podle vztahu 5.6:

$$u_A(R_X) = 0,606 k\Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Podle vztahů 5.7 až 5.10 jsem vypočítal tyto hodnoty:

$$\Delta p_U = 0,048 V$$

$$\Delta p_I = 1,001 \mu A$$

$$u_{BU} = 0,028 V$$

$$u_{BI} = 0,578 \mu A$$

Standardní nejistota typu B měření odporu se vypočítá podle vztahu 5.20:

$$u_B(R_X) = 16,461 \text{ k}\Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu:

$$u_C(R_X) = 16,472 \text{ k}\Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu:

$$U(R_X) = 32,944 \text{ k}\Omega$$

5.3 Ohmova metoda pro velké odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo

5.3.1 Výpočet nejistot měření odporu 20Ω

Nejprve jsem určil matematický model měření:

$$Y = f(\mathbf{X}) = \frac{X_1}{X_2} - 5 \quad (5.21)$$

Dosazením veličin se získá vztah:

$$R = \frac{U_V}{I} - 5 \quad (5.22)$$

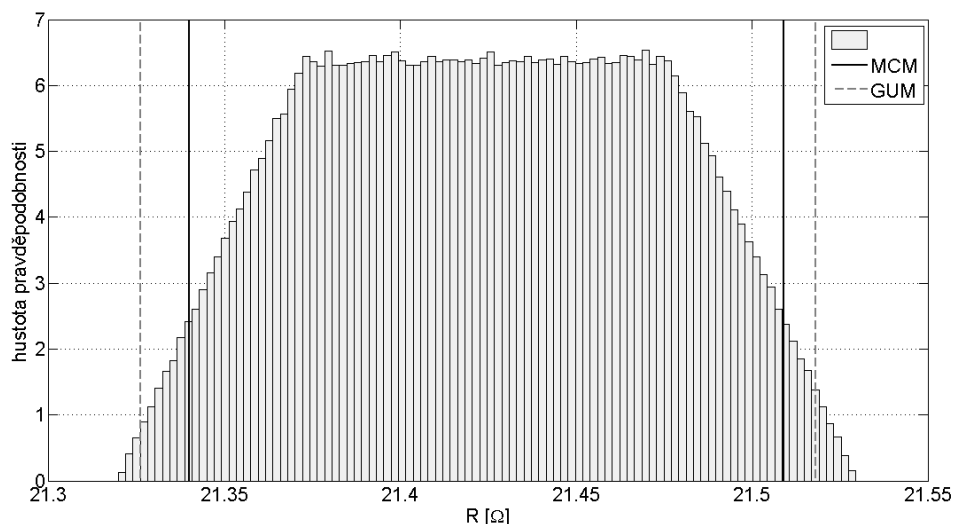
V programu MATLAB jsem generoval náhodné hodnoty napětí a proudu s rovnoměrným rozložením a hodnotami $\overline{U_V} \pm \Delta p_U$ a $\overline{I} \pm \Delta p_I$, které jsou vypočítány v podkapitole 5.1.2. Tyto jsem pak dosadil do modelu 5.22. Počet vygenerovaných čísel pro každou veličinu jsem zvolil $M = 10^6$. Model měření y_r resp. $R_r, r = 1, \dots, M$ obsahuje M hodnot. Seřazením hodnot modelu R_r do neklesajícího pořadí jsem získal diskrétní distribuční funkci G a seřazený model jsem označil jako $R_{(r)}$. Dále jsem podle vztahu 2.3 vypočítal průměrnou hodnotu $\tilde{R} = 21,425 \Omega$ a podle vztahu 2.4 přidruženou standardní nejistotu $u(R) = 0,048 \Omega$. Interval pokrytí jsem podle podkapitoly 2.2 vypočítal jako $[R_{low}, R_{high}] = [21,340 \Omega, 21,510 \Omega]$.

V tabulce 5.8 je srovnání výsledných nejistot měření odporu zjištěných klasickou metodou a metodou Monte Carlo. Pro metodu Monte Carlo vyšel 95% interval pokrytí užší než u klasické metody.

Na obrázku 5.3 je zobrazen graf hustoty pravděpodobnosti odporu R . Svislými čarami jsou naznačeny 95 % intervaly pokrytí vypočítané klasickou metodou a metodou Monte Carlo. Černá čára znázorňuje interval pokrytí získaný metodou Monte Carlo a šedá čárkovaná čára klasickou metodou.

Tab. 5.8: Srovnání metod pro odpor $20\ \Omega$ měřený Ohmovou metodou pro velké odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$21,422\ \Omega$	$0,048\ \Omega$	$[21,326\ \Omega, 21,518\ \Omega]$
MCM	10^6	$21,425\ \Omega$	$0,048\ \Omega$	$[21,340\ \Omega, 21,510\ \Omega]$



Obr. 5.3: Intervaly pokrytí při měření odporu $20\ \Omega$ Ohmovou metodou pro velké odpory

5.3.2 Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$

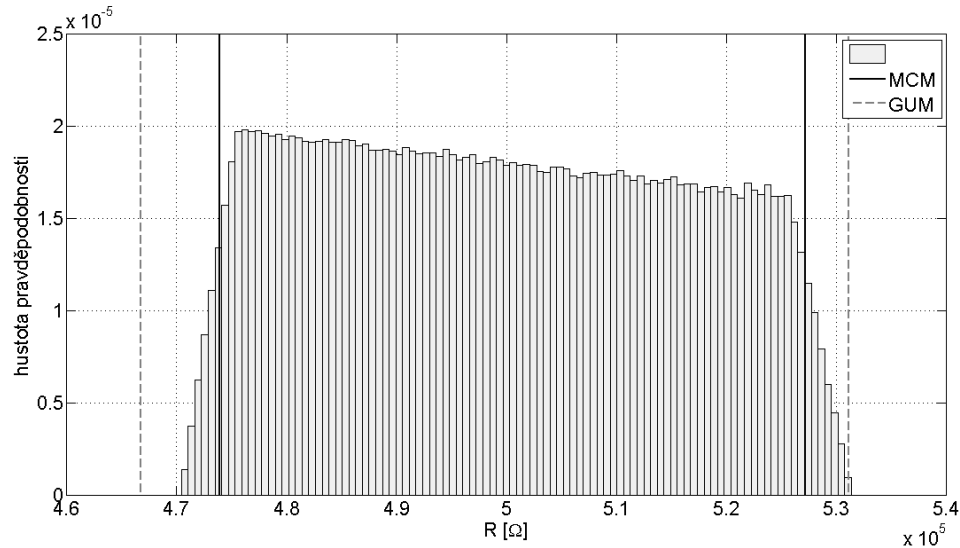
Bylo opět vygenerováno M náhodných hodnot napětí a proudu $U_V \pm \Delta p_U$ a $I \pm \Delta p_I$ podle hodnot vypočtených v podkapitole 5.1.1. Dále jsem postupoval stejně jako v předchozím příkladu. Průměrná hodnota odporu je $\tilde{R} = 499,736\text{ k}\Omega$. Dále jsem vypočítal přidruženou standardní nejistotu $u(R) = 16,132\text{ k}\Omega$. Interval pokrytí, ve kterém leží s pravděpodobností 95 % hodnota odporu je:

$$[R_{low}, R_{high}] = [473,936\text{ k}\Omega, 527,257\text{ k}\Omega]$$

V tabulce 5.9 je porovnání nejistot vypočtených klasickou metodou a metodou Monte Carlo. Na obrázku 5.4 je zobrazen graf hustoty pravděpodobnosti měřeného odporu R a intervaly pokrytí vypočtené metodou Monte Carlo a klasickou metodou.

Tab. 5.9: Srovnání metod pro odpor $500\text{ k}\Omega$ měřený Ohmovou metodou pro velké odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$498,944\text{ k}\Omega$	$16,112\text{ k}\Omega$	$[466,720\text{ k}\Omega, 531,168\text{ k}\Omega]$
MCM	10^6	$499,736\text{ k}\Omega$	$16,132\text{ k}\Omega$	$[473,936\text{ k}\Omega, 527,257\text{ k}\Omega]$



Obr. 5.4: Intervaly pokrytí při měření odporu $500\text{ k}\Omega$ Ohmovou metodou pro velké odpory

5.4 Ohmova metoda pro malé odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo

5.4.1 Výpočet nejistot měření odporu 20Ω

Matematický model měření:

$$R = \frac{U_V}{I - \frac{U_V}{R_V}} = \frac{U_V}{I - \frac{U_V}{10\text{ M}\Omega}} \quad (5.23)$$

Bylo vygenerováno M hodnot napětí a proudu $U_V \pm \Delta p_U$ a $I \pm \Delta p_I$, jejichž hodnoty jsou vypočítány v podkapitole 5.2.1. Dále je postup obdobný jako v podkapitole 5.3.1. Vypočítaná průměrná hodnota odporu je $\tilde{R} = 20,974\Omega$ a přidružená standardní nejistota $u(R) = 0,041\Omega$. Interval pokrytí vychází:

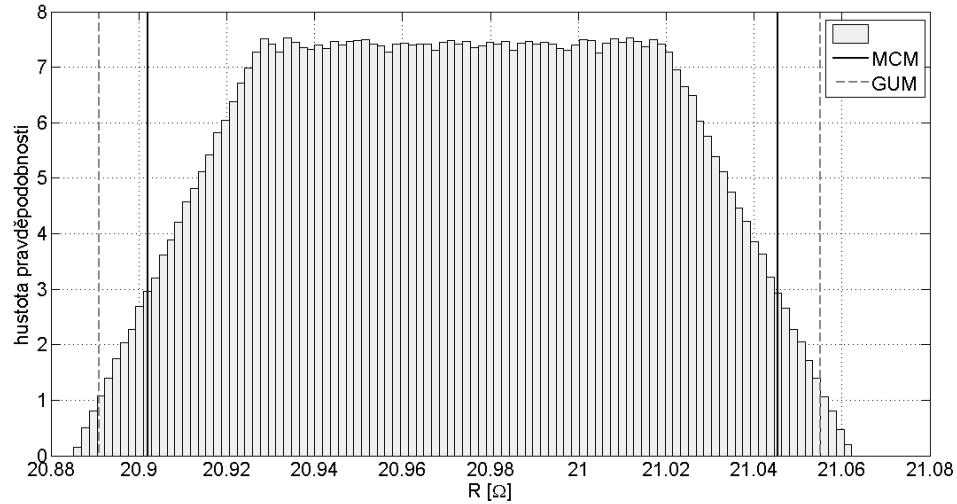
$$[R_{low}, R_{high}] = [20,902\Omega, 21,046\Omega]$$

V tabulce 5.10 je zobrazeno srovnání metod výpočtu nejistoty měření odporu Ohmovou metodou pro malé odpory. Interval pokrytí vychází metodou Monte Carlo opět užší než u klasické metody.

Tab. 5.10: Srovnání metod pro odpor $20\ \Omega$ měřený Ohmovou metodou pro malé odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$20,973\ \Omega$	$0,041\ \Omega$	$[20,891\ \Omega, 21,055\ \Omega]$
MCM	10^6	$20,974\ \Omega$	$0,041\ \Omega$	$[20,902\ \Omega, 21,046\ \Omega]$

Na obrázku 5.5 je zobrazen graf hustoty pravděpodobnosti měřeného odporu R . Intervaly pokrytí jsou pro obě metody znázorněny svislými čarami.



Obr. 5.5: Intervaly pokrytí při měření odporu $20\ \Omega$ Ohmovou metodou pro malé odpory

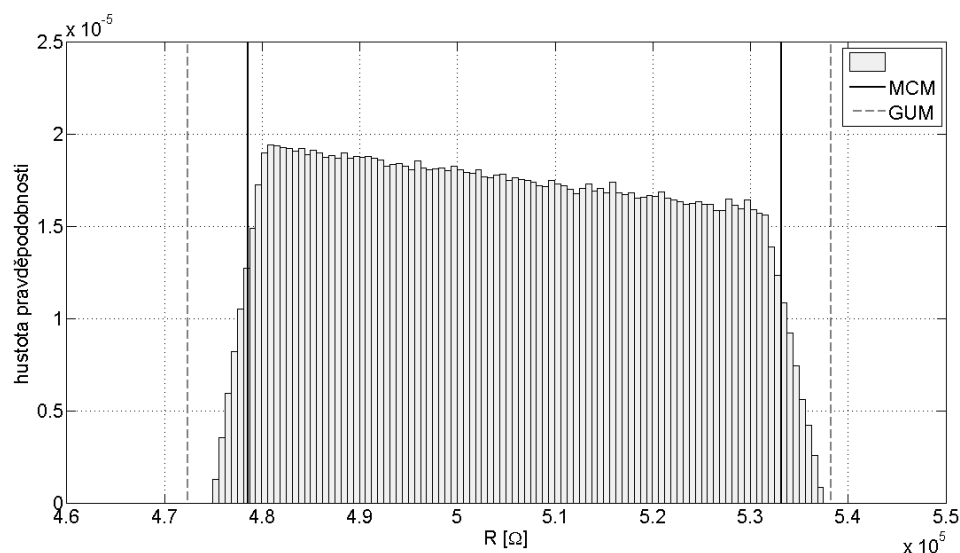
5.4.2 Výpočet nejistot měření odporu $500\text{k}\Omega$

Matematický model měření je stejný jako v podkapitole 5.4.1. Bylo vygenerováno M hodnot napětí a proudu a dosazeno do modelu měření. Průměrná hodnota vychází $\tilde{R} = 504,974\text{k}\Omega$. Standardní přidružená nejistota je $u(R) = 16,489\text{k}\Omega$. Interval pokrytí $[R_{low}, R_{high}] = [478,594\text{k}\Omega, 533,140\text{k}\Omega]$.

V tabulce 5.11 je srovnání obou metod pro měřený odpor $500\text{k}\Omega$ Ohmovou metodou pro malé odpory. V grafu 5.6 jsou zobrazeny intervaly pokrytí vypočtené klasickou metodou a metodou Monte Carlo.

Tab. 5.11: Srovnání metod pro odpor $500\text{ k}\Omega$ měřený Ohmovou metodou pro malé odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$505,296\text{ k}\Omega$	$16,461\text{ k}\Omega$	$[472,352\text{ k}\Omega, 538,240\text{ k}\Omega]$
MCM	10^6	$504,974\text{ k}\Omega$	$16,489\text{ k}\Omega$	$[478,594\text{ k}\Omega, 533,140\text{ k}\Omega]$



Obr. 5.6: Intervaly pokrytí při měření odporu $500\text{ k}\Omega$ Ohmovou metodou pro malé odpory

5.5 Porovnání vypočtených nejistot klasickou numerickou metodou a metodou Monte Carlo v závislosti na metodě měření

V tabulce 5.12 se nachází shrnutí výsledků nejistot měření odporu. Jak je z tabulky patrné, v zapojení pro velké odpory při měření odporu $500\text{ k}\Omega$ je standardní přidružená nejistota měření odporu menší než v zapojení pro malé odpory. To potvrzuje, že zapojení pro velké odpory je přesnější pro větší hodnoty odporů ($R_X \gg R_A$). Taktéž v zapojení pro malé odpory při měření odporu $20\text{ }\Omega$ je standardní přidružená nejistota měření odporu menší než v zapojení pro velké odpory. Toto platí jak pro klasickou numerickou metodu, tak pro metodu Monte Carlo. U všech měřených odporů vyšel odhad měřeného odporu R rozdílně. Standardní přidružená nejistota měření odporu vypočítaná metodou Monte Carlo vyšla u odporu $20\text{ }\Omega$ shodně s nejistotou vypočítanou numerickou metodou. U odporu $500\text{ k}\Omega$ vyšla standardní při-

Tab. 5.12: Shrnutí výsledných nejistot nepřímého měření odporu Ohmovou metodou v závislosti na použitých přístrojích

Zapojení	Měřený odpor	Metoda	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
pro velké R	$20\ \Omega$	GUF	$21,422\ \Omega$	$0,048\ \Omega$	$[21,326\ \Omega, 21,518\ \Omega]$
		MCM	$21,425\ \Omega$	$0,048\ \Omega$	$[21,340\ \Omega, 21,510\ \Omega]$
	$500\ k\Omega$	GUF	$498,944\ k\Omega$	$16,112\ k\Omega$	$[466,720\ k\Omega, 531,168\ k\Omega]$
		MCM	$499,736\ k\Omega$	$16,132\ k\Omega$	$[473,936\ k\Omega, 527,257\ k\Omega]$
pro malé R	$20\ \Omega$	GUF	$20,973\ \Omega$	$0,041\ \Omega$	$[20,891\ \Omega, 21,055\ \Omega]$
		MCM	$20,974\ \Omega$	$0,041\ \Omega$	$[20,902\ \Omega, 21,046\ \Omega]$
	$500\ k\Omega$	GUF	$505,296\ k\Omega$	$16,461\ k\Omega$	$[472,352\ k\Omega, 538,240\ k\Omega]$
		MCM	$504,974\ k\Omega$	$16,489\ k\Omega$	$[478,594\ k\Omega, 533,140\ k\Omega]$

družená nejistota vypočítaná metodou Monte Carlo větší než u klasické numerické metody. Avšak interval pokrytí, ve kterém se měřený odpor nachází z 95-ti % pravděpodobností, vyšel u metody Monte Carlo pro všechny měření užší než u klasické numerické metody.

6 NEPŘÍMÉ MĚŘENÍ ODPORU OHMOVOU METODOU - VLIV PŘESNOSTI POUŽITÝCH PŘÍSTROJŮ

V této kapitole budu posuzovat vliv přesnosti použitých přístrojů na velikost nejistoty nepřímého měření odporu. Záměrně jsem použil pro porovnání přesné číslicové přístroje a méně přesné analogové přístroje. Stejně jako v kapitole 5 budu porovnávat výsledné nejistoty vypočtené numericky a metodou Monte Carlo. Pro měření jsem použil odpory na přípravku $500\text{ k}\Omega$. Měření proběhlo za následujících podmínek:

Tab. 6.1: Podmínky měření

Teplota	Tlak	Vlhkost
24° C	1013 hPa	46 %

V tabulce 6.2 jsou uvedeny použité přístroje:

Tab. 6.2: Tabulka použitých měřicích přístrojů

Přístroj	Typ	Výrobní číslo	Poznámky
Číslicový ampérmetr	Agilent 34401A	MY41002148	Vnitřní odpor $R_A = 5\ \Omega$
Číslicový voltmetr	HP 34401A	3146A40438	Vnitřní odpor $R_V = 10\text{ M}\Omega$
Analogový ampérmetr	DU-20	DKP 2036	$\delta_{TP} = 1\%$
Analogový voltmetr	DU-20	DKP 1728	$\delta_{TP} = 1\%$
Zdroj ss napětí	Agilent 33220A	MY44024565	

Přesnost měření stejnosměrného napětí multimetrem HP 34401A jsou uvedeny v tabulce 6.3.

Tab. 6.3: Přesnosti měření stejnosměrného napětí multimetrem HP 34401A

Rozsah	Přesnost $\pm(\%\text{ rdg} + \%\text{ rozsahu})$
100 mV	$0,0030 + 0,0003$
1 V	$0,0020 + 0,0006$
10 V	$0,0015 + 0,0004$
100 V	$0,0020 + 0,0006$
1000 V	$0,0020 + 0,0006$

Přesnosti měření stejnosměrného proudu multimetrem Agilent 34401A jsem již uvedl v tabulce 5.3. Třída přesnosti přístrojů DU-20 je 1.

6.1 Ohmova metoda pro velké odpory

6.1.1 Měření odporu $500k\Omega$ číslicovými přístroji

Číslicovými přístroji jsem naměřil následující hodnoty:

$$U_V = 8,988 V$$

$$I = 0,018 mA$$

Podle vztahů 5.1 a 5.2 jsem dále vypočítal odpor z údajů přístrojů a skutečnou hodnotu odporu:

$$R'_X = 499,333 k\Omega$$

$$R_X = 499,328 k\Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru Δp_U :

$$\Delta p_U = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,0015 \cdot 8,988 + 0,0004 \cdot 10}{100} = 0,175 mV \quad (6.1)$$

Standardní nejistota typu B měření napětí u_{BU} :

$$u_{BU} = \frac{D_{max}}{\chi} = \frac{\Delta p_U}{\chi} = \frac{0,175 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3}} = 0,101 mV \quad (6.2)$$

Absolutní chyba ampérmetru Δp_I :

$$\Delta p_I = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,005 \cdot 0,018 \cdot 10^{-3} + 0,010 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{100} = 1,001 \mu A \quad (6.3)$$

Standardní nejistota typu B měření proudu u_{BI} :

$$u_{BI} = \frac{D_{max}}{\chi} = \frac{\Delta p_I}{\chi} = \frac{1,001 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} = 0,578 \mu A \quad (6.4)$$

Standardní nejistota typu B měření odporu se vypočítá podle vztahu 5.12:

$$u_B(R_X) = 16,034 k\Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu:

Jelikož jsem zanedbal standardní nejistotu typu A, kombinovaná nejistota měření odporu bude rovna standardní nejistotě typu B měření odporu.

$$u_C(R_X) = u_B(R_X) = 16,034 \text{ k}\Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu se určí podle vztahu 5.14:

$$U(R_X) = 32,068 \text{ k}\Omega$$

6.1.2 Měření odporu 500k Ω analogovými přístroji

Analogové přístroje udávali následující údaje:

$$U_V = 9 \text{ V}$$

$$I = 18 \mu\text{A}$$

Jelikož výrobce neudává vnitřní odpor přístroje při měření proudu, změřil jsem tento odpor multimetrem Agilent 34401A s přesností:
 $\pm(0,0020 \% \text{ rdg} + 0,0005 \% \text{ rozsahu})$.

$$R_A = 0,619 \text{ k}\Omega$$

Odpor z údajů přístrojů a skutečnou hodnotu odporu jsem vypočítal ze vztahů 5.1 a 5.2:

$$R'_X = 500 \text{ k}\Omega$$

$$R_X = 499,381 \text{ k}\Omega$$

Standardní nejistota měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru se vypočítá podle vztahu:

$$\Delta p_U = \frac{\delta_{TP} \cdot X_R}{100} = \frac{1 \cdot 10}{100} = 0,1 \text{ V} \quad (6.5)$$

Standardní nejistota typu B měření napětí u_{BU} :

$$u_{BU} = 0,058 \text{ V}$$

Absolutní chyba ampérmetru se vypočítá podle vztahu:

$$\Delta p_I = \frac{\delta_{TP} \cdot X_R}{100} = \frac{1 \cdot 300 \cdot 10^{-6}}{100} = 3 \mu\text{A} \quad (6.6)$$

Standardní nejistota typu B měření proudu u_{BI} :

$$u_{BI} = 1,732 \mu\text{A}$$

Absolutní chyba při měření vnitřního odporu ampérmetru:

$$\Delta p_{R_A} = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,0020 \cdot 0,619 \cdot 10^3 + 0,0005 \cdot 1 \cdot 10^3}{100} = 0,017 \Omega \quad (6.7)$$

Standardní nejistota typu B měření vnitřního odporu ampérmetru:

$$u_{B_{R_A}} = 0,010 \Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu se vypočítá podle vztahu:

$$\begin{aligned} u_B(R_X) &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial U_V} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial I} \cdot u_{BI}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial R_A} \cdot u_{B_{R_A}}\right)^2} = \quad (6.8) \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(-\frac{U_V}{I^2} \cdot u_{BI}\right)^2 + u_{B_{R_A}}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{18 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,058\right)^2 + \left(-\frac{9}{(18 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 1,732 \cdot 10^{-6}\right)^2 + 0,010^2} = \\ &= 48,219 k\Omega \end{aligned}$$

Kombinovaná nejistota měření odporu:

$$u_C(R_X) = u_B(R_X) = 48,219 k\Omega$$

Rozšířená standardní nejistota měření odporu:

$$U(R_X) = 96,438 k\Omega$$

6.2 Ohmova metoda pro malé odpory

6.2.1 Měření odporu 500kΩ číslicovými přístroji

Číslicovými přístroji byly naměřeny následující hodnoty:

$$U_V = 8,986 V$$

$$I = 0,019 mA$$

Odpor vypočítaný přímo z údajů přístrojů a skutečnou hodnotu měřeného odporu jsem určil podle vztahů 5.17 a 5.18:

$$R'_X = 472,947 k\Omega$$

$$R_X = 496,426 \text{ k}\Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru Δp_U podle vztahu 6.1:

$$\Delta p_U = 0,175 \text{ mV}$$

Standardní nejistota typu B měření napětí u_{BU} podle vztahu 6.2:

$$u_{BU} = 0,101 \text{ mV}$$

Absolutní chyba ampérmetru Δp_I podle vztahu 6.3:

$$\Delta p_I = 1,001 \text{ }\mu\text{A}$$

Standardní nejistota typu B měření proudu u_{BI} podle vztahu 6.4:

$$u_{BI} = 0,578 \text{ }\mu\text{A}$$

Standardní nejistota typu B měření odporu se vypočítá podle vztahu 5.20:

$$u_B(R_X) = 15,851 \text{ k}\Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu je rovna standardní nejistotě typu B měření odporu:

$$u_C(R_X) = u_B(R_X) = 15,851 \text{ k}\Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu podle vztahu 5.14:

$$U(R_X) = 31,702 \text{ k}\Omega$$

6.2.2 Měření odporu 500k Ω analogovými přístroji

Analogovými přístroji byly naměřeny následující hodnoty:

$$U_V = 9 \text{ V}$$

$$I = 36 \text{ }\mu\text{A}$$

Pro rozsah 10 V udává výrobce velikost vnitřního odporu 0,5 M Ω

Odpor vypočítaný přímo z údajů přístrojů a skutečnou hodnotu měřeného odporu jsem vypočítal podle vztahů 5.17 a 5.18:

$$R'_X = 250 \text{ k}\Omega$$

$$R_X = 500 \text{ k}\Omega$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru se vypočítá podle vztahu 6.5:

$$\Delta p_U = 0,1 \text{ V}$$

Nejistota typu B měření napětí:

$$u_{BU} = 0,058 \text{ V}$$

Absolutní chyba ampérmetru se vypočítá podle vztahu 6.6:

$$\Delta p_I = 3 \mu\text{A}$$

Nejistota typu B měření proudu:

$$u_{BI} = 1,732 \mu\text{A}$$

Standardní nejistota typu B měření odporu se vypočítá podle vztahu 5.20:

$$u_B(R_X) = 48,541 \text{ k}\Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu:

$$u_C(R_X) = u_B(R_X) = 48,541 \text{ k}\Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu:

$$U(R_X) = 97,082 \text{ k}\Omega$$

6.3 Ohmova metoda pro velké odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo

6.3.1 Výpočet nejistot měření odporu 500kΩ číslicovými přístroji

V programu MATLAB jsem vygeneroval M náhodných hodnot napětí a proudů v rozmezí $U_V \pm \Delta p_U$ a $I \pm \Delta p_I$ vypočítaných v podkapitole 6.1.1. Tyto hodnoty jsem dosadil do modelu měření měření 5.22. Dále jsem postupoval stejně jako v předchozí kapitole. Průměrná hodnota odporu vyšla $\tilde{R} = 499,846 \text{ k}\Omega$. Dále podle postupu jsem

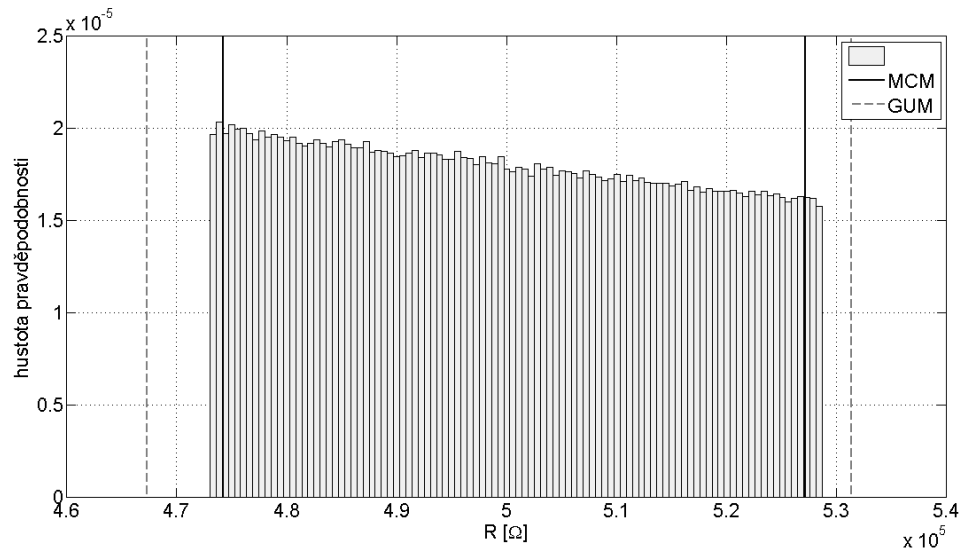
vypočítal přidruženou standardní nejistotu $u(R) = 16,064 \text{ k}\Omega$. Interval pokrytí, ve kterém leží výsledný odpor s pravděpodobností 95 %, vyšel:

$$[R_{low}, R_{high}] = [474,265 \text{ k}\Omega, 527,178 \text{ k}\Omega]$$

Tab. 6.4: Srovnání metod pro odpor $500 \text{ k}\Omega$ měřený číslicovými přístroji Ohmovou metodou pro velké odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$499,328 \text{ k}\Omega$	$16,034 \text{ k}\Omega$	$[467,260 \text{ k}\Omega, 531,396 \text{ k}\Omega]$
MCM	10^6	$499,846 \text{ k}\Omega$	$16,064 \text{ k}\Omega$	$[474,265 \text{ k}\Omega, 527,178 \text{ k}\Omega]$

V tabulce 6.4 se nachází srovnání výsledků zjištěných metodou Monte Carlo a klasickou numerickou metodou.



Obr. 6.1: Intervaly pokrytí při měření odporu $500 \text{ k}\Omega$ číslicovými přístroji Ohmovou metodou pro velké odpory

Na obrázku 6.1 se nachází graf hustoty pravděpodobnosti odporu R . Svislými čarami jsou znázorněny intervaly pokrytí, ve kterých se nachází výsledný odpor s pravděpodobností 95 %. Černé čáry znázorňují intervaly pokrytí vypočtené metodou Monte Carlo a šedé čarkované klasickou numerickou metodou.

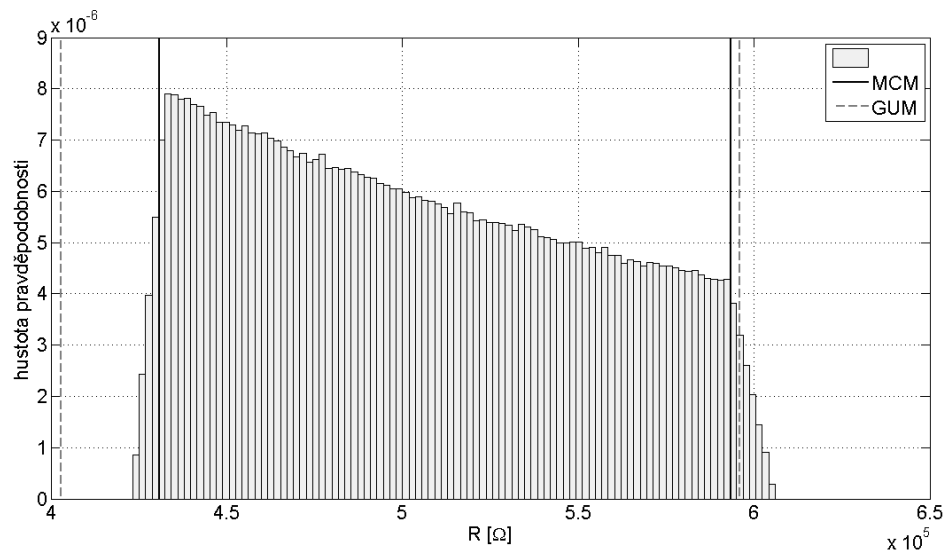
6.3.2 Výpočet nejistot měření odporu 500kΩ analogovými přístroji

Nejprve jsem vygeneroval náhodné hodnoty napětí a proudů $U_V \pm \Delta p_U$ a $I \pm \Delta p_I$, podle hodnoty vypočtených v podkapitole 6.1.2. Jelikož jsem vnitřní odpor ampérmetru DU-20 změřil pro daný rozsah multimetrem HP 34401A. Výsledná hodnota vnitřního odporu byla $R_A = (619,000 \pm 0,017) \Omega$. Proto jsem tedy tyto náhodné hodnoty napětí, proudu a vnitřního odporu dosadil do modelu:

$$R = \frac{U_V}{I} - R_A \quad (6.9)$$

Tab. 6.5: Srovnání metod pro odpor 500 kΩ měřený analogovými přístroji Ohmovou metodou pro velké odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		499,381 kΩ	48,219 kΩ	[402,943 kΩ, 595,819 kΩ]
MCM	10^6	504,095 kΩ	49,205 kΩ	[430,834 kΩ, 593,448 kΩ]



Obr. 6.2: Intervaly pokrytí při měření odporu 500 kΩ analogovými přístroji Ohmovou metodou pro velké odpory

Dále je postup stejný jako v předchozích kapitolách. Výsledná průměrná hodnota odporu vyšla $\tilde{R} = 504,095 \text{ k}\Omega$ a přidružená standardní nejistota $u(R) = 49,205 \text{ k}\Omega$. Interval pokrytí, ve kterém výsledný odpor leží s pravděpodobností 95%, je:

$$[R_{low}, R_{high}] = [430,834 \text{ k}\Omega, 593,448 \text{ k}\Omega]$$

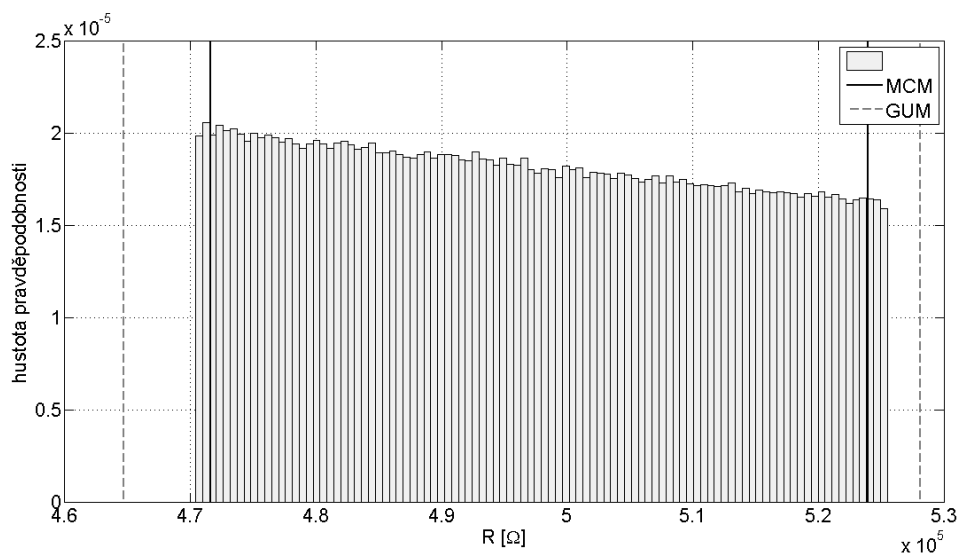
V tabulce 6.5 se nacházejí hodnoty vypočtené metodou Monte Carlo a klasickou numerickou metodou. Na obrázku 6.2 je graf hustoty pravděpodobnosti odporu R . Intervaly pokrytí jsou znázorněny svislými čarami.

6.4 Ohmova metoda pro malé odpory - výpočet nejistot měření odporu pomocí metody Monte Carlo

6.4.1 Výpočet nejistot měření odporu 500k Ω číslicovými přístroji

Matematický model měření je obdobný jako model v podkapitole 5.4.1. Opět bylo vygenerováno M náhodných hodnot napětí a proudu v rozsahu $U_V \pm \Delta p_U$ a $I \pm \Delta p_I$, tyto hodnoty byly vypočteny v podkapitole 6.2.1. Průměrná hodnota vychází $\tilde{R} = 496,934 \text{ k}\Omega$ a přidružená standardní nejistota $u(R) = 15,880 \text{ k}\Omega$. Dále jsem vypočítal interval pokrytí:

$$[R_{low}, R_{high}] = [471,640 \text{ k}\Omega, 523,950 \text{ k}\Omega]$$



Obr. 6.3: Intervaly pokrytí při měření odporu 500 k Ω číslicovými přístroji Ohmovou metodou pro malé odpory

Na obrázku 6.3 se nachází interval pokrytí měřeného odporu. Opět jsou svislými čarami znázorněny intervaly pokrytí vypočtené podle obou metod. V tabulce 6.6 jsou

uvedeny výsledné hodnoty vypočtené metodou Monte Carlo i klasickou numerickou metodou.

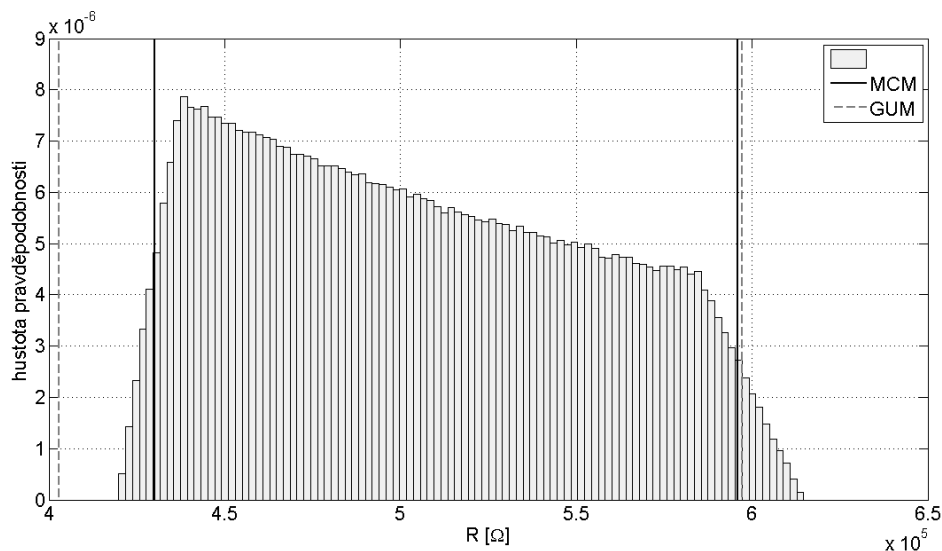
Tab. 6.6: Srovnání metod pro odpor $500\text{ k}\Omega$ měřený číslicovými přístroji Ohmovou metodou pro malé odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$496,426\text{ k}\Omega$	$15,851\text{ k}\Omega$	$[464,724\text{ k}\Omega, 528,128\text{ k}\Omega]$
MCM	10^6	$496,934\text{ k}\Omega$	$15,880\text{ k}\Omega$	$[471,640\text{ k}\Omega, 523,950\text{ k}\Omega]$

6.4.2 Výpočet nejistot měření odporu $500\text{ k}\Omega$ analogovými přístroji

Podle hodnot vypočítaných v podkapitole 6.2.2 jsem vygeneroval M hodnot napětí a proudu a dosadil do modelu měření 5.4.1. Rozdíl oproti tomuto modelu je však ve velikosti vnitřního odporu voltmetru, výrobce zde udává hodnotu $R_V = 0,5\text{ M}\Omega$. Průměrná hodnota odporu vyšla metodou Monte Carlo $\tilde{R} = 504,760\text{ k}\Omega$. Hodnota přidružené standardní nejistoty je $49,548\text{ k}\Omega$ a interval pokrytí:

$$[R_{low}, R_{high}] = [430,122\text{ k}\Omega, 595,976\text{ k}\Omega]$$



Obr. 6.4: Intervaly pokrytí při měření odporu $500\text{ k}\Omega$ analogovými přístroji Ohmovou metodou pro malé odpory

Na obrázku 6.4 se nachází graf hustoty pravděpodobnosti měřeného odporu, opět jsou zde intervaly pokrytí vyznačeny svislými čarami. V tabulce 6.7 jsou hodnoty vypočtené klasickou numerickou metodou a také metodou Monte Carlo.

Tab. 6.7: Srovnání metod pro odpor $500\text{ k}\Omega$ měřený analogovými přístroji Ohmovou metodou pro malé odpory

Metoda	M	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
GUF		$500,000\text{ k}\Omega$	$48,541\text{ k}\Omega$	$[402,918\text{ k}\Omega, 597,082\text{ k}\Omega]$
MCM	10^6	$504,760\text{ k}\Omega$	$49,548\text{ k}\Omega$	$[430,122\text{ k}\Omega, 595,976\text{ k}\Omega]$

6.5 Porovnání vypočtených nejistot klasickou numerickou metodou a metodou Monte Carlo v závislosti na přesnosti přístrojů

Tab. 6.8: Shrnutí výsledných nejistot nepřímého měření odporu $500\text{ k}\Omega$ Ohmovou metodou v závislosti na použitých přístrojích

Zapojení	Přístroje	Metoda	R	$u(R)$	95% interval pokrytí
pro velké R	číslicové	GUF	$499,328\text{ k}\Omega$	$16,034\text{ k}\Omega$	$[467,260\text{ k}\Omega, 531,396\text{ k}\Omega]$
		MCM	$499,846\text{ k}\Omega$	$16,064\text{ k}\Omega$	$[474,265\text{ k}\Omega, 527,178\text{ k}\Omega]$
	analogové	GUF	$499,381\text{ k}\Omega$	$48,219\text{ k}\Omega$	$[402,943\text{ k}\Omega, 595,819\text{ k}\Omega]$
		MCM	$504,095\text{ k}\Omega$	$49,205\text{ k}\Omega$	$[430,834\text{ k}\Omega, 593,448\text{ k}\Omega]$
pro malé R	číslicové	GUF	$496,426\text{ k}\Omega$	$15,851\text{ k}\Omega$	$[464,724\text{ k}\Omega, 528,128\text{ k}\Omega]$
		MCM	$496,934\text{ k}\Omega$	$15,880\text{ k}\Omega$	$[471,640\text{ k}\Omega, 523,950\text{ k}\Omega]$
	analogové	GUF	$500,000\text{ k}\Omega$	$48,541\text{ k}\Omega$	$[402,918\text{ k}\Omega, 597,082\text{ k}\Omega]$
		MCM	$504,760\text{ k}\Omega$	$49,548\text{ k}\Omega$	$[430,122\text{ k}\Omega, 595,976\text{ k}\Omega]$

V tabulce 6.8 se nachází shrnutí nejdůležitějších hodnot vypočtených v kapitole 6. Jako méně přesné přístroje jsem vybral analogové přístroje DU-20 od firmy Metra Blansko. Zástupce přesných přístrojů jsem použil číslicové multimetry Agilent 34401A a HP 34401A. Z tabulky si lze všimnout obrovský rozdíl mezi standardní přidruženou nejistotou odporu změřenou číslicovými přístroji a analogovými. Standardní přidružená nejistota při měření analogovými přístroji je přibližně třikrát větší

než při měření číslicovými přístroji. To lze přisoudit velké mezní absolutní chybě analogových přístrojů. Například přístroj DU-20 měřil napětí s chybou $\Delta p_U = 0,1 V$, kdežto číslicový přístroj s chybou $\Delta p_U = 0,175 mV$. Intervaly pokrytí vypočítané metodou Monte Carlo vyšly opět užší než u numerické metody. Tyto intervaly se vždy překrývají, z toho lze usoudit, že obě metody jsou kompatibilní.

7 NEPŘÍMÉ MĚŘENÍ ODPORU OHMOVOU METODOU - VLIV TEPLoty

V této kapitole jsem posuzoval vliv teploty na velikosti odporu snímače teploty Pt1000 od firmy ifm electronic s označením TT1150 [16]. Záměrně jsem použil místo klasického rezistoru čidlo teploty, protože odpor snímače teploty se s teplotou mění výrazněji než u klasického rezistoru. Odpor čidla jsem proměřil pro teplotu $t = 100^\circ C$, dále jsem vypočítal velikost odporu při nulové teplotě a jeho nejistotu. Pro zahřátí čidla na teplotu $100^\circ C$ byl použit teplotní kalibrátor od firmy AMETEK typ Jofra ETC - 125A. Přístroj měří teplotu uvnitř zaváděcího otvoru, ve kterém čidlo bylo uloženo, s přesností $\pm 0,5^\circ C$. V tomto měření jsem použil pouze Ohmovu metodu pro malé odpory. Měření proběhlo za následujících podmínek:

Tab. 7.1: Podmínky měření

Teplota	Tlak	Vlhkost
$24^\circ C$	$1018 hPa$	43 %

V tabulce 7.2 jsou uvedeny použité přístroje.

Tab. 7.2: Tabulka použitých měřicích přístrojů

Přístroj	Typ	Výrobní číslo	Poznámky
Číslicový ampérmetr	Agilent 34401A	MY41002148	
Číslicový voltmetr	Fluke 1577	16500076	$R_V = 10 M\Omega$
Teplotní kalibrátor AMETEK	Jofra ETC - 125A	581461-00590	
Laboratorní zdroj	STATRON 2223 D	1000057342	

Přesnosti použitých přístrojů se nacházejí na začátku kapitoly 5.

7.1 Výpočet nejistoty měření teplotního čidla Pt1000 v závislosti na teplotě

Podle vztahu 3.4 jsem sestavil vztah pro výpočet odporu při nulové teplotě:

$$R_0 = \frac{R}{1 + A \cdot t + B \cdot t^2} = \frac{\frac{U_V}{I - \frac{U_V}{R_V}}}{1 + A \cdot t + B \cdot t^2} = \frac{U_V \cdot R_V}{(R_V \cdot I - U_V) \cdot (1 + A \cdot t + B \cdot t^2)} \quad (7.1)$$

Byly naměřeny následující hodnoty:

$$U_V = 9,790 \text{ V}$$

$$I = 6,928 \text{ mA}$$

$$t = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Hodnotu odporu při teplotě $100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ jsem určil podle vztahu:

$$R = \frac{U_V}{I - \frac{U_V}{R_V}} = \frac{9,790}{6,928 \cdot 10^{-3} - \frac{9,790}{10 \cdot 10^6}} = 1413,306 \Omega \quad (7.2)$$

Podle vztahu 7.1 jsem vypočítal hodnotu odporu čidla při nulové teplotě:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{U_V \cdot R_V}{(R_V \cdot I - U_V) \cdot (1 + A \cdot t + B \cdot t^2)} = \\ &= \frac{9,790 \cdot 10 \cdot 10^6}{(10 \cdot 10^6 \cdot 6,928 \cdot 10^{-3} - 9,790) \cdot (1 + 3,9083 \cdot 10^{-3} \cdot 100 - 5,775 \cdot 10^{-7} \cdot 100^2)} \\ &= 1020,397 \Omega \end{aligned} \quad (7.3)$$

Standardní nejistota typu B měření odporu:

Absolutní chyba voltmetru Δp_U :

$$\Delta p_U = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,2 \cdot 9,790 + 0,05 \cdot 60}{100} = 0,050 \text{ V} \quad (7.4)$$

Standardní nejistota typu B měření napětí:

$$u_{BU} = 0,029 \text{ V}$$

Absolutní chyba ampérmetru Δp_I :

$$\Delta p_U = \frac{\delta_M X_M + \delta_R X_R}{100} = \frac{0,005 \cdot 6,928 \cdot 10^{-3} + 0,010 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{100} = 1,346 \mu\text{A} \quad (7.5)$$

Standardní nejistota typu B měření proudu:

$$u_{BI} = 0,777 \mu\text{A}$$

Absolutní chyba měření teploty:

$$\Delta p_t = 0,500 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Standardní nejistota typu B měření teploty:

$$u_{Bt} = 0,289 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Standardní nejistota typu B měření odporu při zanedbání standardní nejistoty vnitřního odporu voltmetru:

$$\begin{aligned}
 u_B(R_0) &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_0}{\partial U_V} \cdot u_{BU}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_0}{\partial I} \cdot u_{BI}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_0}{\partial t} \cdot u_{Bt}\right)^2} \quad (7.6) \\
 &= \sqrt{\left(\frac{I \cdot u_{BU}}{\left(\frac{U_V}{R_V} - I\right)^2(1 + At + Bt^2)}\right)^2 + \left(\frac{U_V \cdot u_{BI}}{\left(\frac{U_V}{R_V} - I\right)^2(1 + At + Bt^2)}\right)^2 +} \\
 &\quad + \left(\frac{(A + 2Bt) \cdot u_{Bt}}{\left(\frac{1}{R_V} - \frac{I}{U_V}\right)(1 + At + Bt^2)^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Při dosazení vypočtených hodnot do vztahu 7.6 vychází standardní nejistota typu B měření odporu:

$$u_B(R_0) = 3,131 \, \Omega$$

Kombinovaná nejistota měření odporu se rovná standardní nejistotě typu B měření odporu:

$$u_C(R_0) = 3,131 \, \Omega$$

Rozšířená nejistota měření odporu:

$$U(R_0) = 6,262 \, \Omega$$

7.2 Výpočet nejistoty měření teplotního čidla Pt1000 v závislosti na teplotě pomocí metody Monte Carlo

V programu MATLAB jsem vygeneroval M náhodných hodnot napětí $U_V \pm \Delta p_U$, proudu $I \pm \Delta p_I$ a teploty $t \pm \Delta p_t$. Tyto hodnoty jsou vypočítané v předchozí podkapitole. Následně byly hodnoty dosazeny do modelu měření:

$$R_0 = \frac{U_V \cdot R_V}{(R_V \cdot I - U_V) \cdot (1 + A \cdot t + B \cdot t^2)}, \quad (7.7)$$

kde

R_V, A a B jsou konstantní hodnoty.

Dále je postup obdobný jako v předchozích kapitolách.
Průměrná hodnota odporu vyšla:

$$\tilde{R}_0 = 1020,400 \, \Omega$$

Přidružená standardní nejistota měření odporu:

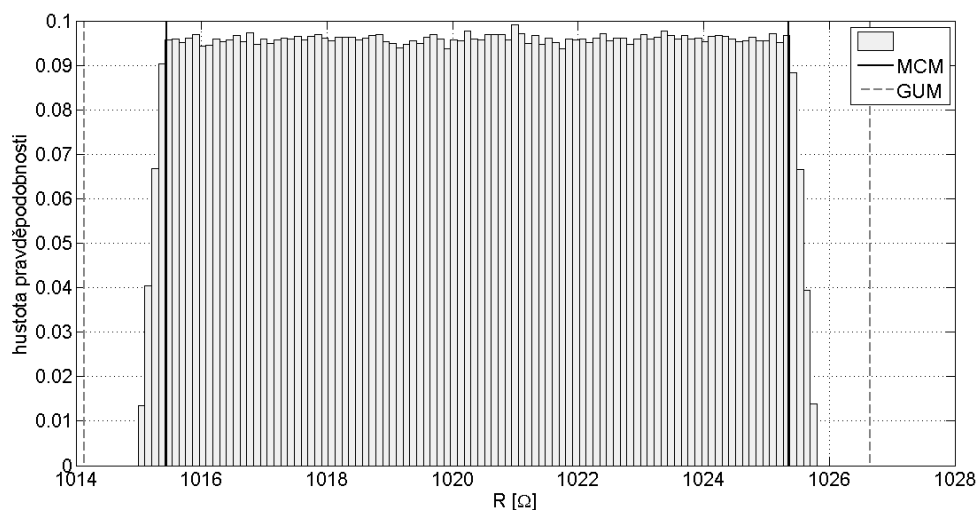
$$u(R_0) = 3,011 \, \Omega$$

Interval pokrytí, ve kterém leží hodnota odporu s pravděpodobností 95 %:

$$[R_{low}, R_{high}] = [1015,446 \, \Omega, 1025,347 \, \Omega]$$

Tab. 7.3: Srovnání metod pro odpor teplotního čidla měřený Ohmovou metodou pro malé odpory

Metoda	M	R_0	$u(R_0)$	95% interval pokrytí
GUF		1020,397 Ω	3,131 Ω	[1014,135 Ω , 1026,659 Ω]
MCM	10^6	1020,400 Ω	3,011 Ω	[1015,446 Ω , 1025,347 Ω]



Obr. 7.1: Intervaly pokrytí při měření odporu teplotního čidla Ohmovou metodou pro malé odpory

V tabulce 7.3 se nachází srovnání výsledných hodnot vypočítaných metodou Monte Carlo a numerickou metodou. Na obrázku 7.1 je graf hustoty pravděpodobnosti odporu při nulové teplotě. Svislé čáry znázorňují intervaly pokrytí vypočítané metodou Monte Carlo i numerickou metodou.

7.3 Shrnutí nepřímého měření odporu Ohmovou metodou v závislosti na vlivu teploty

Z tabulky 7.3 si lze všimnout, že vypočítané hodnoty odporu při nulové teplotě jsou téměř shodné, $R_0 = 1020,397 \Omega$ pro klasickou numerickou metodu a $R_0 = 1020,400 \Omega$ pro metodu Monte Carlo. Výrobce však udává při nulové teplotě hodnotu odporu $R_0 = 1000 \Omega$. Pro teplotu $t = 100^\circ C$ vyšla hodnota odporu $R = 1413,306 \Omega$. Hodnota odporu se tedy zvýšila o $392,909 \Omega$ při zvýšení teploty o $100^\circ C$. Tentokrát metodou Monte Carlo vyšla menší standardní přidružená nejistota měření odporu než u klasické numerické metody. Interval pokrytí, ve kterém výsledná hodnota odporu leží s pravděpodobností 95 %, vyšel užší metodou Monte Carlo. Z grafu 7.1 je vidět, že intervaly vypočítané podle obou metod se překrývají, z toho vyplývá, že výsledky jsou kompatibilní.

8 ZÁVĚR

V této bakalářské práci jsem se zabýval stanovením nejistot pomocí metody Monte Carlo. Cílem bylo demonstrovat výhody metody Monte Carlo, jako je například použití pro různá rozdělení vstupních veličin. V metodě Monte Carlo je také výhodou, že není nutné počítat parciální derivace. Výpočty nejistot pomocí Monte Carlo byly porovnány s nejistotami vypočítanými pomocí numerické metody.

V teoretické části se nachází stručný úvod do stanovení nejistot měření. Je zde popsáno základní dělení nejistot a nejdůležitější vztahy pro výpočet. Následuje kapitola s teorií metody Monte Carlo. V této kapitole se nachází historie metody Monte Carlo, použití metody a ukázkový příklad pro výpočet Ludolfova čísla. Je zde uvedeno základní vysvětlení metody Monte Carlo pro výpočet nejistot měření. Nachází se zde i postup výpočtu nejistot pomocí metody Monte Carlo, podle kterého jsem při výpočtu postupoval. Dále je zde stručně popsáno jak získat náhodná čísla, software vhodný pro metodu Monte Carlo a její výhody či nevýhody. Další teoretická kapitola obsahuje stručné vysvětlení závislosti odporu na teplotě. Jsou zde uvedeny základní vztahy závislosti elektrického odporu na teplotě a základní konstanty některých odporových materiálů.

V praktické části jsem demonstroval použití metody Monte Carlo na výpočet nejistot nepřímého měření odporu Ohmovou metodou. Při měření jsem posuzoval vliv metody na velikost nejistot, dále vliv přesnosti použitých přístrojů a také vliv teploty. Pro posouzení vlivu metody jsem zpracoval nepřímé měření odporu Ohmovou metodou pro malé i velké odpory. Jako měřené odpory jsem použil odpory na dekádě $20\ \Omega$ a $500\ k\Omega$. Dále jsem provedl výpočet nejistot měření odporu, nejdříve numerickou metodou a poté metodou Monte Carlo. Následně jsem posuzoval vliv použité metody na velikost těchto zjištěných nejistot. Podle očekávání při měření odporu $20\ \Omega$ vyšla nejistota měření odporu menší u Ohmovy metody pro malé odpory a při měření odporu $500\ k\Omega$ byla nejistota měření odporu menší u Ohmovy metody pro velké odpory. V další kapitole jsem tentokrát posuzoval vliv přesnosti použitých přístrojů na velikost nejistoty nepřímého měření odporu. Jako přesné přístroje jsem použil číslicové multimetry Agilent 34401A a jako zástupce méně přesných přístrojů univerzální měřicí přístroje DU-20. Opět jsem výpočet nejistot nepřímého měření odporu provedl klasickou numerickou metodou a následně metodou Monte Carlo. V tabulce 6.8 se nachází shrnutí všech vypočítaných hodnot této kapitoly. Je zde patrné, že nejistota nepřímého měření odporu analogovými přístroji vyšla přibližně třikrát větší než u přesných číslicových přístrojů. Další a zároveň poslední kapitola v praktické části pojednává o nepřímém měření odporu čidla teploty Pt1000 Ohmovou metodou pro malé odpory v závislosti na teplotě. Čidlo teploty jsem záměrně použil místo klasického rezistoru z důvodu větší závislosti na teplotě. Odpor

čidla jsem změřil při teplotě 100°C . Následně jsem sestavil vztah, který současně slouží i jako model měření pro metodu Monte Carlo, pro výpočet odporu při nulové teplotě. Poté jsem provedl výpočet nejistot měření odporu čidla numerickou metodou a metodou Monte Carlo. Odpor při nulové teplotě vyšel pro obě metody téměř shodný, $R_0 = 1020,397\ \Omega$ klasickou numerickou metodou a $R_0 = 1020,400\ \Omega$ metodou Monte Carlo. Interval pokrytí vypočítaný metodou Monte Carlo vyšel opět užší než u numerické metody.

Ze všech výsledků dosažených v této práci je patrné, že interval pokrytí vypočítaný metodou Monte Carlo, ve kterém se měřený odpor nachází s pravděpodobností 95 %, je užší než u klasické numerické metody. Lze tedy konstatovat, že výsledky získané metodou Monte Carlo jsou přesnější než numerické. Ve všech srovnání se intervaly pokrytí podle obou metod překrývají. Z toho lze usoudit, že výsledky jsou kompatibilní. Jako největší výhodu metody Monte Carlo přisuzuji k rychlosti a jednoduchosti výpočtu. Nejnáročnější je stanovení správného modelu měření, další podmínkou je použití vhodného generátoru náhodných čísel a poté je ji samotný výpočet obdobný pro různé modely.

LITERATURA

- [1] PALENČÁR, R., F. VDOLEČEK a M. HALAJ. Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot. *Automa*. 2001, 7-8, s. 50-54.
- [2] PALENČÁR, R., F. VDOLEČEK a M. HALAJ. Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření. *Automa*. 2001, 10, s. 52-56.
- [3] PALENČÁR, R., F. VDOLEČEK a M. HALAJ. Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření. *Automa*. 2001, 12, s. 28-33.
- [4] PALENČÁR, R., F. VDOLEČEK a M. HALAJ. Nejistoty v měření V: od teorie k praxi. *Automa*. 2002, 5, s. 42-45.
- [5] HRUŠKA, K. a J. BRADÍK. *Stanovení nejistot při měření parametrů jakosti*. Vyd. 1. V Brně: Vysoké učení technické, 2001, 113 s. Připojujeme se k Evropské unii. ISBN 80-214-1656-4.
- [6] ČEJKA, M. *Stručný úvod do problematiky nejistot měření*.
- [7] CHUDÝ, V., R. PALENČÁR, E. KUREKOVÁ a M. HALAJ. *Meranie technických veličín* [online]. 1. vyd. Bratislava: STU, 1999, 689 s. [cit. 2012-10-27]. ISBN 80-227-1275-2. Dostupné z: <http://www.kam.sjf.stuba.sk/katedra/publikacie/edutrac/mtv/ucebnica/obsah.htm>
- [8] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data—Supplement 1 to the "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" Propagation of distributions using a Monte Carlo method. 1. vyd. 2008
- [9] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data — *Guide to the expression of uncertainty in measurement*
- [10] ŠÍRA, M., V. NOVÁKOVÁ ZACHOVALOVÁ, J. OTYCH a J. ZŮDA. *Vybrané problémy metrologie fyzikálních a elektrických veličin* [online]. 2012 [cit. 2012-10-27]. Dostupné z: <http://crr.vutbr.cz/kurzy-seminare/merici-systemy/seminar-vybrane-problemy-metrologie-fyzikalnich-elektricky-velicin>
- [11] ŠÍRA, M. *Výpočet nejistot metodou Monte Carlo* [online]. 2012 [cit. 27. 10. 2012]. Dostupné z: <http://crr.vutbr.cz/kurzy-seminare/merici-systemy/seminar-vybrane-problemy-metrologie-fyzikalnich-elektricky-velicin>
- [12] HRACH, R. *Počítačová fyzika I*. Ústí nad Labem: PF UJEP, 2003.

- [13] BENEŠ, P., J. FIALKA, Z. HAVRÁNEK, S. KLUSÁČEK, T. KOPECKÝ, M. KRUPA, M. UHER a M. VÁGNER. *Měření fyzikálních veličin: návody do laboratorních cvičení*. Brno, 2013.
- [14] SMUTNÝ, L. Snímače teploty – současný stav a směry vývoje. *AUTOMA: časopis pro automatizační techniku* [online]. 2007 [cit. 2013-04-27]. Dostupné z: http://www.odbornecasopisy.cz/index.php?id_document=34041
- [15] ŠEDIVÝ, P. *TEPLOTNÍ ZÁVISLOSTI FYZIKÁLNÍCH VELIČIN: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku*. 2011.
- [16] TT1150. *Ifm.com* [online]. 2008 [cit. 2013-05-12]. Dostupné z: <http://www.ifm.com/products/cz/ds/TT1150.htm>

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

n	počet opakování měření
Y	výstupní veličina, náhodná výstupní veličina pro metodu Monte Carlo
y	odhad výstupní veličiny, střední hodnota výstupní náhodné veličiny Y
X_i	vstupní veličiny
x_i	jednotlivé naměřené hodnoty, střední hodnoty náhodné veličiny X_i
$\bar{x}$	aritmetický průměr naměřených hodnot
$s_{\bar{x}}$	výběrová směrodatná odchylka výběrového průměru
$u_A(x)$	standardní nejistota typu A
$u_B(x)$	standardní nejistota typu B
$u_C(x)$	kombinovaná nejistota
$U(x)$	rozšířená nejistota
k_r	koeficient rozšíření
A_Z, A_i	citlivostní koeficienty
r_B	výběrový korelační koeficient
D_{max}	maximální odchylka zdroje nejistoty
χ	koeficient příslušný k rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých zdrojů
M	počet opakování metody Monte Carlo
$\tilde{y}$	odhad výstupní veličiny pro metodu Monte Carlo
$u(\tilde{y})$	přidružená standardní nejistota pro metodu Monte Carlo
η	možná hodnota náhodné veličiny Y
$g(\xi_i)$	hustota pravděpodobnosti veličiny X_i
ξ_i	možná hodnota náhodné veličiny X_i
G	diskrétní distribuční funkce
y_{low}	dolní mez intervalu pokrytí pro metodu Monte Carlo

y_{high}	horní mez intervalu pokrytí pro metodu Monte Carlo
R_X, R_{Xi}	skutečná hodnota měřeného odporu
R'_X, R'_{Xi}	odpor vypočítaný přímo z údajů přístrojů
$\overline{R_X}$	odhad hodnoty měřeného odporu
R_0	odpor při nulové teplotě
R_V	vnitřní odpor voltmetru
R_A	vnitřní odpor ampérmetru
U_V, U_{Vi}	údaj voltmetru
I, I_i	údaj ampérmetru
$\overline{U_V}$	odhad měřeného napětí
$\overline{I}$	odhad měřeného proudu
t	teplota
Δp_U	absolutní chyba voltmetru
Δp_I	absolutní chyba ampérmetru
Δp_t	absolutní chyba měření teploty
Δp_{R_A}	absolutní chyba při měření vnitřního odporu ampérmetru
$u_A(R_X)$	standardní nejistota typu A měření odporu
$u_B(R_X)$	standardní nejistota typu B měření odporu
$u_C(R_X)$	kombinovaná nejistota měření odporu
$U(R_X)$	rozšířená nejistota měření odporu
u_{BU}	standardní nejistota typu B měření napětí
u_{BI}	standardní nejistota typu B měření proudu
u_{BRA}	standardní nejistota typu B vnitřního odporu ampérmetru
u_{BRV}	standardní nejistota typu B vnitřního odporu voltmetru
u_{Bt}	standardní nejistota typu B měření teploty

SEZNAM PŘÍLOH

A	Ukázkové příklady z Matlabu	58
A.1	Ukázkový příklad kódu Matlabu při zapojení pro velké odpory	58
A.2	Ukázkový příklad kódu Matlabu při zapojení pro malé odpory	60
A.3	Ukázkový příklad kódu Matlabu pro výpočet nejistoty měření odporu se závislostí na teplotě	62
B	Přiložené CD	64

A UKÁZKOVÉ PŘÍKLADY Z MATLABU

A.1 Ukázkový příklad kódu Matlabu při zapojení pro velké odpory

```
%ukazkovy priklad pro zapojení VA
clc
clear all
close all

%pocet opakovani metody
M = 10e5;

%vygenerovani nahodnych hodnot napeti
rand('state',1991)      %nastaveni generatoru
U = 8.986;               %napeti U na voltmetru
deltaU = .048;           %mezni chyba voltmetru
randU = U-deltaU + (2*deltaU).*rand(1,M);

%vygenerovani nahodnych hodnot proudu
rand('state',52)         %nastaveni generatoru
I = 0.018e-3;            %proud I na ampermetru
deltaI = 1.001e-6;       %mezni chyba ampermetru
randI = I-deltaI + (2*deltaI).*rand(1,M);

%model mereni Ohmovou metodou pro velke odpory
randR = randU./randI-5;

%prumerna hodnota odporu
meanR = mean(randR);

%vykresleni grafu hustoty pravdepodobnosti
[F,X]=ecdf(randR);
ecdfhist(F,X,100)
grid on
hold on

%serazeni hodnot do neklesajiciho poradi
```

```

randR = sort(randR);

%vypocet smerodatne odchylky
sumaR = 0;
for i=1:M
    sumaR = sumaR + (randR(i)-meanR)^2;
end;
uR = sqrt((1/(M-1)*sumaR));

%vypocet intervalu pokryti pro R
p = 0.95;
q = p*M;
r = (M-q)/2;
Rlow = randR(r);
Rhigh = randR(r+q);

%vykresleni svislych car
line([Rlow Rlow],[0 .25e-4],'Color','k','LineWidth',2)
hold on
line([466.720e3 466.720e3],[0 .25e-4],'Color','k',
'LineStyle','--','LineWidth',1)
legend(' ','MCM','GUM')
hold on
line([Rhigh Rhigh],[0 .25e-4],'Color','k','LineWidth',2)
hold on
line([531.168e3 531.168e3],[0 .25e-4],'Color','k',
'LineStyle','--','LineWidth',1)
axis([4.6e5 5.4e5 0 2.5e-5])

```

A.2 Ukázkový příklad kódu Matlabu při zapojení pro malé odpory

```
%ukazkovy prikklad pro zapojení AV
clc
clear all
close all

%pocet opakovani metody
M = 10e5;

%vygenerovani nahodnych hodnot napeti
rand('state',1991)      %nastaveni generatoru
U = 8.98;                %napeti U na voltmetru
deltaU = 0.048;          %mezni chyba voltmetru
randU = U-deltaU + (2*deltaU).*rand(1,M);

%vygenerovani nahodnych hodnot proudu
rand('state',52)         %nastaveni generatoru
I = 0.0187e-3;           %proud I na ampermetru
deltaI = 1.001e-6;       %mezni chyba ampermetru
randI = I-deltaI + (2*deltaI).*rand(1,M);

%model mereni Ohmovou metodou pro male odpory
randR = randU./(randI-(randU/10e6));

%prumerna hodnota odporu
meanR = mean(randR);

%vykresleni grafu hustoty pravdepodobnosti
[F,X]=ecdf(randR);
ecdfhist(F,X,100)
grid on
hold on

%serazeni hodnot do neklesajiciho poradi
randR = sort(randR);
```

```

%vypocet smerodatne odchylky
sumaR = 0;
for i=1:M
    sumaR = sumaR + (randR(i)-meanR)^2;
end;
uR = sqrt((1/(M-1)*sumaR));

%vypocet intervalu pokryti pro R
p = 0.95;
q = p*M;
r = (M-q)/2;
Rlow = randR(r);
Rhigh = randR(r+q);

%vykresleni svislych car
line([Rlow Rlow],[0 2.5e-5],'Color','k','LineWidth',2)
hold on
line([472.352e3 472.352e3],[0 2.5e-5],'Color','k',
'LineStyle','--','LineWidth',1)
legend(' ','MCM','GUM')
hold on
line([Rhigh Rhigh],[0 2.5e-5],'Color','k','LineWidth',2)
hold on
line([538.240e3 538.240e3],[0 2.5e-5],'Color','k',
'LineStyle','--','LineWidth',1)
axis([4.6e5 5.5e5 0 2.5e-5])

```

A.3 Ukázkový příklad kódu Matlabu pro výpočet nejistoty měření odporu se závislostí na teplotě

```
%ukazkovy prikklad pro vypocet nejistoty mereni odporu se
%zavislosti na teplote
clc
clear all
close all

%pocet opakovani metody
M = 10e5;

%hodnota vnitřního odporu voltmetru
Rv = 10e6;

%koeficienty udávající závislost na teplote
A = 3.9083e-3;
B = -5.775e-7;

%vygenerovani nahodnych hodnot napeti a proudu a teploty
rand('state',1991)      %nastaveni generatoru
U = 9.79;                %napeti U na voltmetru
deltaU = 0.050;          %mezni chyba voltmetru
randU = U - deltaU + (2*deltaU).*rand(1,M);

rand('state',52)         %nastaveni generatoru
I = 6.928e-3;            %proud I na ampermetru
deltaI = 1.346e-6;       %mezni chyba ampermetru
randI = I - deltaI + (2*deltaI).*rand(1,M);

rand('state',5591)
T = 100;
deltaT = 0.5;
randT = T - deltaT + (2*deltaT).*rand(1,M);

%model mereni se zavislosti na teplote
randR = (randU * Rv) ./ ((randI * Rv - randU) .* (1 + A*T +
```

```

B*T.*T));

%prumerna hodnota odporu
meanR = mean(randR)

%vykresleni grafu hustoty pravdepodobnosti
[F,X]=ecdf(randR);
ecdfhist(F,X,100)
grid on
hold on

%serazeni hodnot do neklesajiciho poradi
randR = sort(randR);

%vypocet smerodatne odchylky
sumaR = 0;
for i=1:M
    sumaR = sumaR + (randR(i) - meanR)^2;
end;
uR = sqrt((1/(M-1)*sumaR))

%vypocet intervalu pokryti pro R
p = 0.95;
q = p*M;
r = (M-q)/2;
Rlow = randR(r)
Rhigh = randR(r+q)

%vykresleni svislych car
line([Rlow Rlow],[0 0.1],'Color','k','LineWidth',2)
hold on
line([1014.135 1014.135],[0 0.1],'Color','k','LineStyle','--','LineWidth',2)
legend('','MCM','GUM')
hold on
line([Rhigh Rhigh],[0 0.1],'Color','k','LineWidth',2)
hold on
line([1026.659 1026.659],[0 0.1],'Color','k','LineStyle','--','LineWidth',2)

```

B PŘILOŽENÉ CD

Na přiloženém CD se nachází kompletní text bakalářské práce ve formátu .pdf.